

6. Симоненко И. Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // *Мат. сб.*— 1972.— Т. 87 (129), № 2.
7. Заварыкин М. П., Зорин С. В., Путин Г. Ф. О термоконвективной неустойчивости в вибрационном поле // *ДАН СССР.*— 1988.— Т. 299, № 2.
8. Katto Y., Masuoka T. Criterion for onset of convective flow in a fluid in a porous medium // *Intern. J. Heat Mass Transfer.*— 1967.— V. 10, N 3.
9. Зеньковская С. М. О влиянии вибрации на возникновение конвекции.— М., 1978.— Деп. в ВИНТИ 11.07.1978, № 2437-78.
10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Вибрационная тепловая конвекция в невесомости // *Гидромеханика и процессы переноса в невесомости.*— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983.
11. Браверман Л. М. О механическом квазиравновесии плоского слоя неизотермической жидкости в высокочастотном вибрационном поле // *Динамика вязкой жидкости.*— Свердловск: УРО АН СССР, 1987.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 18/IV 1990 г.,
в окончательном варианте — 20/VIII 1991 г.

УДК 536.33

А. Л. Бурка, В. В. Дудкин

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В ПОРИСТО-ПРОНИЦАЕМОМ СЛОЕ ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЫ

Рассматривается нестационарная задача радиационно-кондуктивного теплопереноса в плоском пористо-проницаемом слое серой среды. В одномерном приближении краевая задача имеет вид [1]

$$(1) \quad (1 - m) \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + m \rho_f c_f v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad t > 0;$$

$$(2) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = (\alpha_1 + m \rho_f c_f v) (T - T_1) + \varepsilon_1 \sigma (T^4 - T_1^4), \quad x = x_0;$$

$$(3) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = (\alpha_2 + m \rho_f c_f v) (T_2 - T) + \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T^4), \quad x = x_1;$$

$$(4) \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in [x_0, x_1],$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} = & 2\kappa \sigma n^2 \left\{ 2T^4(x, t) - T^4(x_0, t) K_2(\kappa x) - T^4(x_1, t) K_2(\kappa(x_1 - x)) - \right. \\ & \left. - \kappa \int_{x_0}^{x_1} T^4(z, t) K_1(\kappa|x - z|) dz \right\}; \\ K_j(x) = & \int_0^1 z^{j-2} \exp\left(-\frac{x}{z}\right) dz; \end{aligned}$$

m — пористость материала; ρ , ρ_f , c , c_f — плотность и теплоемкость материала и хладагента; λ — теплопроводность материала с учетом пористости; α_1 , α_2 , ε_1 , ε_2 — коэффициенты поверхностной теплоотдачи и степени черноты для нагреваемой и охлаждаемой сторон соответственно; v — скорость переноса хладагента; n — показатель преломления; κ — коэффициент поглощения материала.

Предполагая, что массовый расход хладагента $g = \rho_f v$ постоянный, а зависимость c_f от температуры материала можно пренебречь, безразмеривание краевой задачи (1)–(4) проведем следующим образом:

$$\theta = T/T_*, \quad \omega_1 = T_1/T_*, \quad \omega_2 = T_2/T_*, \quad \theta_0 = T_0/T_*, \quad \bar{c} = c/c_*,$$

$$\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_*, \quad \tau = t/t_*, \quad x = L\xi + x_0, \quad L = x_1 - x_0, \quad \xi \in [0, 1].$$

Здесь T_* , t_* — характерные температура и время; c_* , λ_* — теплоемкость и теплопроводность материала.

Вводя обозначения

$$\omega = (1 - m) \rho c_* L^2 / (t_* \lambda_*), \text{ Pe} = m c_f g L / \lambda_*,$$

$$N_{U_i} = c_i L / \lambda_*, L_0 = L \kappa, S_k = \sigma T_*^3 L / \lambda_*, i = 1, 2,$$

опуская черточки над безразмерными переменными \bar{c} , $\bar{\lambda}$, получаем представление краевой задачи (1)–(4):

$$(5) \quad \omega c \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \text{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) - S_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \tau > 0, \xi \in [0, 1];$$

$$(6) \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = (N_{U_1} + \text{Pe})(\theta - \omega_1) + \varepsilon_1 S_k (\theta^4 - \omega_1), \xi = 0;$$

$$(7) \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -(N_{U_1} + \text{Pe})(\theta - \omega_2) + \varepsilon_2 S_k (\omega_2^4 - \theta^4), \xi = 1;$$

$$(8) \quad \theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi).$$

При этом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 2L_0 n^2 \left\{ 2\theta^4(\xi, \tau) - K_2(L_0 \xi + x_0) \theta^4(0, \tau) - K_2(L_0(1 - \xi)) \theta^4(1, \tau) - L_0 \int_0^1 \theta^4(z, \tau) K_1(L_0 |\xi - z|) dz \right\}.$$

Рассмотрим процедуру численного решения краевой задачи (5)–(8) методом конечно-элементной коллокации [2]. Разобьем одномерную расчетную область $\xi \in [0, 1]$ на l конечных трехузловых элементов, тогда $l_1 = 2l + 1$ — число узлов в расчетной области.

Разбив расчетную область на $l_1 - 1$ подынтервалов и полагая

$$z = \Delta z(\tau + i - 1), \Delta z = 1/(l_1 - 1), \quad i = 1, 2, \dots, l_1 - 1,$$

имеем

$$K_1(\xi) = \Delta z \sum_{i=1}^{l_1} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\xi}{z}\right) \frac{d\tau}{z}, \quad K_2(\xi) = \Delta z \sum_{i=1}^{l_1} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\xi}{z}\right) d\tau.$$

Вводя замену переменных $J = 2\tau - 1$, $J \in [-1, 1]$, получаем окончательно аппроксимацию для экспоненциальных интегралов

$$K_1(\xi) = \frac{\Delta z}{2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^r \gamma_j \exp\left(-\frac{\xi}{z_j}\right) \Big|_{z_j},$$

$$K_2(\xi) = \frac{\Delta z}{2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^r \gamma_j \exp\left(-\frac{\xi}{z_j}\right).$$

Здесь γ_j — веса; z_j — узлы квадратурной формулы Гаусса: $z_j = \Delta z(i - 1 + (J_j + 1)/2)$; r — ее порядок. Для аппроксимации интегрального члена в (6) $\int_0^1 \theta^4(\eta, \tau) d\tau$ воспользуемся конечно-элементным представлением, полагая на конечном элементе

$$\theta(\eta, \tau) = \theta_\mu(\tau) N^\mu(\eta), \quad \mu = 1, 2, 3$$

(по индексу μ подразумевается суммирование, θ_μ — узловые значения θ , N^μ — базисные функции конечного элемента).

Тогда

$$\theta(\eta, \tau) = \sum_{\mu=1}^3 \{\theta_\mu(\tau) N^\mu(\eta)\}^4.$$

Таблица 1

α	β	γ	δ	μ	α	β	γ	δ	μ
4	0	0	1	1	1	1	2	12	9
0	4	0	1	2	1	1	0	4	10
0	0	4	1	3	3	3	0	4	11
2	2	0	6	4	1	0	1	4	12
2	0	2	6	5	3	0	3	4	13
2	2	2	6	6	0	3	1	4	14
0	1	1	12	7	0	1	3	4	15
2	2	1	12	8					

Вводя обозначение

$$I_{\mu}(\xi) = \delta \int_0^1 (N^1)^{\alpha} (N^2)^{\beta} (N^3)^{\gamma} K_1(L_0 |\xi - \eta|) d\eta,$$

где индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ определяются из табл. 1, получаем

$$I(\xi) = \sum_{\mu=1}^l I_{\mu}(\xi) \theta_1^{\alpha} \theta_2^{\beta} \theta_3^{\gamma}.$$

Применяя к уравнениям (5)–(8) метод конечно-элементной коллокации по ξ и неявную конечно-разностную схему первого порядка по τ , в узлах расчетной области имеем систему из l_1 нелинейных алгебраических уравнений:

$$(9) \quad \left(\Lambda_{\nu} \frac{\partial^2 N^{\mu}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Lambda_{\nu}}{\partial \xi} \frac{\partial N^{\mu}}{\partial \xi} - \text{Re} \frac{\partial N^{\mu}}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\Delta \tau} c_{\nu} \delta_{\nu}^{\mu} \right) \theta_{\mu} - S_k \frac{\partial \Phi_{\nu}}{\partial \xi} = \frac{\omega}{\Delta \tau} c_{\nu} \theta_{0\nu};$$

$$(10) \quad \left(\Lambda_1 \frac{\partial N^{\mu}}{\partial \xi} - (N_{U_1} + \text{Re}) \delta_1^{\mu} \right) \theta_{\mu} - \varepsilon_1 S_k \theta_1^4 = \\ = -\omega_1 (N_{U_1} + \text{Re} + \varepsilon_1 S_k \omega_1^3), \quad \xi = 0;$$

$$(11) \quad \left(\Lambda_{l_1} \frac{\partial N^{\mu}}{\partial \xi} + (N_{U_2} + \text{Re}) \delta_{l_1}^{\mu} \right) \theta_{\mu} + \varepsilon_2 S_k \theta_{l_1}^4 = \\ = -\omega_2 (N_{U_2} + \text{Re} + \varepsilon_2 S_k \omega_2^3), \quad \xi = 1;$$

$$\frac{\partial \Phi_{\nu}}{\partial \xi} = 2L_0 n^2 \{ 2\theta_{\nu}^4 - K_2 (L_0 \xi + x_0) \theta_1^4 - K_2 (L_0 (1 - \xi)) \theta_{l_1}^4 - L_0 I(\xi) \},$$

$$\xi \in [0, 1], \quad \nu = 2, \dots, l_1 - 1.$$

Здесь c_{ν}, λ_{ν} — узловые значения c, λ ; δ_{ν}^{μ} — символ Кронекера.

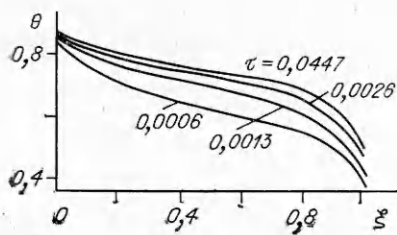
Применяя к системе уравнений (9)–(11) метод Ньютона [3], имеем $\theta_{\nu} = \bar{\theta}_{\nu} + \Delta \theta_{\nu}$ ($\bar{\theta}_{\nu}$ — начальное приближение (на первом шаге по времени в его качестве берутся начальные данные), $\Delta \theta_{\nu}$ — малая поправка). Система (9)–(11) сводится к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$(12) \quad Q^{\nu\mu} \Delta \theta_{\mu} = R^{\nu}.$$

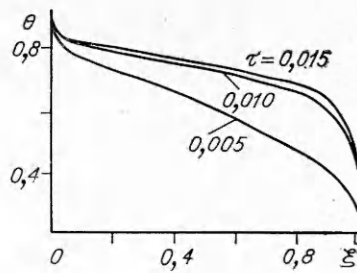
Явные выражения коэффициентов Q, R не приводятся из-за их громоздкости. На каждом шаге по времени решение системы (12) ищется до тех пор, пока не будет выполняться для всех ν условие $|\Delta \theta_{\nu}| < \varepsilon$ (ε — малая величина порядка $10^{-5} \div 10^{-6}$).

Описанный выше алгоритм реализован на языке Fortran-77 для ИВМ РС/АТ286. Среднее время счета на сетке из 10 конечных элементов (21 узел) составляет 7–10 мин.

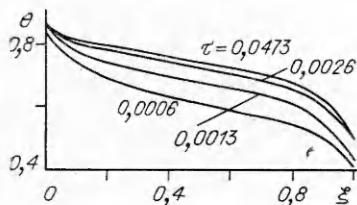
Ниже даны результаты расчетов, проведенных при следующих теплофизических и оптических параметрах: $\Delta \tau = 6 \cdot 10^{-4}$, $N_{U_1} = 1,22$, $N_{U_2} = 0,12$, $S_k = 18,84$, $\omega_1 = 0,9$, $\omega_2 = 0,1$, $\theta_0 = 0,5$, $\text{Re} = 9,92$, $T_* = 3000 \text{ К}$, $L = 0,03 \text{ м}$, $n = 1,5$, $\varepsilon_1 = 0,85$, $\varepsilon_2 = 0,35$.



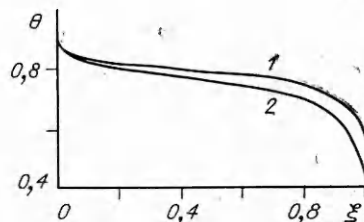
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

Результаты решения системы уравнений (12) отражают динамику нагрева плоского полупрозрачного тела, поверхности которого подвергнута радиационно-конвективному нагреву, и представлены на рис. 1—3.

На рис. 1 при начальной безразмерной температуре $\theta_0 = 0,5$, постоянных теплоемкости и теплопроводности приведена зависимость безразмерной температуры θ от безразмерной координаты ξ , где числа над кривыми соответствуют значению безразмерного времени. Рис. 2 иллюстрирует температурное распределение при тех же параметрах, но при $\theta_0 = 0,1$. Для начальной температуры $\theta_0 = 0,5$ и при переменных свойствах $c(\theta)$, $\lambda(\theta)$, зависимость которых от температуры задана в табл. 2, на рис. 3 показана картина температурного поля.

Параметрическая зависимость температурного распределения от $Re = 2, 10$ (линии 1, 2) представлена на рис. 4 для безразмерного времени $\tau = 0,01$ и $\theta_0 = 0,5$. Видно, что температурные кривые по мере удаления от горячей к холодной поверхности все больше отличаются между собой как качественно, так и количественно. Это объясняется тем, что с повышением скорости двухамого газа по мере удаления от горячей стенки горячий газ не успевает отдать тепло твердому каркасу. Приведенные на рисунках температурные поля при различных теплофизических и оптических свойствах довольно быстро приходят в стационарный режим.

Проводилось сопоставление расчета при безразмерных c , λ , не меняющихся во время расчета, и при их зависимости от $\theta(\xi, \tau)$. Во втором случае их значения аппроксимировались значениями из табл. 2. Из анализа результатов расчетов видно, что учет зависимости от θ c и λ затягивает время выхода на стационарный режим и незначительно влияет на количественные показатели.

Т а б л и ц а 2

T	c	λ	T	c	λ
10	0,80	0,30	2000	2,10	0,62
300	0,88	0,35	2500	2,16	0,70
500	1,22	0,40	3005	2,21	0,74
1500	1,80	0,50			

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурка А. Л., Чиркашенко Е. П. Радиационно-кондуктивный теплообмен в пористом твердом теле // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1986.— Вып. 3.
2. Дудкин В. В., Оксогов А. А. Схема МКЭ в коллокациях к исследованию связанных задач аэроупругости мягких оболочек // Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов: Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф.— М., 1986.
3. Канторович Л. В. О методе Ньютона // Тр. Матем. ин-та АН СССР.— 1949.— Т. 28.

г. Новосибирск

Поступила 19/VII 1991 г.

УДК 53.082.4

А. Э. Пуро

КВАЗИИЗОТРОПНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СЛАБОЙ АКУСТОУПРУГОСТИ

Фундаментальная задача акустоупругости — установление связей между параметрами распространяющейся ультразвуковой волны и компонентами тензора предварительного нагружения [1—3]. Так как акустоупругие эффекты очень малы, рассмотрение задач обычно [3] проводится в линеаризованной постановке. При этом в большинстве работ ограничиваются случаем движения волны вдоль одного из главных направлений тензора преднапряжений, когда разрешающие уравнения акустоупругости упрощаются [1—5]. Исключение составляет работа [6], где получены в первом приближении формулы для абсолютных разностей фаз. Явление двулучепреломления (вращение поляризации сдвиговых волн на луче и изменение фаз за счет этого вращения) в ней не было выяснено с достаточной степенью точности. Ниже для анализа этого эффекта привлекается метод квазиизотропного приближения [7]. Полученные формулы позволяют без существенных изменений применить к задачам акустоупругости теорию, разработанную в интегральной фотоупругости [8, 9]. При сравнительном анализе этих явлений [4] разбираемые в настоящей работе вопросы не нашли адекватного отражения.

1. Будем исходить из выражения плотности энергии деформации (внутренней энергии), отнесенной к единице массы среды [1]:

$$W = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{2} K_1^2 + \mu K_2 + \frac{1}{6} \nu_1 K_1^3 + \nu_2 K_1 K_2 + \frac{4}{3} \nu_3 K_2^2 \right).$$

Здесь $K_1 = E_{ii}$; $K_2 = E_{ij}E_{ji}$; $K_3 = E_{ij}E_{kj}E_{ki}$; λ , μ — коэффициенты Ламе; ν_1 , ν_2 , ν_3 — упругие постоянные третьего порядка; $E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_i^0 + \frac{\partial}{\partial x_i} u_k^0 + \frac{\partial}{\partial x_i} u_n^0 \frac{\partial}{\partial x_k} u_n^0 \right)$ — тензор деформаций Коши — Грина; $u_i^0 = u_i + w_i$ — вектор деформаций, представленный в виде суммы деформаций предварительного нагружения u_i и ультразвуковой волны w_i ; ρ — плотность среды в недеформированном состоянии; по повторяющимся индексам применяется тензорное правило суммирования. Решение проводится в лагранжевой ортогональной системе координат. Среда считается первоначально изотропной и однородной.

При выводе разрешающих уравнений используется разложение по трем малым параметрам [6]: 1) линеаризованный тензор предварительного нагружения σ_{ij} считается малым относительно постоянных Ламе ($|\sigma_{ij}|/\mu = \varepsilon_0 \leq 10^{-3} - 10^{-5}$); 2) тензор напряжений ультразвуковой волны на порядок меньше тензора σ_{ij} ; 3) длина ультразвуковой волны λ , по крайней мере, на порядок меньше характерного размера поля предварительного напряжения. Можно показать [1], что с точностью до членов первого порядка малости (относительно ε_0) включительно движение