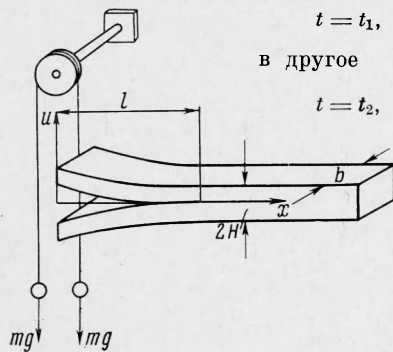


ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В БАЛОЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. М. Михайлов (Новосибирск)

Теория тонких балок часто применяется для изучения равновесия трещин в узкой полосе [1]. В настоящей работе проводится распространение балочного подхода на случай движения трещины. Имеющиеся в литературе попытки рассматривать динамику трещин в балочном приближении [2-6] основаны на замене упругого стержня, являющегося системой с бесконечным числом степеней свободы, некоторой другой системой с одной степенью свободы, что не всегда является допустимым.

1. Вывод уравнения движения и граничных условий. Рассмотрим движение трещины вдоль средней линии упругого полубесконечного стержня ( $x \geq 0$ ) прямоугольного поперечного сечения, размеры которого обозначены на фиг. 1. Длину трещины в момент времени  $t$  обозначим  $l(t)$ . Для определенности допустим, что берега трещины нагружены в точке  $x = 0$  при помощи грузов массы  $m$ , находящихся в поле силы тяжести с ускорением  $g$ . Считаем, что стержень невесом и что материал стержня имеет плотность  $\rho$ , модуль Юнга  $E$  и плотность поверхностной энергии  $T$ . Будем рассматривать движение той половины стержня, которая лежит выше разреза. Момент инерции поперечного сечения этой половины стержня относительно нейтральной оси обозначим через  $J = b H^3/12$ . Отклонение нейтральной оси от ненагруженного состояния обозначим через  $u(x, t)$ . Переход системы из одного состояния движения



Фиг. 1

$$t = t_1, \quad u = u(x, t_1), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t_1)}{\partial t}, \quad l = l(t_1)$$

в другое

$$t = t_2, \quad u = u(x, t_2), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t_2)}{\partial t}, \quad l = l(t_2)$$

происходит согласно принципу наименьшего действия таким образом, что реализуется экстремум интеграла

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt$$

Здесь  $K$  — кинетическая, а  $\Pi$  — потенциальная энергия системы [7]. Примем

$$K = \int_0^{l(t)} \frac{\rho b H}{2} \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{m}{2} \left[ \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \right]^2 \quad (1.1)$$

В выражении (1.1) учитывается кинетическая энергия груза и кинетическая энергия вертикального смещения нейтральной оси балки в предположении, что вся масса балки сосредоточена на нейтральной оси. Потенциальную энергию возьмем в виде

$$\Pi = \int_0^{l(t)} \frac{EJ}{2} \left[ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + mg(R - u(0, t)) + Tbl(t) \quad (1.2)$$

Здесь учитывается энергия упругого изгиба [8], потенциальная энергия груза (постоянная  $R$  равна начальной высоте груза) и поверхностная энергия одного берега разреза. Выражения (1.1) и (1.2) приближенные и справедливы при условиях

$$H \ll l, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{1}{H}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \ll \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial t}$$

т. е. тогда, когда можно пренебречь потенциальной энергией сдвига по сравнению с энергией изгиба и при этом направление нейтральной оси и ее скорость не изменяются заметно на расстояниях порядка поперечного размера стержня.

Таким образом, требуется найти такие функции  $u(x, t)$  и  $l(t)$ , которые обращают в нуль первую вариацию функционала

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l(t)} \left[ \frac{\rho b H}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{EJ}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \right)^2 - mg(R - u(0, t)) - Tbl(t) \right] dt$$

Как обычно, считаем, что в конце трещины имеет место жесткая заделка, т. е. при  $x = l(t)$

$$u(l, t) = 0, \quad \partial u(l, t)/\partial x = 0 \quad (1.3)$$

Взяв полную производную по времени от (1.31), в силу равенства (1.32) получим скорость в точке заделки

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

На фиг. 2 изображена плоскость переменных  $x, t$  и область интегрирования при вычислении  $S$ :  $0 \leq x \leq l(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Вариация функционала  $S$  вычисляется при условии, что варьированию подвергается как функция  $u(x, t)$ , так и правая граница области  $l(t)$ .

Для нахождения искомых функций поступаем обычным в вариационном исчислении образом [9]. Вводим семейства функций  $u(x, t, \alpha)$  и  $l(t, \alpha)$ , непрерывно зависящие от параметра  $\alpha$ . Считаем эти функции такими, что все аналитические операции, необходимые при выкладках, законны.

Кроме того, эти функции, по определению, обладают следующими свойствами:

$$u(x, t, 0) = u(x, t), \quad l(t, 0) = l(t) \quad (1.5)$$

$$u(x, t_1, \alpha) = u(x, t_1), \quad u(x, t_2, \alpha) = u(x, t_2) \quad (1.6)$$

$$u[l(t, \alpha), t, \alpha] = 0, \quad \frac{\partial u[l(t, \alpha), t, \alpha]}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

Функционал  $S$  будем рассматривать как функцию  $\alpha$ . Введем обозначения

$$\delta u(x, t) = \frac{\partial u(x, t, 0)}{\partial \alpha} \alpha, \quad \delta l(t) = \frac{\partial l(t, 0)}{\partial \alpha} \alpha, \quad \delta S = \frac{\partial S(0)}{\partial \alpha} \alpha \quad (1.8)$$

Из определений (1.8) и условий (1.6) следует, что

$$\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0 \quad (1.9)$$

Кроме того,

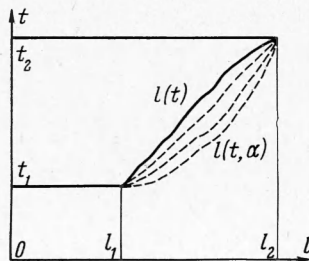
$$\delta u[l(t), t] = 0, \quad \frac{\partial \delta u[l(t), t]}{\partial x} = - \frac{\partial^2 u[l(t), t]}{\partial x^2} \delta l \quad (1.10)$$

Для получения условий (1.10) достаточно величину  $u[l(t), t, \alpha]$  представить в виде ряда Тэйлора по степеням разности  $l(t) - l(t, \alpha)$

$$u[l(t), t, \alpha] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u[l(t, \alpha), t, \alpha]}{\partial x^n} [l(t) - l(t, \alpha)]^n$$

и использовать определения (1.8) и свойства (1.5), (1.7).

Приступаем к вычислению  $\delta S$ . Сначала вычислим вариацию  $\delta_1 S$ , считая границу  $l(t)$  фиксированной



Фиг. 2

$$\delta_1 S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l(t)} \left[ \rho \dot{\delta} \dot{H} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} - EJ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \frac{\partial \delta u(0, t)}{\partial t} + mg \delta u(0, t) \right] dt$$

Двойной интеграл преобразуем, применяя формулу Грина

$$\iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) dx dt = \int N dx + Q dt$$

причем интеграл в правой части этой формулы берется вдоль границы области интегрирования в двойном интеграле, проходимой против часовой стрелки, если система координат  $x, t$  правая, и по часовой стрелке — в противном случае. Первое слагаемое в однократном интеграле преобразуем при помощи интегрирования по частям.

Учитывая условие (1.4) и граничные значения вариаций (1.9), (1.10), получаем

$$\delta_1 S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ EJ \left[ \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} \right]^2 \delta l + EJ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta u(0, t)}{\partial x} - EJ \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x^3} \delta u(0, t) + \right. \\ \left. + m \left[ g - \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} \right] \delta u(0, t) \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l(t)} \left[ EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho b H \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] \delta u \, dx \, dt$$

Вычислим часть  $\delta_2 S$  вариации, которая возникает при варьировании границы  $l(t)$

$$\delta_2 S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \frac{EJ}{2} \left[ \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} \right]^2 - Tb \right\} \delta l \, dt$$

При получении  $\delta_2 S$  использовано правило дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу и равенство (1.4).

Требую, чтобы  $\delta S = \delta_1 S + \delta_2 S = 0$ , получим уравнение движения

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \frac{EJ}{\rho b H} \quad (1.11)$$

и естественные граничные условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad EJ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = m \left( g - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \quad (x = 0) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = A, \quad A = \left( \frac{2Tb}{EJ} \right)^{1/2} \quad (1.13)$$

Кроме того, при  $x = l(t)$  выполнены условия (1.3). Для того чтобы полностью определить движение рассматриваемой системы, необходимо задать в некоторый начальный момент времени распределение смещений и скоростей, совместное с граничными условиями.

Равенства (1.11), (1.12), (1.13), вместе с соответствующими начальными условиями описывают движение балки, один конец которой жестко заделан при  $x = l(t)$ , а на конце  $x = 0$  заданы нулевой момент и перерезывающая сила, вызванная весомой массой. Условия на левом конце зависят от способа нагрузки и могут задаваться непосредственно, исходя из того, что момент и перерезывающая сила пропорциональны соответственно второй и третьей производным от смещения по координате. Легко показать, что в том случае когда к берегам трещины приложены распределенные нормальные нагрузки, уравнение (1.11) превращается в неоднородное, причем в правой части его стоит функция, равная линейной плотности нагрузки, деленной на жесткость при изгибе.

Условия (1.11), (1.12), (1.3) позволяют найти решение  $u(x, t)$  при любом законе движения  $l(t)$  точки заземления. Как следует из вывода, в действительности осуществляются лишь такие движения, при которых выполняется условие (1.13). Это условие, следовательно, в пределах применимости теории тонких балок к рассмотрению трещин играет такую же роль, как условие конечности напряжений Г. И. Баренблатта [1] в общем случае упруго-хрупкого разрушения. Отметим, что в работах [2-6] при рассмотрении движения трещины в качестве решения  $u(x, t)$  бралось статическое решение для заземленной балки длины  $l$ , нагруженной тем или иным способом на свободном конце, причем считалось, что параметр  $l$  зависит от времени. Вследствие этого условия на нагруженном конце и условия заземления оказывались выполненными, а уравнение (1.11) и условие (1.13) — нарушенными почти везде (за исключением положения равновесия), причем тем сильнее, чем дальше от равновесия находилась система.

**2. Примеры.** а) *Стационарные движения.* Рассмотрим решения вида  $u(x, t) = u(x - Vt)$ , где  $V$  — постоянная, имеющая размерность скорости, при граничных условиях, заданных на линиях  $\chi = x - Vt = \text{const}$  и зависящих только от  $\chi$ .

В случае стационарного расклинивания клином толщины  $2h$  граничные условия ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= h, & \partial^2 u / \partial x^2 &= 0, & (x = Vt) \\ u &= 0, & \partial u / \partial x &= 0, & \partial^2 u / \partial x^2 = A \quad (x = Vt + l) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этих условиях  $l$  — неизвестная постоянная длина свободной трещины перед клином.

Если перейти в уравнении (1.11) и граничных условиях (2.1) к переменной  $\chi$ , то для определения функции  $u(\chi)$  получится обыкновенное дифференциальное уравнение и граничные условия при  $\chi = 0$  и  $\chi = l$ . Используя условия (2.1), получим смещение

$$u(\chi) = h \left[ \left( -\frac{a^2}{V^2} \sin \frac{V\chi}{a} + \chi \frac{a}{V} \cos \frac{V\chi}{a} \right) \left( \frac{a^2}{V^2} \sin \frac{Vl}{a} - l \frac{a}{V} \cos \frac{Vl}{a} \right)^{-1} + 1 \right] \quad (2.2)$$

Необходимо заметить, что (2.2) определяет смещение лишь в области  $0 \leq \chi \leq l$ . При  $\chi < 0$  решение ищется так, чтобы  $u(0)$  и  $u'(0)$  были бы непрерывны, а  $u''(-0)$  и  $u'''(-0)$  равнялись бы 0. Этим обеспечивается нужный скачок третьей производной при переходе через точку приложения сосредоточенной силы.

Из последнего условия (2.1) получаем уравнение для определения  $l$

$$h \sin \frac{Vl}{a} \left( \frac{a^2}{V^2} \sin \frac{Vl}{a} - \frac{a}{V} l \cos \frac{Vl}{a} \right)^{-1} = A \quad (2.3)$$

Перейдя к пределу  $V \rightarrow 0$  в (2.3), получим равновесную длину трещины  $l_0$  перед неподвижным клином

$$l_0^4 = \frac{9h^2}{A^2} = \frac{3EH^3h^2}{8T} \quad (2.4)$$

Перепишем (2.4) в безразмерной форме

$$\frac{1}{3L^2} = \frac{1}{12\eta^2\theta^2L^2} - \frac{1}{\sqrt{12}\eta\theta L} \operatorname{ctg} \sqrt{12}\eta\theta L \quad \left( \theta^2 = \frac{V^2\rho}{E}, \quad L = \frac{l}{l_0}, \quad \eta = \frac{l_0}{H} \right) \quad (2.5)$$

Зависимость (2.5) изображена на фиг. 3 в координатах  $L, \theta$  при различных значениях параметра  $\eta$ . При увеличении скорости расклинивания  $V$  до бесконечности длина трещины стремится к 0 как  $1/V$ . Отсутствие каких-либо особенностей при переходе через скорость распространения поверхностных волн является следствием принятого приближения (1.1), (1.2), для которого характерно отсутствие предельной скорости у изгибных волн (их скорость растет при уменьшении длины) [8]. Разумеется, при малых  $l/H$  балочный подход теряет силу, и требуется более точное рассмотрение.

Рассмотрим стационарное движение трещины, на расстоянии  $l$  от конца которой приложены сосредоточенные силы  $p$ . Краевые условия для этого случая будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad EJ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = p \quad (x = Vt) \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \quad (x = Vt + l) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поступая аналогично предыдущему, получаем связь между скоростью движения  $V$  и длиной  $l$

$$\frac{a}{V} \sin \frac{Vl}{a} = \frac{AEJ}{p} \quad (2.7)$$

Перейдя к пределу  $V \rightarrow 0$ , получим равновесную длину трещины

$$l_0 = \frac{AEJ}{p} = \frac{\sqrt{Eb^2H^3T}}{\sqrt{6}p} \quad (2.8)$$

Хорошо известно, что равновесие трещины в этом случае неустойчиво. Используя обозначения (2.6), но определяя  $l_0$  из (2.8), перепишем (2.7) в безразмерном виде

$$\sqrt{12}\theta\eta = \sin \sqrt{12}\theta\eta L \quad (2.9)$$

Как видно из (2.9), стационарное движение возможно лишь для  $L \geq 1$ ,  $\sqrt{12}\theta\eta \leq 1$ . Каждой скорости движения  $V \neq 0$  соответствует бесконечно много длин трещины. Рассматривая лишь положительные значения синуса, что соответствует движению в положительном направлении оси абсцисс, можем считать, что

$$2\pi n \leq \sqrt{12}\theta\eta L \leq \pi(2n+1) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Пусть сначала  $n = 0$ . Зависимость (2.9) для этого случая приведена на фиг. 4 в координатах  $L, \theta$  при различных значениях  $\eta$ . Каждой скорости отвечают два режима движения. При  $1 \leq L \leq 1/2\pi$  увеличение  $l$  при неизменной скорости  $V$  и силе  $p$  должно вызвать для сохранения равенства (2.7) увеличение  $A$ . Интуитивно ясно, что поскольку  $A$  постоянно, трещина, покинув стационарный режим, начнет ускоряться, что вызовет дальнейшее увеличение длины  $l$ . Точно так же случайное уменьшение длины приведет к захлопыванию трещины. Стационарное движение при  $1 \leq L \leq 1/2\pi$  является, следовательно, неустойчивым. Из аналогичных соображений следует, что при

$L > 1/2 \pi$  выполняется необходимое условие устойчивости стационарного режима: при случайном увеличении  $l$  трещина стремится уменьшить свою скорость, а при уменьшении — увеличить.

В случае натурального  $n$  длина  $l$  отличается от длины, приведенной на фиг. 4, на величину  $(2\pi H / \sqrt{12} \theta) n$ . Множитель при  $n$  представляет длину синусоидальной волны изгиба, способной распространяться по стержню со скоростью  $V$ . При каждом  $n$  возможны два режима движения: если  $2\pi n \leq \sqrt{12} \theta \eta L \leq \pi (2n + 1/2)$ , то движение неустойчиво, если же  $\pi (2n + 1/2) < \sqrt{12} \theta \eta L < \pi (2n + 1)$ , то выполнено необходимое условие устойчивости, о котором говорилось выше. Поведение системы после того, как она покидает стационарный режим, остается неясным, так как для его изучения нужно рассматривать уже нестационарные движения. Стоит лишь отметить априорную возможность перехода системы из неустойчивого режима в устойчивый (если последний существует). Какое именно  $n$  осуществляется в действительности, зависит от того, какие смещения и скорости задаются в начальный момент времени для обеспечения дальнейшего стационарного движения.

Не представляет труда рассмотрение и того случая, когда нагрузка распределена вдоль берегов трещины и стационарно движется вместе с ней.

б) Движение трещины при раздвигании ее берегов в начале координат с постоянной скоростью  $U$ . Рассмотрим движение трещины в полубесконечном стержне при следующих граничных условиях:

$$u(0, t) = Ut, \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = A \quad (2.10)$$

Уравнение (1.11) и условия (2.10) инвариантны относительно группы преобразований масштаб  $u = k^2 u_1, x = kx_1, t = k^2 t_1$ , где  $k$  — любое положительное число. Поэтому решение ищем в виде связи между инвариантами этой группы

$$\frac{u(x, t)}{Ut} = f(\xi), \quad \xi = \frac{x^2}{at} \quad (2.11)$$

Сделав подстановку (2.11) в уравнение (1.11) и условия (2.10), получим для определения функции  $f(\xi)$  уравнение

$$\frac{d^4 f}{d\xi^4} + \frac{3}{\xi} \frac{d^3 f}{d\xi^3} + \left( \frac{3}{4\xi^2} + \frac{1}{16} \right) \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0 \quad (2.12)$$

и граничные условия

$$f(0) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} [4\xi f''(\xi) + 2f'(\xi)] = 0, \quad (2.13)$$

$$f(\lambda) = 0, \quad f'(\lambda) = 0, \quad (2.14)$$

$$4\lambda f''(\lambda) = \frac{aA}{U}, \quad \lambda = \frac{l^2}{at}$$

Уравнение (2.12) подстановкой  $d^2 f / d\xi^2 = F(\xi) \xi^{-3/2}$  сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Решение его дает

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \xi^{-3/2} \left( D \sin \frac{\xi}{4} + E \cos \frac{\xi}{4} \right) = D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n-1/2}}{4^{2n+1} (2n+1)!} + E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n-3/2}}{4^{2n} (2n)!}$$

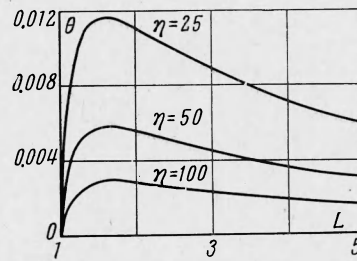
где  $D$  и  $E$  — произвольные постоянные. Интегрируя дважды, получаем общее решение уравнения (2.12)

$$f(\xi) = D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+3/2}}{4^{2n+1} (2n+1)! (2n+1/2) (2n+3/2)} + E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1/2}}{4^{2n} (2n)! (2n-1/2) (2n+1/2)} + B\xi + C \quad (2.15)$$

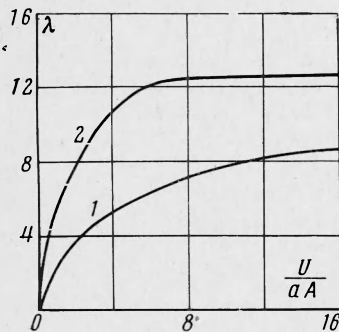
где  $B$  и  $C$  — постоянные интегрирования.

Из условий (2.13) следует, что  $B = 0, C = 1$ . Из условий (2.14.1) и (2.14.2) определяем  $D$  и  $E$  как функции от  $\lambda$ . Условие (2.14.3) позволяет найти  $\lambda$  как функцию скорости раздвигания берегов  $U$ . Таким образом,

$$l(t) = \sqrt{\lambda(U) / aA} at \quad (2.16)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

