НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов, С. И. Худяев

(Москва)

Получено решение задач о безнапорном течении в плоской трубе, в кольцевом зазоре между двумя бесконечными цилиндрами (осевое) и между двумя вращающимися цилиндрами с учетом диссипации энергии и зависимости вязкости от температуры, даваемой соотношением Рейнольдса

$$\mu = \mu_0 \exp(-\beta T) \qquad (\mu_0,\ \beta = \mathrm{const})$$

Рассмотрены два типа граничных условий: а) на обеих поверхностях заданы постоянные (в общем случае неравные) температуры; б) на одной поверхности задана постоянная температура, а через другую отсутствует теплообмен с окружающей средой.

Исследованию неизотермического стационарного течения жидкости в простейших областях с учетом диссипации энергии и зависимости вязкости от температуры посвящен ряд работ [1-11]

$$\mu = \mu_m \frac{1}{1 + \alpha^2 (T - T_m)}$$

В большинстве работ [1-6] для зависимости вязкости от температуры взят гиперболический закон.

При такой зависимости уравнение теплопроводности является линейным относительно температуры, и интегрирование его не представляет трудности.

В работах [7, 8] рассматривается течение Куэтта в предположении, что вязкость связана с температурой соотношением Рейнольдса

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta T} \qquad (\mu_0, \beta = \mathrm{const}) \tag{0.1}$$

Исследование течения Куэтта в случае зависимости $\mu(T)$ общего вида проводилось в работе [9].

В работе [10] рассматривается напорное течение в плоском канале и в круглой трубе при зависимости $\mu(T)$ общего вида. В частности было показано, что при достаточно сильной зависимости вязкости от температуры возможно существование критического значения градиента давления. При градиентах давления, меньших критического, существует стационарный режим течения, а при больших — стационарный режим невозможен.

В работе [11], выполненной авторами настоящей статьи, изучалось течение Пуазейля в круглой трубе при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры. Эту термогидродинамическую задачу удалось свести к задаче о тепловом взрыве в цилиндрической области, откуда вытекало существование критического режима. Были получены критические условия гидродинамического теплового «взрыва», поля температур и скоростей.

Ниже исследуются течение Куэтта, безнапорное осевое течение в кольцевом зазоре и течение между двумя вращающимися цилиндрами при наличии диссипации энергии и зависимости вязкости от температуры, даваемой соотношением Рейнольдса (0.1). Решение задачи о течении Куэтта выгодно отличается от решения [8], так как постоянные интегрирования находятся элементарно, в то время как нахождение их в работе [8] сопряжено с большими трудностями. На базе этой задачи получено решение двух остальных упомянутых выше задач.

§ 1. Течение между двумя параллельными пластинами. Пусть слой вязкой жидкости находится между двумя бесконечными плоскими стенками $y = -h$ и $y = h$, верхняя из которых движется с постоянной скоростью V в положительном направлении оси x. На стенках заданы постоянные температуры T_0 и T_1 ($T_0 > T_1$).

Запишем систему уравнений движения и теплопроводности в форме

$$\frac{d}{d\eta}\left(e^{-\theta}\frac{dv}{d\eta}\right)=0, \qquad \frac{d^2\theta}{d\eta^2}+ke^{-\theta}\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2=0 \tag{1.1}$$

где введены следующие обозначения безразмерных величин

$$v=\frac{v_x}{V}, \qquad \theta=\beta(T-T_1), \qquad \eta=\frac{y}{h}, \qquad k=\frac{\beta\mu_0V^2}{\lambda J}\exp(-\beta T_1) \tag{1.2}$$

Здесь J — механический эквивалент тепла, λ — коэффициент теплопроводности жидкости. Граничные условия имеют вид (1.3)

$$v=1,\quad \theta=0 \quad \text{при } \eta=1, \qquad v=0,\quad \theta=\theta_0 \quad \text{при } \eta=-1, \quad \theta_0=\beta(T_0-T_1)$$

Из первого уравнения системы (1.1) имеем

$$e^{-\theta}dv\,/\,d\eta=c \tag{1.4}$$

где c — постоянная интегрирования. Исключая производную скорости из (1.1) и (1.4), получим

$$d^2\theta\,/\,d\eta^2+kc^2e^{\theta}=0 \tag{1.5}$$

Это уравнение встречается при рассмотрении задачи о тепловом взрыве в плоском слое [12]. Решение его записывается в форме

$$\theta=\ln\frac{a}{\operatorname{ch}^2(b\pm\sqrt{{}^1/_2akc^2}\,\eta)} \tag{1.6}$$

где a и b — постоянные интегрирования. В силу четности гиперболического косинуса и наличия двух знаков перед корнем можно считать $b>0$. Тогда в формуле (1.6) перед корнем следует брать знак плюс, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям (1.3). С учетом этого перепишем формулу (1.6) в виде

$$\theta=\ln a-2\ln\operatorname{ch}(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2}\,\eta) \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.4), получим уравнение для определения скорости

$$\frac{dv}{d\eta}=\frac{ac}{\operatorname{ch}^2(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2}\,\eta)}$$

Интегрируя это уравнение и удовлетворяя первому граничному условию (1.3), получим

$$v=1-\sqrt{2a\,/\,k}\,[\operatorname{th}(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2})-\operatorname{th}(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2}\,\eta)] \tag{1.8}$$

В (1.7) и (1.8) удовлетворим остальным трем граничным условиям (1.3)

$$\begin{gathered}\operatorname{ch}^2(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2})=a, \qquad \operatorname{ch}^2(b-\sqrt{{}^1/_2akc^2})=ae^{-\theta_0}\\ \operatorname{th}(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2})-\operatorname{th}(b-\sqrt{{}^1/_2akc^2})=\sqrt{{}^1/_2k\,/\,a}\end{gathered} \tag{1.9}$$

Из этой системы трех трансцендентных уравнений определяются постоянные интегрирования a, b, c. Из первых двух уравнений (1.9) имеем

$$\operatorname{th}^2(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2})=(a-1)\,/\,a, \quad \operatorname{th}^2(b-\sqrt{{}^1/_2akc^2})=(ae^{-\theta_0}-1)\,/\,ae^{-\theta_0}$$

Учитывая эти соотношения, из третьего уравнения (1.9) получаем

$$a=1+{}^1/_2k^{-1}({}^1/_2k+e^{\theta_0}-1)^2 \tag{1.10}$$

Из (1.10) видно, что при изменении k от 0 до ∞ величина a монотонно убывает до своего минимального значения $a_0=\exp\theta_0$, достигаемого при $k_0=2(\exp\theta_0-1)$, затем монотонно возрастает до ∞.

Из двух первых уравнений (1.9) имеем

$$b+\sqrt{{}^1/{}_2akc^2}=\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}),$$
$$b-\sqrt{{}^1/{}_2akc^2}=\pm\ln(\sqrt{ae^{-\theta_0}}+\sqrt{ae^{-\theta_0}-1}) \qquad (1.11)$$

Во втором уравнении при переходе k через k_0 логарифм меняет свой знак и обращается в нуль при $k=k_0$.

Разрешая систему (1.11), получим

$$b={}^1/{}_2[\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})\pm\ln(\sqrt{ae^{-\theta_0}}+\sqrt{ae^{-\theta_0}-1})] \qquad (1.12)$$
$$c={}^1/{}_2\sqrt{2/ak}\,[\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})\mp\ln(\sqrt{ae^{-\theta_0}}+\sqrt{ae^{-\theta_0}-1})] \qquad (1.13)$$

Верхний знак берется при $k<k_0$, нижний — при $k>k_0$. Таким образом, все константы интегрирования определены. Выпишем выражения для констант для двух частных случаев.

а) Обе пластины имеют одинаковую температуру, $\theta_0=0$

$$a=1+k/8,\qquad b=0,\qquad c=\sqrt{2/ak}\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}) \qquad (1.14)$$

б) Нижняя пластина теплоизолирована $d\theta/d\eta=0$ при $\eta=-1$.

Удовлетворяя (1.7) этому граничному условию, получим

$$b-\sqrt{{}^1/{}_2akc^2}=0$$

Из (1.11) видно, что это условие удовлетворяется при $\theta_0=\ln a$. Константы при этом выражаются формулами

$$a=1+{}^1/{}_2k,\quad b={}^1/{}_2\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}),\quad c={}^1/{}_2\sqrt{2/ak}\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}) \qquad (1.15)$$

В обоих случаях максимальная температура $\theta=\ln a$. В первом случае она находится на средней плоскости, во втором — на нижней теплоизолированной плоскости.

При $\theta_0=0$, переходя в формулах (1.7) и (1.8) к пределу при $k\to 0$ $(\lambda\to\infty)$, получим

$$\theta\equiv 0,\quad v={}^1/{}_2(1+\eta) \qquad (1.16)$$

т. е. решение задачи Куэтта в изотермической постановке.

§ 2. Осевое течение в кольцевом зазоре между двумя цилиндрами. Пусть вязкая жидкость находится между двумя соосными бесконечными цилиндрами, внутренний из которых движется в положительном направлении оси z с постоянной скоростью V, а внешний неподвижен. Радиус и температура внутреннего цилиндра R_0 и T_0; для внешнего цилиндра имеем соответственно R_1 и T_1. Систему уравнений движения и теплопроводности в безразмерной форме можно записать так:

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\theta}\xi\frac{dv}{d\xi}\right)=0,\quad \frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}+ke^{-\theta}\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2=0,\quad \left(v=\frac{v_z}{V},\quad \xi=\frac{r}{R_1}\right) \qquad (2.1)$$

где θ и k такие же, как и в первой задаче.

Граничные условия имеют вид

$$v=0,\quad \theta=0 \text{ при } \xi=1,\qquad v=1,\quad \theta=\theta_0 \text{ при } \xi=d\quad (d=R_0/R_1) \qquad (2.2)$$

Эту задачу сведем к предыдущей. Из первого уравнения (2.1) имеем

$$e^{-\theta}\xi dv/d\xi=c_1 \qquad (2.3)$$

При помощи (2.3) преобразуем второе уравнение (2.1)

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}+\frac{kc_1^2}{\xi^2}e^{\theta}=0. \qquad (2.4)$$

Сделаем замену

$$\eta = 1 - 2\ln\xi / \ln d, w = 1 - v;$$

Уравнения (2.3) и (2.4) примут вид

$$e^{-\theta}\frac{dw}{d\eta} = c, \qquad \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + kc^2e^{\theta} = 0 \qquad \left(c = -\frac{c_1\ln d}{2}\right) \tag{2.5}$$

Граничные условия (2.2) при этом запишутся так:

$$w = 1, \quad \theta = 0 \text{ при } \eta = 1, \qquad w = 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ при } \eta = -1 \tag{2.6}$$

Преобразованные уравнения (2.5) и граничные условия (2.6) полностью совпадают с соответствующими уравнениями (1.4), (1.5) и граничными условиями (1.3) в задаче о куэттовском течении.

Теперь нетрудно написать выражения для профилей температур и скоростей для задачи об осевом безнапорном течении в кольцевом зазоре

$$\theta = \ln a - 2\ln\operatorname{ch}(b - c_1\sqrt{{}^1/{}_2ak}\ln\sqrt{d}/\xi) \tag{2.7}$$

$$v = \sqrt{2a/k}\,[\operatorname{th}(b - {}^1/{}_2c_1\ln d\sqrt{{}^1/{}_2ak}) - \operatorname{th}(b - c_1\sqrt{{}^1/{}_2ak}\ln\sqrt{d}/\xi)] \tag{2.8}$$

Постоянные a и b определяются по формулам (1.10) и (1.12), а $c_1 = -2c / \ln d$, где c вычисляется по формуле (1.13).

Частные случаи.

а) Оба цилиндра имеют одинаковую температуру, $\theta_0 = 0$. Постоянные a, b и c вычисляются согласно (1.14). Максимальная температура, равная $\ln a$, достигается при $\eta = 0$ или $\xi = \sqrt{d}$.

б) Внутренний цилиндр теплоизолирован $d\theta / d\xi = 0$ при $\xi = d$. Постоянные a, b, c вычисляются по формулам (1.15).

При $\theta_0 = 0$ в пределе при $k \to 0$, согласно (1.16), имеем $\theta \equiv 0$, $w = {}^1/{}_2(1 + \eta)$, или $\theta \equiv 0$, $v = \ln\xi / \ln d$. Последнее после приведения к одинаковым переменным совпадает с решением соответствующей задачи в изотермической постановке [1].

§ 3. Течение между двумя вращающимися цилиндрами. Пусть вязкая жидкость находится между двумя соосными бесконечными цилиндрами, внутренний из которых неподвижен, а внешний вращается в сторону увеличения угла φ с постоянной угловой скоростью Ω. Радиусы и температуры этих цилиндров соответственно R_0, R_1 и T_0, T_1.

Задача в такой постановке приложима к вискозиметрии для учета разогрева массы от внутреннего трения, что особенно важно при измерении вязкости сильно вязких жидкостей, где неучет разогрева может привести к существенным ошибкам. Для случая гиперболической зависимости вязкости от температуры этот вопрос изучался в работе [3].

Движение жидкости описывается системой уравнений, которую в безразмерной форме можно записать так:

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\theta}\xi^3\frac{d\omega'}{d\xi}\right) = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + ke^{-\theta}\left(\xi\frac{d\omega'}{d\xi}\right)^2 = 0, \quad \left(\omega' = \frac{\omega}{\Omega}\right) \tag{3.1}$$

Здесь ξ, θ и k такие же, как и в предыдущих случаях (в выражении для k величина $V = \Omega R_1$).

Граничные условия

$$\omega' = 1, \quad \theta = 0 \text{ при } \xi = 1, \qquad \omega' = 0, \theta = \theta_0 \text{ при } \xi = d \ (d = R_0/R_1) \tag{3.2}$$

Из первого уравнения (3.1) имеем

$$e^{-\theta}\xi^3\frac{d\omega'}{d\xi} = c_1 \tag{3.3}$$

Исключая производную угловой скорости из (3.1) при помощи (3.3), получим

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \frac{kc_1^2}{\xi^4}e^{\theta} = 0 \qquad (3.4)$$

Сделав замену

$$\theta = u + 2\ln\xi, \qquad \eta = 1 - 2\ln\xi / \ln d \qquad (3.5)$$

уравнения (3.3) и (3.4) можно записать в виде

$$e^{-u}\frac{d\omega'}{d\eta} = c, \qquad \frac{d^2u}{d\eta^2} + kc^2e^u = 0 \qquad \left(c = -\frac{c_1\ln d}{2}\right) \qquad (3.6)$$

Граничные условия (3.2) при этом примут вид

$$\omega' = 1, \quad u = 0 \quad \text{при } \eta = 1, \qquad \omega' = 0, \quad u = \theta_0 - 2\ln d \quad \text{при } \eta = -1 \qquad (3.7)$$

Таким образом, снова приходим к задаче, рассмотренной в первом параграфе. Теперь можно выписать окончательные выражения для профилей температур и угловых скоростей для задачи течения жидкости между двумя вращающимися цилиндрами

$$\theta = \ln a\xi^2 - 2\ln\operatorname{ch}\left(b - c_1\sqrt{{}^1/{}_2ak}\,\ln\sqrt{d}/\xi\right) \qquad (3.8)$$

$$\omega' = 1 - \sqrt{2a/k}\left[\operatorname{th}\left(b - c_1{}^1/{}_2\ln d\sqrt{{}^1/{}_2ak}\right) - \operatorname{th}\left(b - c_1\sqrt{{}^1/{}_2ak}\,\ln\sqrt{d}/\xi\right)\right] \qquad (3.9)$$

Постоянные интегрирования a, b, c_1, согласно (1.10), (1.12), (1.13), (3.5) и (3.6), записываются так:

$$a = 1 + {}^1/{}_2k^{-1}\left({}^1/{}_2k + e^{\theta_0}/d^2 - 1\right)^2$$

$$b = {}^1/{}_2\left[\ln\left(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}\right) \pm \ln\left(\sqrt{ad^2e^{-\theta_0}} + \sqrt{ad^2e^{-\theta_0} - 1}\right)\right] \qquad (3.10)$$

$$c_1 = -\frac{1}{\ln d}\sqrt{\frac{2}{ak}}\left[\ln\left(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}\right) + \ln\left(\sqrt{ad^2e^{-\theta_0}} + \sqrt{ad^2e^{-\theta_0} - 1}\right)\right]$$

Верхний знак следует брать, если $k < k_0$, нижний — если $k > k_0$. В рассматриваемой задаче

$$k_0 = 2\left(\frac{1}{d^2}e^{\theta_0} - 1\right)$$

Случай отсутствия теплообмена с одним из цилиндров здесь требует особого рассмотрения. В этой задаче не удается избавиться от трансцендентности системы, из которой определяются постоянные интегрирования.

Если температура θ_0 на поверхности внутреннего цилиндра известна, то постоянные интегрирования определяются по формулам (3.10).

Но в случае отсутствия теплообмена с внутренним цилиндром температура θ_0 сама является искомой величиной. Для ее определения имеем граничное условие $d\theta / d\xi = 0$ при $\xi = d$. Удовлетворяя этому условию (3.8), получим

$$\operatorname{th}\left(b + {}^1/{}_2c_1\ln d\sqrt{2/ak}\right) = c_1^{-1}\sqrt{2/ak} \qquad (3.11)$$

Так как, по предположению, вращение происходит в сторону увеличения угла φ, то, согласно (3.3), $c_1 > 0$ и, следовательно, правая часть (3.13) больше нуля. Отсюда вытекает положительность аргумента гиперболического тангенса. Обращаясь ко второму уравнению (1.11), заключаем, что перед логарифмом следует брать знак плюс. Поэтому в формулах (3.10) необходимо брать верхний знак.