

УДК 539.3

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИСКОВОГО ПОДАТЛИВОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ТРЕЩИНОЙ ПРИ ПАДЕНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

В. В. Михаськив, И. О. Бутрак, И. П. Лаушник\*

Институт прикладных проблем механики и математики  
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, 79060 Львов, Украина

\* Львовский филиал Днепропетровского национального университета  
железнодорожного транспорта, 79052 Львов, Украина  
E-mail: butrak@iapmm.lviv.ua

Исследована задача о распространении гармонических упругих волн в трехмерной бесконечной матрице, содержащей взаимодействующие дисковое включение с малой жесткостью и трещину. Задача сведена к системе граничных интегральных уравнений относительно функций, характеризующих скачки перемещений на включении и трещине. Искомые функции определяются путем численного решения системы граничных интегральных уравнений. Для симметричной задачи приведены графики зависимости коэффициентов интенсивности динамических напряжений в окрестности круговых включения и трещины от волнового числа при различных расстояниях между ними и параметрах податливости включения.

**Ключевые слова:** трехмерная упругая матрица, дисковое включение, трещина, гармоническая упругая волна, коэффициенты интенсивности динамических напряжений, метод граничных интегральных уравнений.

**Введение.** Изучение напряженно-деформированного состояния в окрестности близко-расположенных включений и трещин в случае переменной во времени нагрузки необходимо для оценки динамической прочности композитных материалов. Рассмотрение тонкостенных либо дисковых включений представляет интерес, поскольку такие наполнители часто используются при создании нанокompозитных структур [1, 2]. Кроме того, указанные включения могут образовываться при залечивании существующих трещин путем заполнения их связующим материалом [3]. В [4–8] методом граничных интегральных уравнений (ГИУ) анализировались прямые и обратные задачи рассеяния упругих волн на изолированных и множественных трещинах. В работе [9] исследовано динамическое влияние на трещину абсолютно жесткого дискового включения. Однако совместное влияние трещин и дисковых упругих включений в поле гармонических упругих волн изучено недостаточно. В данной работе рассмотрена симметричная задача о падении плоской продольной волны по нормали к плоскости, параллельной трещине и включению, имеющему малую по сравнению с матрицей жесткость.

**Сведение задачи к системе ГИУ.** Рассмотрим бесконечную упругую матрицу, в плоскости  $x_3 = 0$  которой содержатся упругое тонкостенное круговое (дисковое) включе-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-технологического центра Украины и Национальной академии наук Украины (проект № 5726).

© Михаськив В. В., Бутрак И. О., Лаушник И. П., 2013

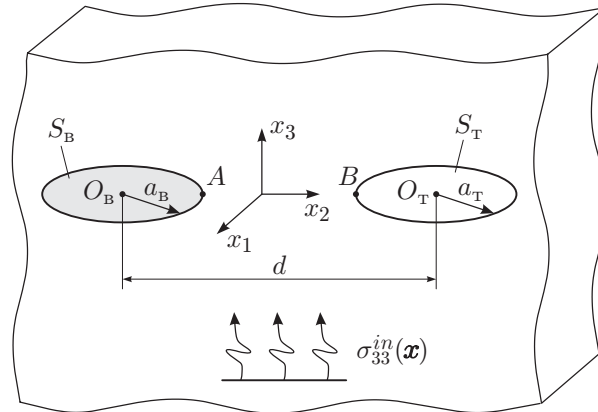


Рис. 1. Расчетная схема

ние  $S_B$  толщиной  $h$  и круговая трещина  $S_T$  с радиусами  $a_B$  и  $a_T$  соответственно (рис. 1). Механические свойства матрицы и включения определяются плотностями  $\rho$ ,  $\rho_0$ , модулями сдвига  $G$ ,  $G_0$  и коэффициентами Пуассона  $\nu$ ,  $\nu_0$  соответствующих материалов. Между включением и матрицей существует идеальный механический контакт, поверхности трещины свободны от усилий.

Проведем анализ симметричной задачи динамического взаимодействия включения и трещины, в случае когда на них перпендикулярно плоскости их расположения набегают гармоническая упругая плоская продольная волна с циклической частотой  $\omega$  и известным нормальным напряжением  $\sigma_{33}^{in}(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  — радиус-вектор точки тела. В рассматриваемом случае установившегося процесса временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  ( $t$  — время;  $i = \sqrt{-1}$ ) исключается из решения, что позволяет свести задачу к определению амплитуд искомых величин.

Наличие в матрице нескольких рассеивателей приводит к возникновению суперпозиционного волнового поля, перемещения в котором  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  представляются в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^B(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}^B = (u_1^B, u_2^B, u_3^B)$ ,  $\mathbf{u}^T = (u_1^T, u_2^T, u_3^T)$  — неизвестные перемещения в волнах, рассеянных включением и трещиной соответственно. В случае стационарных колебаний все члены в соотношениях (1) должны удовлетворять дифракционным уравнениям движения [10]:

$$\omega_1^{-2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \omega_2^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\nabla$  — трехмерный набла-оператор;  $\omega_j = \omega/c_j$  ( $j = 1, 2$ ) — волновые числа;  $c_1 = c_2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ ,  $c_2 = \sqrt{G/\rho}$  — скорости распространения в матрице продольных и поперечных волн соответственно. Для обеспечения единственности решения рассматриваемой задачи необходимо также выполнение условий излучения на бесконечности [10].

С целью определения граничных условий в области  $S_B$  включения будем использовать линейную зависимость между нормальными напряжениями  $\sigma_{33}$  и скачками нормальных перемещений  $\Delta u_3^B$  в этой области, или “раскрытием включения” (вследствие симметрии задачи соответствующие тангенциальные величины равны нулю). Адекватность модели обеспечивается малостью толщины включения по сравнению с его диаметром при  $h = 2\delta_1 a_B$  ( $\delta_1 \ll 1$ ) и длиной возбуждающей волны  $\omega_2 h \ll 1$ , а также условием податливости материала включения по сравнению с податливостью материала матрицы при  $G_0 = \delta_2 G$  ( $\delta_2 \ll 1$ ); величины  $\delta_1$  и  $\delta_2$  имеют один и тот же порядок. При таких предположениях имеем [11]

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = \frac{2(1-\nu_0)G_0}{(1-2\nu_0)h} \Delta u_3^B(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_B. \quad (3)$$

В соотношении (3) коэффициент пропорциональности между напряжением и скачком перемещений характеризует жесткость включения. Динамическое поведение трещины описывается ее раскрытием  $\Delta u_3^T$ , при этом вследствие отсутствия усилий на ее поверхностях должно выполняться условие

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_T. \quad (4)$$

Компоненты входящих в формулу (1) динамических перемещений  $u_j^D$  ( $j = 1, 2, 3$ ; здесь и далее индекс  $D$  соответствует случаю включения (в) или случаю трещины (т)) запишем в интегральной форме с использованием представления Сомильяно, согласно которому

$$u_j^D(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \iint_{S_D} \Delta u_3^D(\boldsymbol{\xi}) \frac{\exp(i\omega_1|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) - 2(1 - \delta_{j3}) \exp(i\omega_2|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_\xi + \right. \\ \left. + \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \iint_{S_D} \Delta u_3^D(\boldsymbol{\xi}) \frac{\exp(i\omega_1|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) - \exp(i\omega_2|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_\xi \right], \quad (5)$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера;  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  — расстояние между точкой  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  тела и точкой интегрирования  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, 0)$ .

Вычисляя с помощью закона Гука напряжения в выражениях (1), (5) и подставляя их в граничные условия (3), (4), получаем следующую систему двух ГИУ относительно раскрытий  $\Delta u_3^B$  и  $\Delta u_3^T$ :

$$\frac{2(1 - \nu_0)G_0}{(1 - 2\nu_0)h} \Delta u_3^B(\mathbf{x}) + \frac{4G}{\omega_2^2} \left( \iint_{S_B} \Delta u_3^B(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_\xi + \right. \\ \left. + \iint_{S_T} \Delta u_3^T(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_\xi \right) = -\sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_B, \quad (6)$$

$$\frac{4G}{\omega_2^2} \left( \iint_{S_B} \Delta u_3^B(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_\xi + \iint_{S_T} \Delta u_3^T(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_\xi \right) = -\sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_T.$$

Здесь гиперсингулярное в точке  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  ядро  $R$  с особенностью порядка  $r^{-3}$  определяется соотношением

$$R(r) = \{ (9 - 9i\omega_2 r - 4\omega_2^2 r^2 + i\omega_2^3 r^3) \exp(i\omega_2 r) - [9 - 9i\omega_1 r + (\omega_2^2 - 5\omega_1^2) r^2 + \\ + i\omega_1(2\omega_1^2 - \omega_2^2) r^3 + (2\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 r^4 / 4] \exp(i\omega_1 r) \} r^{-5}. \quad (7)$$

В силу граничных условий (3) в области включения ГИУ (6) являются интегральными уравнениями второго рода, в то время как в области трещины они являются ГИУ первого рода. В частном случае  $G_0 = 0$  система ГИУ (6) соответствует задаче динамического взаимодействия двух трещин, а при  $\omega \rightarrow 0$  сводится к системе ГИУ для статической задачи о трещине и дисковом включении в бесконечной упругой матрице.

**Регуляризация и численное решение ГИУ.** Выделяя особенности с помощью интегралов типа ньютоновского (статического) потенциала, систему уравнений (6) можно тождественно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{2(1-\nu_0)(1-\nu)\bar{G}}{(1-2\nu_0)h} \Delta u_3^B(\mathbf{x}) - \iint_{S_B} \frac{\Delta u_3^B(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} dS_\xi - q\omega_2^2 \iint_{S_B} \frac{\Delta u_3^B(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} dS_\xi + \\
& + \iint_{S_B} \Delta u_3^B(\boldsymbol{\xi}) \left( \frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} R(|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|) + \frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} + \frac{q\omega_2^2}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right) dS_\xi + \\
& + \frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} \iint_{S_T} \Delta u_3^T(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|) dS_\xi = -\frac{1-\nu}{G} \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_B, \\
& \iint_{S_T} \frac{\Delta u_3^T(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} dS_\xi + q\omega_2^2 \iint_{S_T} \frac{\Delta u_3^T(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} dS_\xi - \\
& - \iint_{S_T} \Delta u_3^T(\boldsymbol{\xi}) \left( \frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} R(|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|) + \frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} + \frac{q\omega_2^2}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right) dS_\xi - \\
& - \frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} \iint_{S_B} \Delta u_3^B(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|) dS_\xi = \frac{1-\nu}{G} \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_T,
\end{aligned} \tag{8}$$

где  $\bar{G} = G_0/G$ ;  $q = (7 - 12\nu + 8\nu^2)/[8(1 - \nu)]$ . Третьи интегралы в левых частях обоих ГИУ (8) регулярен, в чем можно убедиться, разлагая ядро  $R$  в ряд по величине  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ .

В соответствии с условием непрерывности перемещений в окрестности контуров включения и трещины искомые функции представим в виде произведений

$$\Delta u_3^D(\mathbf{x}) = \sqrt{a_D^2 - (x_1 - b_D)^2 - (x_2 - c_D)^2} \alpha_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_D, \tag{9}$$

где  $\alpha_D$  — неизвестные функции;  $b_D, c_D$  — координаты центров включения  $O_B$  и трещины  $O_T$  соответственно (см. рис. 1).

С учетом представления (9) особые интегралы в уравнении (8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_D} \frac{\sqrt{a_D^2 - (\xi_1 - b_D)^2 - (\xi_2 - c_D)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \alpha_D(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi = I_{00}^D(\mathbf{x}) \alpha_D(\mathbf{x}) + I_{01}^D(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \\
& + I_{10}^D(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \frac{1}{2} I_{02}^D(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + I_{11}^D(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} I_{20}^D(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + \\
& + \iint_{S_D} \frac{\sqrt{a_D^2 - (\xi_1 - b_D)^2 - (\xi_2 - c_D)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \left( \alpha_D(\boldsymbol{\xi}) - \alpha_D(\mathbf{x}) - \right. \\
& \left. - (\xi_1 - x_1) \frac{\partial \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_1} - (\xi_2 - x_2) \frac{\partial \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (\xi_1 - x_1)^2 \frac{\partial^2 \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} - (\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2) \frac{\partial^2 \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2} (\xi_2 - x_2)^2 \frac{\partial^2 \alpha_D(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \right) dS_\xi, \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_D} \frac{\sqrt{a_D^2 - (\xi_1 - b_D)^2 - (\xi_2 - c_D)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \alpha_D(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi = I^D(\mathbf{x}) \alpha_D(\mathbf{x}) + \\ + \iint_{S_D} \frac{\sqrt{a_D^2 - (\xi_1 - b_D)^2 - (\xi_2 - c_D)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} [\alpha_D(\boldsymbol{\xi}) - \alpha_D(\mathbf{x})] dS_\xi, \quad \mathbf{x} \in S_D. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_{jk}^D(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\sqrt{a_D^2 - (\xi_1 - b_D)^2 - (\xi_2 - c_D)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} (\xi_1 - x_1)^k (\xi_2 - x_2)^j dS_\xi, \\ I^D(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\sqrt{a_D^2 - (\xi_1 - b_D)^2 - (\xi_2 - c_D)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку подынтегральные выражения в правых частях равенств (10) ограничены в точке  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ , численное интегрирование в соответствующих интегралах проводилось вдоль области  $S_D^\varepsilon$ , образующейся из  $S_D$  путем удаления малой окрестности этой точки. Интегралы (11) существуют в смысле главного значения и вычисляются аналитически интегрированием по частям [7].

Подставляя соотношения (10) в ГИУ (8), получаем их регулярный аналог в виде

$$\begin{aligned} [f^B(\mathbf{x}) - g_{00}^B(\mathbf{x}) - q\omega_2^2 g^B(\mathbf{x})] \alpha_B(\mathbf{x}) - g_{01}^B(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha_B(\mathbf{x})}{\partial x_1} - g_{10}^B(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha_B(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \\ - \frac{1}{2} g_{02}^B(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_B(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} - g_{11}^B(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_B(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2} g_{20}^B(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_B(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + \\ + \frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} \left( \iint_{S_B^\varepsilon} \frac{\sqrt{a_B^2 - (\xi_1 - b_B)^2 - (\xi_2 - c_B)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \alpha_B(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_\xi + \right. \\ \left. + \iint_{S_T} \frac{\sqrt{a_T^2 - (\xi_1 - b_T)^2 - (\xi_2 - c_T)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \alpha_T(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_\xi = -\frac{1-\nu}{G} \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_B, \right. \\ [g_{00}^T(\mathbf{x}) + q\omega_2^2 g^T(\mathbf{x})] \alpha_T(\mathbf{x}) + g_{01}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha_T(\mathbf{x})}{\partial x_1} - g_{10}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha_T(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \\ + \frac{1}{2} g_{02}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_T(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + g_{11}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_T(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} g_{20}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_T(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} - \\ - \frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} \left( \iint_{S_T^\varepsilon} \frac{\sqrt{a_T^2 - (\xi_1 - b_T)^2 - (\xi_2 - c_T)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \alpha_T(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_\xi + \right. \\ \left. + \iint_{S_B} \frac{\sqrt{a_B^2 - (\xi_1 - b_B)^2 - (\xi_2 - c_B)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \alpha_B(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) dS_\xi = \frac{1-\nu}{G} \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_T, \right. \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$f^B(\mathbf{x}) = \frac{2(1-\nu_0)(1-\nu)\bar{G}}{(1-2\nu_0)h} \sqrt{a_B^2 - (x_1 - b_B)^2 - (x_2 - c_B)^2},$$

$$g_{jk}^D(\mathbf{x}) = I_{jk}^D(\mathbf{x}) - \iint_{S_D^\varepsilon} \sqrt{a_D^2 - (\xi_1 - b_D)^2 - (\xi_2 - c_D)^2} \frac{(\xi_1 - x_1)^k (\xi_2 - x_2)^j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dS_\xi,$$

$$g^D(\mathbf{x}) = I^D(\mathbf{x}) - \iint_{S_D^\varepsilon} \frac{\sqrt{a_D^2 - (\xi_1 - b_D)^2 - (\xi_2 - c_D)^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_\xi.$$

При дискретизации уравнений (12) используется метод коллокации, для того чтобы они были справедливы в узловых точках граничных элементов, образованных при равномерном разбиении областей  $S_B$  и  $S_T$  в направлениях радиальной и угловой координат. Неизвестные функции аппроксимировались постоянными. Таким образом, задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений функций  $\alpha_D$ .

Зная дискретные решения  $\alpha_D$ , нетрудно найти коэффициенты интенсивности динамических напряжений (КИДН) отрыва в окрестности включения  $K_I^B$  и трещины  $K_I^T$  [11]:

$$K_I^D(\varphi_D) = -\frac{2G\pi\sqrt{\pi a_D}}{1-\nu} \alpha_D(\mathbf{x})|_{x_1, x_2}.$$

Здесь  $\varphi_D$  — угловые координаты точки контура включения и трещины;  $x_1 = b_D + a_D \cos \varphi_D$ ;  $x_2 = c_D + a_D \sin \varphi_D$ .

**Результаты численных расчетов.** В качестве примера рассмотрим компланарные включение и трещину с одинаковыми радиусами  $a_B = a_T = a$ , расстояние между центрами которых равно  $d$  (см. рис. 1). В матрице распространяется плоская продольная гармоническая волна с перпендикулярным плоскости включения и трещины направляющим вектором и постоянной амплитудой напряжений  $N_0$ , при этом  $\sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}) = N_0 \exp(-i\omega_1 x_3)$ . Коэффициенты Пуассона материалов матрицы и включения полагались равными:  $\nu = \nu_0 = 0,3$ , толщина включения  $h = 0,01a$ . Для нормирования амплитуд КИДН в окрестности включения и трещины использовалось значение  $K_I^{st} = 2N_0\sqrt{a/\pi}$  коэффициента интенсивности статических напряжений отрыва для изолированной круговой трещины в матрице при одноосном растяжении усилиями  $N_0$ , причем  $\bar{K}_I^D = |K_I^D|/K_I^{st}$ . Приведенные результаты численных расчетов показывают изменение КИДН в точках  $A$  и  $B$  контуров включения и трещины соответственно, где их взаимодействие является наиболее сильным (см. рис. 1). При параметрическом анализе варьировались жесткость включения  $\bar{G}$  вблизи трещины и расстояние  $d$  между ними. Области включения и трещины были разделены на 217 граничных элементов. Дальнейшего сгущения сетки граничных элементов не требовалось, поскольку относительная погрешность не превышала 1 %.

Для трещины с увеличением частоты колебаний КИДН возрастают от значений, имеющих место при статическом нагружении, когда волновое число равно нулю, до максимальных значений, после чего монотонно уменьшаются. Для включения локальный максимум достигается при фиксированной частоте  $\omega$  (рис. 2, 3). Максимальные значения КИДН наблюдаются в частотных диапазонах  $1,4 \leq \omega_2 a \leq 1,5$  для трещины и  $1,3 \leq \omega_2 a \leq 1,4$  (абсолютный максимум),  $2,7 \leq \omega_2 a \leq 3,0$  (локальный максимум) для включения в зависимости от геометрических и жесткостных характеристик взаимодействующих объектов. Появление этих максимумов обусловлено резонансным раскрытием трещины и включения в матрице в указанных диапазонах частот, которые вследствие ограниченности экстремумов в определенном смысле можно интерпретировать как собственные. В области низких частот  $K_I^B < K_I^T$  в окрестности взаимодействующих включения и трещины КИДН меньше, чем в окрестности двух взаимодействующих трещин, причем с увеличением жесткости включения различие значений КИДН возрастает. Выявленную закономерность можно использовать для уменьшения динамических напряжений в поврежденном трещинами

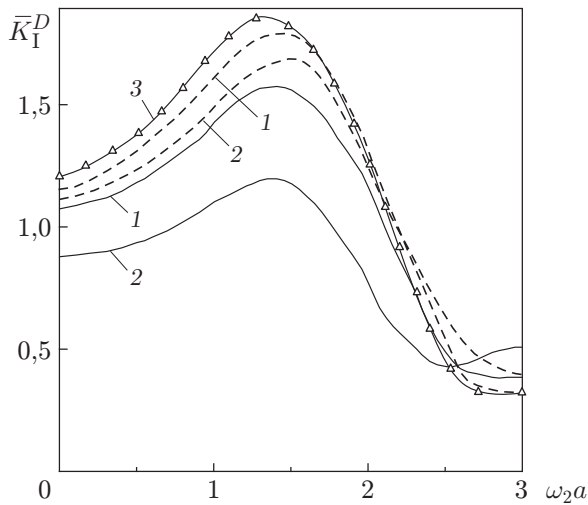


Рис. 2

Рис. 2. Зависимости нормированных амплитуд КИДН отрыва  $\bar{K}_I^D$  в окрестности включения (сплошные линии) и трещины (штриховые линии) от нормированного волнового числа  $\omega_2 a$  при  $d = 2,15a$ :

1, 2 — матрица с включением и трещиной (1 —  $\bar{G} = 0,001$ , 2 —  $\bar{G} = 0,005$ ); 3 — матрица с двумя трещинами

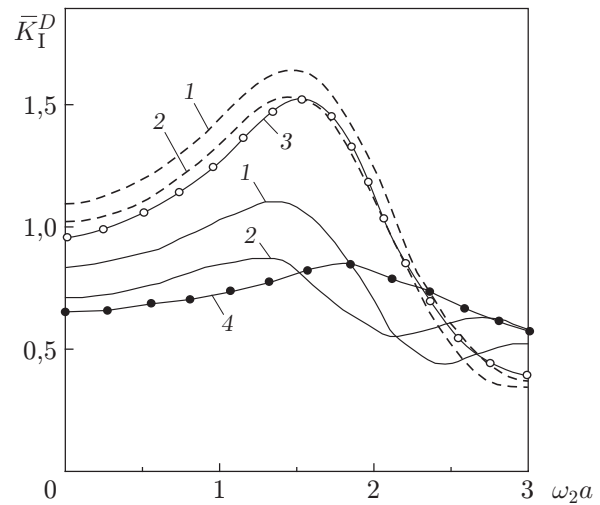


Рис. 3

Рис. 3. Зависимости нормированных амплитуд КИДН отрыва  $\bar{K}_I^D$  в окрестности включения (сплошные линии) и трещины (штриховые линии) от нормированного волнового числа  $\omega_2 a$  при  $\bar{G} = 0,005$ :

1, 2 — матрица с включением и трещиной (1 —  $d = 2,2a$ , 2 —  $d = 2,5a$ ); 3 — матрица с изолированной трещиной; 4 — матрица с изолированным включением

упругом теле путем наполнения всех дефектов либо некоторых из них связующим твердеющим материалом (аналогичные результаты, полученные в случае статической нагрузки, используются в современных инъекционных технологиях [3]). С увеличением расстояния между включением и трещиной КИДН в их окрестности приближаются к значениям для соответствующих одиночных объектов, при  $d > 2,5a$  взаимным влиянием включения и трещины можно пренебречь.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kanaun S. K. Self-consistent methods for composites. V. 2. Wave propagation in heterogeneous materials / S. K. Kanaun, V. M. Levin. Heidelberg: Springer, 2008.
2. Панин В. Е., Дерюгин Е. Е., Кульков С. Н. Мезомеханика упрочнения материалов нанодисперсными включениями // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 127–142.
3. Маруха В. И. Инъекционные технологии возобновления работоспособности поврежденных сооружений длительной эксплуатации / В. И. Маруха, В. В. Панасюк, В. П. Силованюк. Львов: Споллом, 2009.
4. Шифрин Е. И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002.
5. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В. Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 4. С. 702–715.

6. Ватульян А. О., Азарова П. А., Явруян О. В. Идентификация параметров наклонной прямолинейной трещины в вязкоупругом слое // Механика композиц. материалов и конструкций. 2008. Т. 14, № 3. С. 461–472.
7. Mykhas'kiv V. V., Zhang Ch., Sladek J., Sladek V. A frequency domain BEM for 3D non-synchronous crack interaction analysis in elastic solids // Engng Anal. Boundary Elements. 2006. V. 30, N 3. P. 167–175.
8. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Mikucka V. A., Guz I. A. Interface cracks with initial opening under harmonic loading // Composit. Sci. Technol. 2012. V. 72, N 10. P. 1057–1063.
9. Mykhas'kiv V. V., Khay O. M. Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence // Intern. J. Solids Structures. 2009. V. 46, N 3/4. P. 602–616.
10. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. Киев: Наук. думка, 1981.
11. Кит Г. С., Кунец Я. И., Михаськив В. В. Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 82–89.

*Поступила в редакцию 17/VIII 2012 г.,  
в окончательном варианте — 8/XI 2012 г.*

---