

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.2.08

КОМПЕНСАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ СИГНАЛА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЕГО ГАРМОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ*

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, А. В. Торгов

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск**E-mail: reznik@iae.nsk.su*

Рассматривается компенсация линейных искажений сигнала при его равномерной дискретизации, основанная на использовании рядов Фурье.

Введение. При прохождении сигнала через искажающий предфильтр спектр входного сигнала и спектр сигнала на выходе предфильтра связаны известным соотношением $\tilde{f}_h(\omega) = \tilde{h}(\omega)\tilde{f}(\omega)$, где $\tilde{f}_h(\omega)$ – спектр сигнала на выходе предфильтра с частотной характеристикой $\tilde{h}(\omega)$, $\tilde{f}(\omega)$ – спектр входного сигнала.

Очевидным, но не всегда реализуемым алгоритмом компенсации искажений является пропускание выходного сигнала предфильтра через компенсирующий фильтр с частотной характеристикой $\tilde{w}(\omega) = 1/\tilde{h}(\omega)$. При равномерной дискретизации сигнала по времени простейшим вариантом применения этого соотношения будет его реализация на наборе частот ряда Фурье, содержащем конечное число слагаемых.

Далее рассматривается компенсация линейных искажений при использовании рассмотренного в [1] гармонического ряда с ортогональными базисными функциями $\cos\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta}2kt\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta}(2k-1)t\right)$ (Δ – шаг дискретизации сигнала по времени, $2N+1$ – число слагаемых гармонического ряда).

Отсчетные функции компенсирующего фильтра. Используя комплексную форму гармонического ряда, несложно показать, что при примене-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00653), Президиума Российской академии наук (программа № 14.1/2006 г.) и Президиума Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 3.9/2006 г.).

нии этого базиса оценка компенсированного сигнала выражается соотношением

$$f^*(t) = \sum_{n=-N}^N f_h(n\Delta)w(t, n\Delta). \quad (1)$$

Здесь $f_h(n\Delta)$ – искаженные предфильтром отсчеты искомого сигнала $f(t)$, а

$$w(t, n\Delta) = \frac{1}{2N+1} \left[\sum_{k=-N}^N \frac{\cos \omega_{2k} n\Delta}{\tilde{h}(\omega_{2k})} e^{-i\omega_{2k} t} + i \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{\sin \omega_{2k-1} n\Delta}{\tilde{h}(\omega_{2k-1})} e^{-i\omega_{2k-1} t} \right]$$

– отсчетная функция, у которой

$$\omega_{2k} = \pi 2k / (2N+1); \quad \omega_{2k-1} = \pi (2k-1) / (2N+1) \quad (2)$$

– частоты базисных функций.

Если представить предфильтр $\tilde{h}(\omega)$ в виде $\tilde{h}(\omega) = a_h(\omega) + i b_h(\omega)$, то отсчетная функция

$$w(t, n\Delta) = \frac{1}{2N+1} \left(\sum_{k=-N}^N \frac{\cos \omega_{2k} n\Delta (a_h(\omega_{2k}) \cos \omega_{2k} t - b_h(\omega_{2k}) \sin \omega_{2k} t)}{|\tilde{h}(\omega_{2k})|^2} + \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{\sin \omega_{2k-1} n\Delta (b_h(\omega_{2k-1}) \cos \omega_{2k-1} t + a_h(\omega_{2k-1}) \sin \omega_{2k-1} t)}{|\tilde{h}(\omega_{2k-1})|^2} \right). \quad (3)$$

Заметим, что при использовании базисных функций $\cos\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta} 2kt\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta} 2kt\right)$ соотношение (3) приводится к виду

$$w(t, n\Delta) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \frac{a_h(\omega_{2k}) \cos \omega_{2k} (t - n\Delta) - b_h(\omega_{2k}) \sin \omega_{2k} (t - n\Delta)}{|\tilde{h}(\omega_{2k})|^2}. \quad (3a)$$

Если в формуле для оценки компенсированного сигнала (1) произвести операцию усреднения по индексу n , то получим эквивалентное соотношение

$$f^*(t) = \sum_{k=-N}^N \frac{a_f(\omega_{2k}) (a_h(\omega_{2k}) \cos \omega_{2k} t - b_h(\omega_{2k}) \sin \omega_{2k} t)}{|\tilde{h}(\omega_{2k})|^2} + \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{b_f(\omega_{2k-1}) (b_h(\omega_{2k-1}) \cos \omega_{2k-1} t + a_h(\omega_{2k-1}) \sin \omega_{2k-1} t)}{|\tilde{h}(\omega_{2k-1})|^2},$$

где величины $a_f(\omega_{2k})$ и $b_f(\omega_{2k-1})$ являются коэффициентами при базисных функциях на частотах ω_{2k} и ω_{2k-1} :

$$a_f(\omega_{2k}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f_h(n\Delta) \cos \omega_{2k} n\Delta,$$

$$b_f(\omega_{2k-1}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f_h(n\Delta) \sin \omega_{2k-1} n\Delta.$$

Дисперсия ошибки реконструкции сигнала. Рассмотрим дисперсию ошибки воспроизведения сигнала при использовании соотношения (1). Положим для простоты сигнал стационарным случайным процессом со спектральной плотностью $S_f(\omega)$. Тогда дисперсия ошибки реконструкции значения сигнала с абсциссой t имеет вид

$$\langle \varepsilon_t^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega) \left| e^{-i\omega t} - \tilde{h}(\omega) \sum_{n=-N}^N e^{-in\omega\Delta} w(t, n\Delta) \right|^2. \quad (4)$$

Если провести в этой формуле суммирование по индексу n , т. е. вычислить дискретное преобразование Фурье, то получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2(\omega) = & \left(\cos \omega t - a_h(\omega) \sum_{k=-N}^N \frac{a_h(\omega_{2k}) \cos \omega_{2k} t - b_h(\omega_{2k}) \sin \omega_{2k} t}{2|\tilde{h}(\omega_{2k})|^2} \times \right. \\ & \times (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_{2k}\Delta) + \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_{2k}\Delta)) - \\ & - b_h(\omega) \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{b_h(\omega_{2k-1}) \cos \omega_{2k-1} t + a_h(\omega_{2k-1}) \sin \omega_{2k-1} t}{2|\tilde{h}(\omega_{2k-1})|^2} \times \\ & \left. \times (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_{2k-1}\Delta) - \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_{2k-1}\Delta)) \right)^2 + \\ & + \left(\sin \omega t - a_h(\omega) \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{b_h(\omega_{2k-1}) \cos \omega_{2k-1} t + a_h(\omega_{2k-1}) \sin \omega_{2k-1} t}{2|\tilde{h}(\omega_{2k-1})|^2} \times \right. \\ & \times (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_{2k-1}\Delta) - \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_{2k-1}\Delta)) + \\ & \left. + b_h(\omega) \sum_{k=-N}^N \frac{a_h(\omega_{2k}) \cos \omega_{2k} t - b_h(\omega_{2k}) \sin \omega_{2k} t}{2|\tilde{h}(\omega_{2k})|^2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_{2k}\Delta) + \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_{2k}\Delta)) \Big)^2. \quad (5)$$

Здесь частоты ω_{2k} и ω_{2k-1} определяются соотношением (2), а функции

$$\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta \mp \omega_{2k}\Delta) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \Delta(\omega \mp \omega_{2k})}{(2N+1) \sin \frac{\Delta}{2} (\omega \mp \omega_{2k})},$$

$$\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta \mp \omega_{2k-1}\Delta) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \Delta(\omega \mp \omega_{2k-1})}{(2N+1) \sin \frac{\Delta}{2} (\omega \mp \omega_{2k-1})}$$

обладают очень важным свойством: они равны единице на частотах $\omega = \omega_{2k}$ и $\omega = \omega_{2k-1}$ и равны нулю на всех остальных частотах из (2). Если частотная характеристика предфильтра ограничена по модулю и не равна нулю в диапазоне частот сигнала с ограниченным спектром $|\omega| \leq \pi/\Delta$, то при возрастании длины фильтра $L = 2N + 1$ величина дисперсии ошибки уменьшается. В пределе при $L = 2N + 1 \rightarrow \infty$ дисперсия ошибки становится равной нулю.

Вычисление среднего по времени t значения дисперсии $\varepsilon_t^2(\omega)$ на интервале $-\frac{(2N+1)}{2}\Delta \leq t \leq \frac{(2N+1)}{2}\Delta$ дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\omega) = & 1 + \frac{|\tilde{h}(\omega)|^2}{4} \sum_{k=-2N}^{2N} \frac{1}{|\tilde{h}(\omega_k)|^2} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_k\Delta) + (-1)^k \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_k\Delta))^2 - \\ & - \frac{1}{2} a_h(\omega) \sum_{k=-2N}^{2N} \frac{a_h(\omega_k)}{|\tilde{h}(\omega_k)|^2} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_k\Delta) + (-1)^k \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_k\Delta)) \times \\ & \times (\varphi_f(\omega\Delta - \omega_k\Delta) + (-1)^k \varphi_f(\omega\Delta + \omega_k\Delta)) - \\ & - \frac{1}{2} b_h(\omega) \sum_{k=-2N}^{2N} \frac{b_h(\omega_k)}{|\tilde{h}(\omega_k)|^2} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_k\Delta) + (-1)^k \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_k\Delta)) \times \\ & \times (\varphi_f(\omega\Delta - \omega_k\Delta) + (-1)^{k+1} \varphi_f(\omega\Delta + \omega_k\Delta)), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\omega_k = \frac{\pi}{(2N+1)\Delta} k, \quad \varphi_f(\omega\Delta \mp \omega_k\Delta) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} (\omega\Delta \mp \omega_k\Delta)}{\frac{2N+1}{2} (\omega\Delta \mp \omega_k\Delta)}.$$

Из соотношения (6) следует, что при $b_h(\omega) = 0$ и $a_h(\omega) = 1$, т. е. при отсутствии предфильтра, средняя по времени дисперсия описания стационарного случайного сигнала задается тригонометрической теоремой отсчетов

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\omega) = & 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=-2N}^{2N} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_k \Delta) + (-1)^k \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_k \Delta))^2 - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=-2N}^{2N} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_k \Delta) + (-1)^k \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_k \Delta)) \times \\ & \times (\varphi_{\Gamma}(\omega\Delta - \omega_k \Delta) + (-1)^k \varphi_{\Gamma}(\omega\Delta + \omega_k \Delta)). \end{aligned}$$

Если рассматривать дисперсию ошибки только на исходном массиве $t = m\Delta$ ($m = -N, N$), то

$$\varepsilon_{m\Delta}^2(\omega) = \left| e^{-im\omega\Delta} - \tilde{h}(\omega) \sum_{n=-N}^N e^{-in\omega\Delta} w(m\Delta, n\Delta) \right|^2. \quad (7)$$

Среднее значение этой величины на отсчетах массива представляется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\omega) = & 1 + \frac{|\tilde{h}(\omega)|^2}{4} \sum_{k=-2N}^{2N} \frac{1}{|\tilde{h}(\omega_k)|^2} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_k \Delta) + (-1)^k \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_k \Delta))^2 - \\ & - \frac{1}{2} a_h(\omega) \sum_{k=-2N}^{2N} \frac{a_h(\omega_k)}{|\tilde{h}(\omega_k)|^2} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_k \Delta) + (-1)^k \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_k \Delta))^2 - \\ & - \frac{1}{2} b_h(\omega) \sum_{k=-2N}^{2N} \frac{b_h(\omega_k)}{|\tilde{h}(\omega_k)|^2} (\varphi_{\Sigma}^2(\omega\Delta - \omega_k \Delta) - \varphi_{\Sigma}^2(\omega\Delta + \omega_k \Delta)). \end{aligned}$$

Если в этом случае предфильтр отсутствует, то величина дисперсии равна нулю, так как

$$\sum_{k=-2N}^{2N} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_k \Delta) + (-1)^k \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_k \Delta))^2 = 4.$$

Компенсационный фильтр с конечной импульсной характеристикой. В предыдущем разделе рассматривалась дисперсия ошибки реконструкции сигнала и ее среднее значение на интервале $-\frac{(2N+1)}{2}\Delta \leq t \leq \frac{(2N+1)}{2}\Delta$. При дискретном представлении сигнала и значении параметра m , равном нулю, величина этой дисперсии минимальна:

$$\langle \varepsilon_0^2(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega) \left| 1 - \tilde{h}(\omega) \sum_{n=-N}^N e^{-in\omega\Delta} w(0, n\Delta) \right|^2. \quad (8)$$

Соотношения (4), (7) и (8) позволяют определить оптимальные параметры цифрового фильтра при априори известной спектральной плотности сигнала $S_f(\omega)$.

В соотношении (8)

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2(\omega) = & \left(1 - a_h(\omega) \sum_{k=-N}^N \frac{a_h(\omega_{2k})}{2|\tilde{h}(\omega_{2k})|^2} (\varphi_\Sigma(\omega\Delta - \omega_{2k}\Delta) + \varphi_\Sigma(\omega\Delta + \omega_{2k}\Delta)) - \right. \\ & \left. - b_h(\omega) \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{b_h(\omega_{2k-1})}{2|\tilde{h}(\omega_{2k-1})|^2} (\varphi_\Sigma(\omega\Delta - \omega_{2k-1}\Delta) - \varphi_\Sigma(\omega\Delta + \omega_{2k-1}\Delta)) \right)^2 + \\ & + \left(a_h(\omega) \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{b_h(\omega_{2k-1})}{2|\tilde{h}(\omega_{2k-1})|^2} (\varphi_\Sigma(\omega\Delta - \omega_{2k-1}\Delta) - \varphi_\Sigma(\omega\Delta + \omega_{2k-1}\Delta)) - \right. \\ & \left. - b_h(\omega) \sum_{k=-N}^N \frac{a_h(\omega_{2k})}{2|\tilde{h}(\omega_{2k})|^2} (\varphi_\Sigma(\omega\Delta - \omega_{2k}\Delta) + \varphi_\Sigma(\omega\Delta + \omega_{2k}\Delta)) \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Формула (9) описывает спектральный состав дисперсии ошибки при общем виде частотной характеристики предфильтра $\tilde{h}(\omega) = a_h(\omega) + ib_h(\omega)$.

Если характеристика предфильтра – четная функция частоты ω ($b_h(\omega) = 0$), то, как следует из (9),

$$\varepsilon_0^2(\omega) = \left(1 - a_h(\omega) \sum_{k=-N}^N \frac{\varphi_\Sigma(\omega\Delta - \omega_{2k}\Delta)}{a_h(\omega_{2k})} \right)^2, \quad (10)$$

а при $a_h(\omega) = 0$

$$\varepsilon_{\Delta 0}^2(\omega) = \left(1 - b_h(\omega) \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{\varphi_\Sigma(\omega\Delta - \omega_{2k-1}\Delta)}{b_h(\omega_{2k-1})} \right)^2. \quad (11)$$

В этих случаях второе слагаемое в формуле (9) равно нулю.

Из формулы (3а) для отсчетной функции компенсирующего фильтра следует, что соотношению (10) соответствует отсчетная функция

$$w(0, n\Delta) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N C_{ak} \cos \omega_{2k} \Delta n. \quad (12)$$

Для формулы (11) отсчетная функция

$$w(0, n\Delta) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-(N-1)}^N C_{bk} \sin \omega_{2k-1} \Delta n. \quad (13)$$

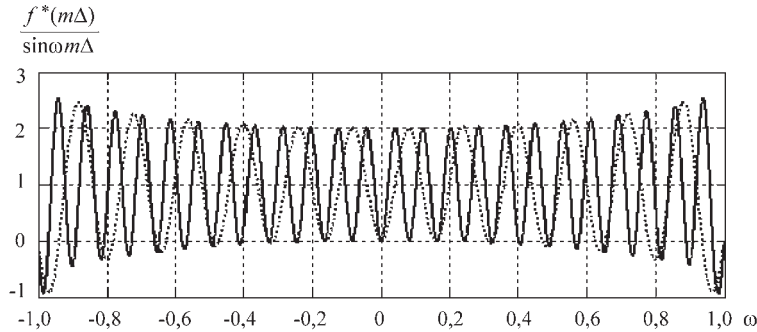


Рис. 1. Восстановление периодического сигнала по его производной с использованием соотношения (13): $2N + 1 = 25$ (пунктирная кривая), $2N + 1 = 49$ (сплошная кривая)

При этом константы $C_{ak} = 1/a_h(\omega_{2k})$, $C_{bk} = 1/b_h(\omega_{2k-1})$.

Моделирование алгоритмов обработки сигнала осуществлялось для тригонометрического сигнала в соответствии с соотношением (13) и случайного сигнала в соответствии с соотношением (12).

1. В качестве примера интегратора рассмотрим восстановление периодического сигнала по его производной, используя выражение (13). Если компенсируемый сигнал $f^{(1)}((n+m)\Delta) = \omega \cos \omega \Delta (n+m)$, то применение к нему (13) дает следующий результат ($C_{b0} = 0$):

$$f^*(m\Delta) = \sin \omega m \Delta \sum_{k=1}^N \frac{\omega}{\omega_{2k-1}} (\varphi_{\Sigma}(\omega \Delta - \omega_{2k-1} \Delta) - \varphi_{\Sigma}(\omega \Delta + \omega_{2k-1} \Delta)). \quad (14)$$

Как следует из данного соотношения, на частотах ω_{2k-1} сигнал восстанавливается точно. О качестве его восстановления на иных частотах можно судить по поведению суммы из (14) в зависимости от длины фильтра $L = 2N + 1$ (рис. 1). Незатухающие колебания этой суммы в середине диапазона частот объясняются равенством нулю частотной характеристики дифференциатора.

При использовании разложения $\left(\cos \frac{\pi}{(2N+1)\Delta} 2kt, \sin \frac{\pi}{(2N+1)\Delta} 2kt \right)$ колеба-

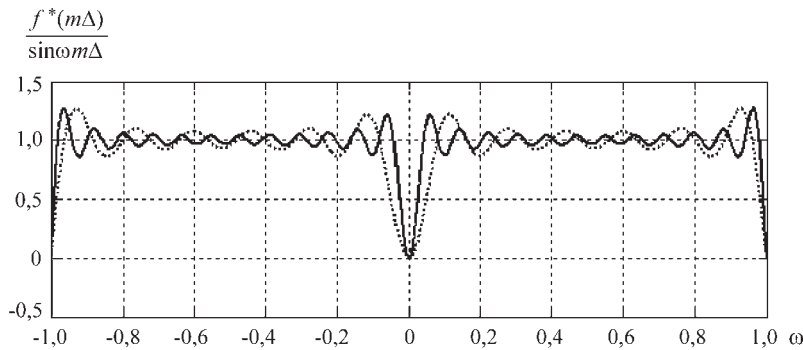


Рис. 2. Восстановление периодического сигнала по его производной с использованием соотношения (13) после замены ω_{2k-1} величиной ω_{2k} : $2N + 1 = 25$ (пунктирная кривая), $2N + 1 = 49$ (сплошная кривая)

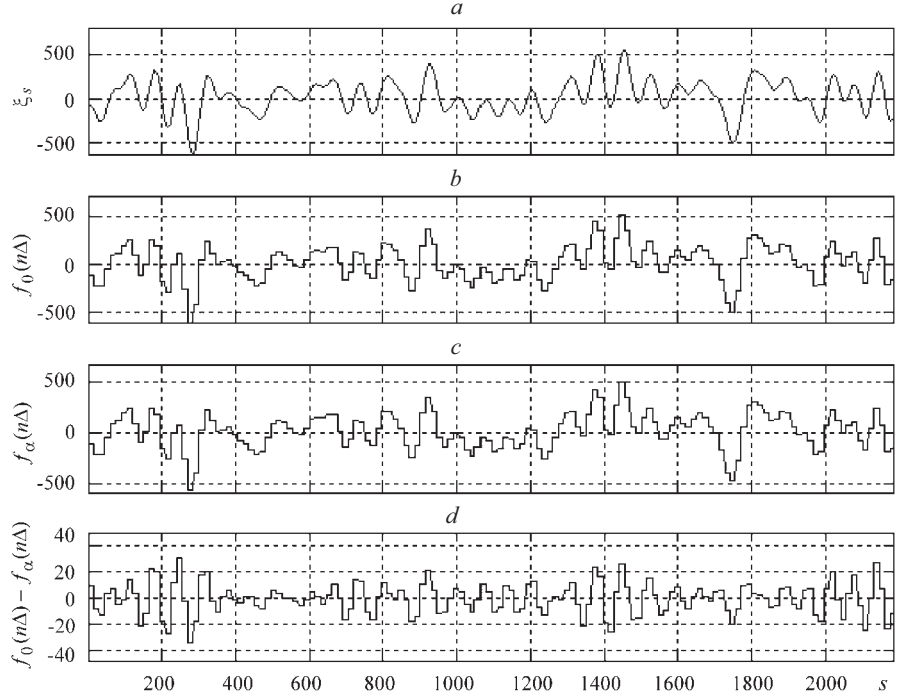


Рис. 3. Моделирование сигналов случайной структуры: фрагмент случайного сигнала, пропущенного через предфильтр ($2M + 1 = 625$, $r = 12$) (a); фрагмент желаемого сигнала (b); фрагмент наблюдаемого сигнала (c); разность между желаемым и наблюдаемым сигналами (d)

ния соответствующей суммы (вместо частот ω_{2k-1} в формуле (14) используются частоты ω_{2k}) уменьшаются (рис. 2), но тем не менее затухают очень медленно.

2. Моделирование сигнала случайной структуры осуществлялось следующим образом. Последовательность независимых случайных величин $\{\eta_s\}$ превращалась в последовательность зависимых величин $\{\xi_s\}$ после ее пропуска через фильтр нижних частот с весовой функцией, определяемой формулой [2]

$$w(m) = \frac{\sin \frac{2\pi r m}{2M+1} \cdot \cos \frac{\pi m}{2M+1}}{(2M+1) \sin \frac{\pi m}{2M+1}}, \quad \xi_s = \sum_{k=-N}^N \eta_{s+k} w(k).$$

Затем из последовательности $\{\xi_s\}$ формировались две последовательности: первая из них соответствовала «желаемому» сигналу

$$f_0(n\Delta) = \frac{1}{2m+1} \sum_{s=n(2m+1)-m}^{n(2m+1)+m} \xi_s,$$

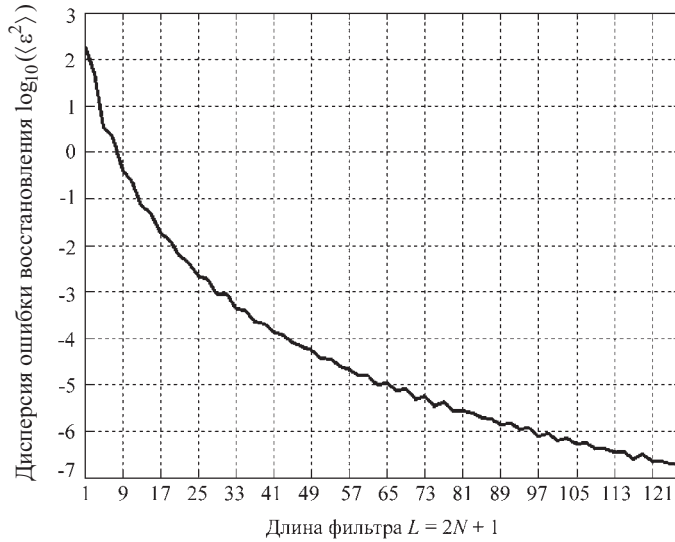


Рис. 4. Логарифмическая зависимость среднего квадрата разности между желаемым и реконструированным сигналами ($\alpha = 0,267$)

а вторая соответствовала «наблюдаемому» сигналу

$$f_{\alpha}(n\Delta) = \frac{1}{2p+1} \sum_{s=n(2m+1)-p}^{n(2m+1)+p} \xi_s.$$

Далее по значениям последовательности $\{f_{\alpha}(n\Delta)\}$ вычисляются значения реконструированной последовательности $\{f_0^*(n\Delta)\}$. При этом очевидно соотношение для коэффициентов C_{ak} :

$$C_{ak} = 1/a_h(\omega_{2k}) = \frac{2p+1}{2m+1} \frac{\sin(\omega_{2k} \Delta/2)}{\sin\left(\frac{2p+1}{2m+1} \omega_{2k} \Delta/2\right)}, \quad \frac{2p+1}{2m+1} = (1+2\alpha).$$

Последовательности $\{\xi_s\}$, $\{f_0(n\Delta)\}$, $\{f_{\alpha}(n\Delta)\}$ и разность между последовательностями $\{f_0(n\Delta)\}$ и $\{f_{\alpha}(n\Delta)\}$ изображены на рис. 3. Из рис. 4 следует, что с увеличением длины «обратного» фильтра средний квадрат разности убывает.

Заключение. В предлагаемой работе проанализированы характеристики фильтров, основанных на рядах Фурье и компенсирующих линейные искажения сигнала при его равномерной дискретизации. Получены соотношения для отсчетных функций и формулы для дисперсии ошибки при обработке стационарного случайного сигнала. Выполнено моделирование, подтверждающее аналитические результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Бондаренко Ю. В.** Повышение точности синусно-косинусного преобразования при аппроксимации и интерполяции сигнала // Автометрия. 2008. **44**, № 3. С. 41.
2. **Ефимов В. М., Торгов А. В.** Определение параметров фильтра с конечно-импульсной характеристикой при ограничениях на значения его частотной характеристики // Автометрия. 2000. № 4. С. 3.

Поступила в редакцию 18 сентября 2007 г.
