УДК 532.546.06

ПРИТОК НЕФТИ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОДОШВЕННОЙ ВОДЫ

Ю. И. Капранов, В. Н. Эмих

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: emikh@hydro.nsc.ru

Получены точные решения ряда двумерных задач установившегося притока жидкости к горизонтальной скважине при наличии в напорном пласте покоящейся подошвенной жидкости большей плотности или расположенной под кровлей пласта жидкости меньшей плотности.

Ключевые слова: горизонтальная скважина, годограф скорости фильтрации, параметры отображения, граница раздела, критический режим течения.

Введение. Для практики нефтедобычи характерны ситуации, когда с достаточной степенью точности область течения может быть разбита на несколько частей, отделенных друг от друга заранее неизвестными границами раздела. В каждой из указанных подобластей перемещается жидкость, отличающаяся по своим свойствам от жидкостей, расположенных в соседних подобластях [1, 2]. Среди наиболее известных проблем, имеющих отношение к течениям подобного рода, отметим проблему образования так называемого конуса подошвенной воды [2–4]. Подходы к построению решения таких задач, имеющие, как правило, приближенный характер, наиболее полно разработаны для вертикальных скважин. С практической точки зрения основной целью указанных исследований является выяснение условий, гарантирующих невозможность прорыва подошвенной воды в эксплуатационную скважину.

В последние десятилетия большое внимание уделяется аналогичным проблемам в случае горизонтальных скважин, обладающих рядом преимуществ по сравнению с вертикальными. В частности, располагаясь вдоль напластования, они имеют существенно большую площадь контакта с залежью, что обеспечивает значительно более высокие темпы нефтедобычи. Вместе с тем по той же причине в случае прорыва подошвенной воды в горизонтальную скважину темпы ее обводнения существенно выше, чем в случае вертикальной скважины. С учетом сказанного большое значение приобретают исследования, направленные на выделение класса течений, являющихся критическими в режиме безводной нефтеотдачи.

Строго говоря, анализ подобных режимов возможен лишь на основе точных решений соответствующих задач. Однако в силу сложности последних таких решений немного не только для нестационарных, но и для стационарных задач. Простое аналитическое решение для критического режима течения в однородном не ограниченном по протяженности бесконечно тонком наклонном пласте впервые получено в работе [5] при рассмотрении линейной периодической цепочки скважин, моделируемых точечными стоками. К числу

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-05-65299).

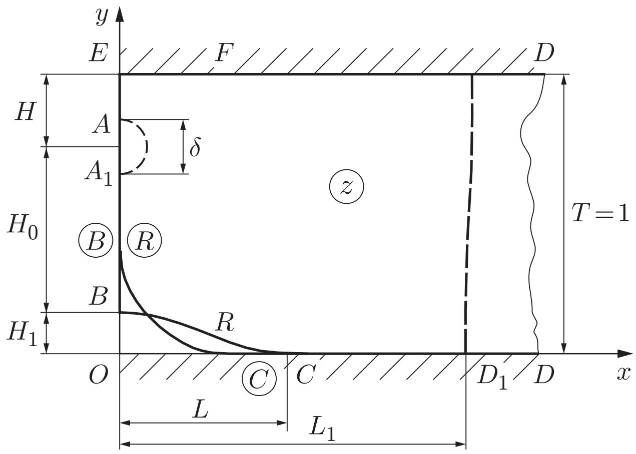

Рис. 1. Область течения в пласте с подошвенной жидкостью

достоинств указанной работы следует отнести простоту построенного решения. Настоящая работа также посвящена построению точных решений для случая горизонтальной скважины, однако в отличие от работы [5] принятая здесь постановка более приближена к реальным условиям.

1. Постановка задачи, параметрическое представление решения. Общая схема течения представлена на рис. 1. Движение предполагается установившимся двумерным в вертикальной плоскости xOy, а ось Ox — направленной горизонтально. Пласт мощности T считается однородным, не ограниченным по протяженности, подошва пласта $y = 0$ и его кровля $y = T$ непроницаемы. На расстоянии H от кровли расположена добывающая горизонтальная скважина, ось которой перпендикулярна плоскости xOy. Скважина функционирует с постоянным дебитом $2Q$ на единицу ее длины. В плоскости течения ей соответствует точка A.

Рассматривается симметричный относительно оси Oy приток из бесконечности к скважине жидкости с плотностью ρ_1 и вязкостью μ_1. В нижней части пласта, отделенной от основной части потока границей раздела BC, находится покоящаяся жидкость с плотностью $\rho_2 > \rho_1$ и вязкостью μ_2, не совпадающей в общем случае с μ_1. Принятую схему можно интерпретировать не только как откачку нефти из пласта, подстилаемого подошвенной водой, но и, например, как течение к скважине в водоносном пласте, содержащем более тяжелую загрязненную жидкость. При любой подобной трактовке основной задачей является расчет режима эксплуатации пласта, исключающего прорыв подошвенной жидкости в скважину. На рис. 1 представлена исследуемая правая половина области течения.

Соответствующая краевая задача состоит в нахождении комплексного потенциала течения $\omega = \varphi + i\psi$ как аналитической функции координат $z = x + iy$ точек области фильтрации при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} AE\colon\quad x = 0,\quad \psi = 0;\qquad AB\colon\quad x = 0,\quad \psi = Q;\qquad ED\colon\quad y = 1,\quad \psi = 0; \\ CD\colon\quad y = 0,\quad \psi = Q;\qquad BC\colon\quad \varphi - \rho y = \text{const},\quad \psi = Q\quad (\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь и далее используются функции ω и z, отнесенные соответственно к величинам $\varkappa_1 T$ и T ($\varkappa_1$ — коэффициент фильтрации движущейся жидкости). Первое условие на участке BC — следствие предположения о неподвижности подошвенной воды и динамического условия непрерывности давления при переходе через границу раздела между нефтью и водой [1–3].

Для получения параметрического представления решения отобразим на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$ (рис. 2) область комплексного потенциала ω (рис. 3) и область функции $1/w$

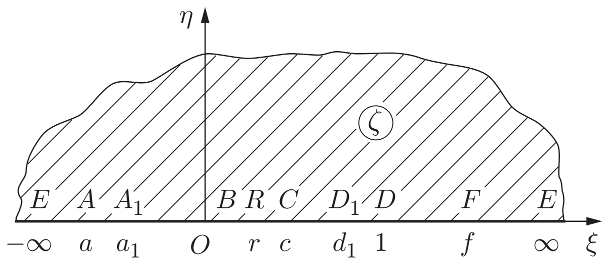

Рис. 2

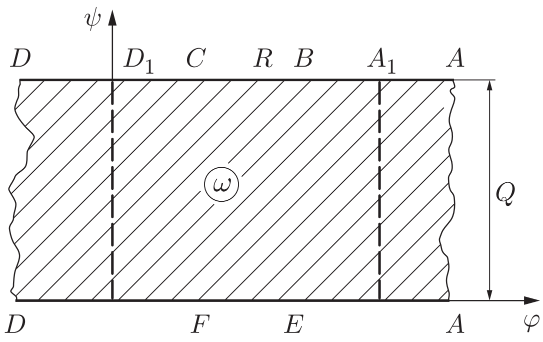

Рис. 3

Рис. 2. Полуплоскость вспомогательной комплексной переменной

Рис. 3. Область комплексного потенциала

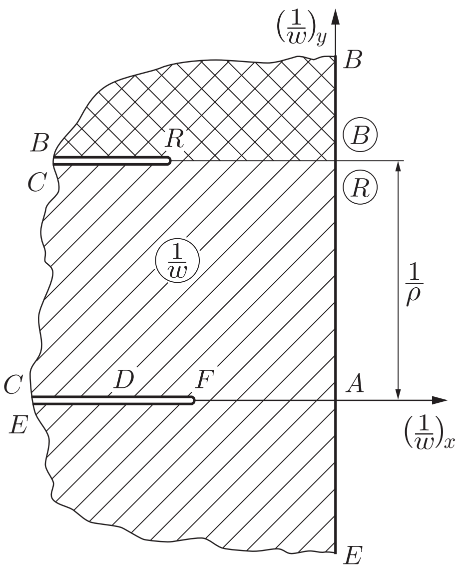

Рис. 4

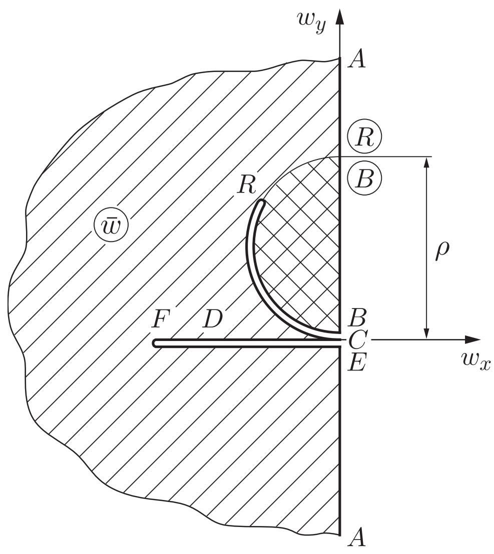

Рис. 5

Рис. 4. Область инверсии годографа скорости

Рис. 5. Область годографа скорости

(рис. 4), которая осуществляет инверсию годографа скорости фильтрации $\bar{w} = w_x + iw_y$ (рис. 5) относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Указанные отображения можно представить в виде

$$\omega = \omega_C - \frac{Q(1-a)}{\pi} \int\limits_c^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)(1-\zeta)} = \omega_C - \frac{Q}{\pi} \ln \frac{(\zeta - a)(1-c)}{(1-\zeta)(c-a)}; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} = iM \int\limits_a^{\zeta} \frac{(f-\zeta)(r-\zeta)\,d\zeta}{(c-\zeta)(-\zeta)\sqrt{-\zeta}} = 2iM\Big\{Z\Big[1 + \frac{fr}{c\sqrt{a\zeta}}\Big] + \sigma[G(\zeta) - G]\Big\} \qquad (3)$$

$$(-\infty < \zeta \leqslant 0),$$

где

$$Z = \sqrt{-a} - \sqrt{-\zeta}, \quad G(\zeta) = \operatorname{arctg}\sqrt{-c/\zeta}, \quad G = G(a), \quad \sigma = (f-c)(c-r)/\sqrt{c^3}. \tag{4}$$

Основной проблемой является нахождение входящих в представления (2)–(4) параметров a, c, f, r, M. Для определения величины ω_C, содержащейся в зависимости (2), следует задать значение ω в некоторой точке пласта, что потребуется в п. **4** при ином варианте постановки задачи. В принятой постановке, основанной на задании дебита скважины, когда давление может быть определено лишь с точностью до произвольной постоянной, такая детализация не нужна.

2. Критический режим течения. На первом этапе исследуем ограничения на значения параметра Q, исключающие возможность прорыва подошвенной воды в скважину. Рассмотрим случай $r = 0$. При этом область ω и соответствующая ей зависимость (2) сохраняются, в то время как в области $\bar{w}$ вершина R дугового разреза выходит на ось w_y, совмещаясь при этом с точкой B. В результате из годографа выпадает полукруг $\{|w - i\rho/2| \leqslant \rho/2,\ w_y \leqslant 0\}$, а из области инверсии годографа — квадрант $\{\operatorname{Im}(1/w) \geqslant 1/\rho, \operatorname{Re}(1/w) \leqslant 0\}$. На рис. 4, 5 указанные подобласти заштрихованы в двух направлениях. Соответствующие этому предельному случаю точки B, R, а на рис. 1 и точка C, заключены в кружки.

Следствием соотношения

$$p = -\rho_1 g(\varphi + y) \tag{5}$$

является неравенство $dp/dy = -\rho_1 g(w_y + 1) \leqslant -\rho_2 g$, выполняющееся на участке AB. При этом равенство, характеризующее гидростатическое равновесие нижележащей жидкости, сохраняется только в точке B, а в остальных точках отрезка AB градиент гидродинамического давления превышает стабилизирующее воздействие силы тяжести на подошвенную воду, и дальнейшее сколь угодно малое понижение давления должно вовлечь ее в поток. Таким образом, в критическом режиме определяется максимально допустимый дебит скважины.

В соответствии с перечисленными выше изменениями области инверсии годографа зависимость (3) для участка EAB границы принимает вид

$$\frac{1}{w} = 2iM[\tau(-a) - \tau(-\zeta)], \qquad \tau(t) = \frac{f-c}{\sqrt{c}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{t}{c}} + \sqrt{t}. \tag{6}$$

При $\zeta = 0$, $w = -i\rho$ отсюда следует

$$2\rho M\tau(-a) = 1. \tag{7}$$

На участке BC $(0 \leqslant \zeta \leqslant c)$ с учетом (6) имеем

$$\frac{1}{w} = i\,\frac{1}{\rho} - M\int\limits_0^{\zeta}\frac{(f-\zeta)\,d\zeta}{(c-\zeta)\sqrt{\zeta}}.$$

Сравнивая приращения обеих частей последнего равенства при обходе точки C (см. рис. 4), находим

$$M = \sqrt{c}/[\pi\rho(f-c)]. \tag{8}$$

Подставляя это выражение вместо M в (7) и учитывая затем представления (4) и (6) для G и $\tau(t)$ соответственно, получаем соотношение

$$\sqrt{-ac}/(f-c) = G.$$

С учетом равенства (8) выражаем параметры M, f через a и c:

$$M = G/(\pi\rho\sqrt{-a}), \qquad f = c + \sqrt{-ac}/G. \tag{9}$$

Используя (9), представим зависимость (6) в виде

$$\frac{1}{w} = i\,\frac{2}{\pi\rho}\Big(G(\zeta) - \sqrt{\frac{\zeta}{a}}\,G\Big) \qquad (-\infty < \zeta \leqslant 0). \tag{10}$$

На двух других участках действительной оси плоскости ζ указанная зависимость преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{w} = -\frac{1}{\pi\rho}\Big(\Lambda(\zeta) + 2\sqrt{-\frac{\zeta}{a}}\,G\Big) + i\,\frac{1}{\rho} \qquad (0 \leqslant \zeta \leqslant c); \tag{11}$$

$$\frac{1}{w} = -\frac{1}{\pi\rho}\Big(\Lambda(\zeta) + 2\sqrt{-\frac{\zeta}{a}}\,G\Big), \qquad \Lambda(\zeta) = \ln\Big|\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{c}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{c}}\Big| \quad (c \leqslant \zeta < \infty). \tag{12}$$

Согласно (3) в каждой точке области течения имеет место равенство $dy/dx = \operatorname{Im}(1/w)/\operatorname{Re}(1/w)$. С учетом (11) отсюда следует $\lim\limits_{\zeta\to+0}(dy/dx) = -\infty$. Таким образом, в рассматриваемом предельном случае точка B является точкой заострения линии раздела BC.

Полагая в равенстве (12) $\zeta = 1$, $w = -Q$, получаем уравнение

$$\Pi - 2G/\sqrt{-a} = 0, \tag{13}$$

где

$$\Pi = \frac{\pi\rho}{Q} - \ln\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}. \tag{14}$$

Уравнение (13) однозначно определяет зависимость $c = c(a)$ в каждой точке полуоси $a < 0$, причем $c \in (0,1)$.

В число задаваемых физических параметров входит отсчитываемая от кровли пласта глубина H точечного стока A, моделирующего скважину (см. рис. 1). С учетом первого равенства в (3) и зависимостей (2), (10) для величины H получаем представление

$$H = \frac{2Q(1-a)}{\pi^2\rho}\int\limits_{-\infty}^{a}\frac{\sqrt{\zeta/a}\,G - G(\zeta)}{(a-\zeta)(1-\zeta)}\,d\zeta, \tag{15}$$

используемое для нахождения параметра a. При этом правая часть (15) рассматривается как сложная функция $F(a)$ параметра a, т. е. в качестве c в ней используется определяемая из (13) зависимость $c = c(a)$. Результаты численных расчетов показывают, что функция $F(a)$ монотонно возрастает от 0 до 1 при изменении параметра a от $-\infty$ до 0. В силу этого параметры a и c однозначно определяются в интервалах их изменения при любом значении $H \in (0,1)$. Затем по формулам (9) вычисляются параметры M и f.

После нахождения всех параметров отображения определяется расстояние H_0 от стока A до вершины B конуса подошвенной воды (см. рис. 1). Выражение для этой величины также найдем с учетом зависимости (10) (ср. с (15)):

$$H_0 = \frac{2Q(1-a)}{\pi^2\rho}\int\limits_{a}^{0}\frac{G(\zeta) - \sqrt{\zeta/a}\,G}{(\zeta-a)(1-\zeta)}\,d\zeta.$$

Интегрируя первое равенство в (3) с использованием зависимостей (2) и (11), получим комплексно-параметрическое уравнение границы BC между нефтью и водой

$$x + iy = \frac{Q(1-a)}{\pi^2\rho}\int_0^{\zeta}\frac{\Lambda(\zeta)+2\sqrt{-\zeta/a}\,G}{(\zeta-a)(1-\zeta)}\,d\zeta + i\Big(H_1 - \frac{Q}{\pi\rho}N(\zeta)\Big),$$
$$N(\zeta) = \ln\frac{\zeta-a}{(1-\zeta)(-a)}. \tag{16}$$

Полагая $\zeta = c$, $x = L$, $y = 0$, получим формулы для вычисления ширины L и высоты H_1 гребня подошвенной воды:

$$L = \frac{Q(1-a)}{\pi^2\rho}\int_0^{c}\frac{\Lambda(\zeta)+2\sqrt{-\zeta/a}\,G}{(\zeta-a)(1-\zeta)}\,d\zeta, \qquad H_1 = \frac{Q}{\pi\rho}N \quad (N = N(c)).$$

Величины H, H_0 и H_1 связаны соотношением $H + H_0 + H_1 = 1$, которое можно использовать либо как контрольное, либо для нахождения одной из двух величин H_0, H_1 после определения другой.

Одной из основных характеристик течения, вычисляемых в критическом режиме, является максимальный объем V подошвенной воды, остающейся неподвижной при данном дебите Q скважины:

$$V = \int_0^{c} y\Big(\frac{dx}{d\zeta}\Big)\,d\zeta. \tag{17}$$

Содержащиеся в правой части этого выражения координаты x, y границы раздела BC определены в (16).

Зависимость от величин Q и ρ в уравнениях (13), (15) и во всех соотношениях, полученных на основе представления для z, выражается только через отношение $q = Q/\rho$. Это означает, что параметры отображения и геометрические характеристики потока (включая V) инвариантны при пропорциональном изменении Q и ρ. В таблице приведены значения V в рассматриваемом предельном случае, вычисленные при различных значениях H и q. Из таблицы следует, что при малых значениях величины V она обратно пропорциональна q^2. С учетом зависимостей для $1/w$ из сказанного выше следует, что при пропорциональном изменении величин Q и ρ пропорционально изменяются и составляющие скорости фильтрации в каждой точке потока.

H	V						
	$q = 0{,}2$	$q = 0{,}5$	$q = 1$	$q = 5$	$q = 10$	$q = 50$	$q = 100$
0	0,8047	0,2788	0,1021	0,0052	0,0013	$52 \cdot 10^{-6}$	$13 \cdot 10^{-6}$
0,1	0,7582	0,2629	0,0967	0,0049	0,0012	$50 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$
0,2	0,6523	0,2229	0,0823	0,0042	0,0011	$43 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 11^{-6}$
0,3	0,5188	0,1716	0,0630	0,0033	$82 \cdot 10^{-5}$	$33 \cdot 10^{-6}$	$82 \cdot 10^{-7}$
0,4	0,3776	0,1193	0,0431	0,0022	$56 \cdot 10^{-5}$	$22 \cdot 10^{-6}$	$56 \cdot 10^{-7}$
0,5	0,2447	0,0731	0,0257	0,0013	$33 \cdot 10^{-5}$	$13 \cdot 10^{-6}$	$33 \cdot 10^{-7}$
0,6	0,1337	0,0377	0,0128	$62 \cdot 10^{-5}$	$16 \cdot 10^{-5}$	$62 \cdot 10^{-7}$	$16 \cdot 10^{-7}$
0,7	0,0559	0,0150	0,0048	$22 \cdot 10^{-5}$	$56 \cdot 10^{-6}$	$22 \cdot 10^{-7}$	$56 \cdot 10^{-8}$
0,8	0,0148	0,0037	0,0011	$48 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$	$48 \cdot 10^{-8}$	$12 \cdot 10^{-8}$
0,9	0,0014	$29 \cdot 10^{-5}$	$77 \cdot 10^{-6}$	$31 \cdot 10^{-7}$	$78 \cdot 10^{-8}$	$31 \cdot 10^{-9}$	$78 \cdot 10^{-10}$

Далее нижним индексом “$*$” отмечены фильтрационные характеристики и параметры отображения, вычисленные в критическом режиме, если в общем случае их значения отличаются от предельных.

На практике критический режим откачки можно выявить, увеличивая дебит скважины до тех пор, пока в скважину не начнет поступать подошвенная вода. Неизвестный изначально объем V подошвенной воды вычисляется по формуле (17) и используется затем в качестве одного из параметров, определяющих характеристики течения в нормальном режиме, когда $Q < Q_*$.

3. Общий случай. Зависимости (2), (3), используемые при решении краевой задачи в общем случае, содержат пять неизвестных параметров: M, a, c, f, r. Как и для критического режима, алгоритм их нахождения в конечном счете сводится к решению системы уравнений относительно параметров a, c, через которые предварительно следует выразить параметры M, f, r.

На отрезке BC $(0 \leqslant \zeta \leqslant c)$ равенство (3) представим в виде

$$\frac{1}{w} = -M\Big(2\,\frac{\Phi(\zeta)}{\sqrt{\zeta}} + \sigma\Lambda(\zeta)\Big) - 2iM\Big(\frac{ac+fr}{c\sqrt{-a}} - \sigma \operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{a}{c}}\Big), \quad \Phi(\zeta) = \zeta + \frac{fr}{c}, \tag{18}$$

где функция $\Lambda(\zeta)$ определена в (12). Сравнивая приращения обеих частей равенства (18) при обходе точки C и учитывая выражения (4) для σ, находим

$$M = \frac{1}{\pi\rho}\,\frac{\sqrt{c^3}}{(f-c)(c-r)}. \tag{19}$$

Так как $\operatorname{Im}(1/w) = 1/\rho$ на BC, в силу (18), (19) имеем

$$\frac{-ac-fr}{(f-c)(c-r)} = \sqrt{-\frac{a}{c}}\,G. \tag{20}$$

На участке CE $(c \leqslant \zeta < \infty)$ зависимость для $1/w$ принимает вид

$$\frac{1}{w} = -2M\Big(\sqrt{\zeta} + \frac{fr}{c\sqrt{\zeta}}\Big) - \frac{1}{\pi\rho}\,\Lambda(\zeta).$$

Полагая $\zeta = 1$, $w = -Q$ и используя (19), (20), отсюда получаем

$$\Pi - \frac{2\sqrt{c}\,(c+fr)}{(f-c)(c-r)} = 0, \tag{21}$$

где функция Π определена в (14). Исключая из равенства (21) параметр f с учетом (20), имеем уравнение

$$\begin{gathered} Ar^2 + Br + C = 0, \\ B = 2(1-c)\sqrt{-a}\,G - (c-a)\Pi - 2(1-a)\sqrt{c}, \\ A = 2\sqrt{-a}\,G + \Pi, \qquad C = -ac(\Pi - 2G/\sqrt{-a}\,). \end{gathered} \tag{22}$$

Так как при взаимной перестановке параметров f и r все зависимости, приводящие к уравнению (22), сохраняются, исключая из (21) параметр r, получим идентичное (22) уравнение относительно f, имеющее следующие корни:

$$r_{1,2} = -B \pm \sqrt{\Delta} \qquad (\Delta = B^2 - 4AC). \tag{23}$$

Из равенства (21) следует, что $\Pi > 0$. С учетом этого и с использованием оценки $G < \sqrt{-c/a}$ получим

$$B < 0, \qquad \Delta > 0.$$

Отсюда заключаем, что корни (23) уравнения (22) действительные. Меньший из них r_2 содержится в интервале $(0, c)$, определяя тем самым параметр r (см. рис. 5), а больший удовлетворяет неравенству $r_1 > c$ и определяет параметр f. Поскольку в исследуемой схеме течения корни уравнения (22) положительны, должно выполняться условие $C > 0$, т. е.

$$F(a,c) = \Pi - 2G/\sqrt{-a} > 0. \tag{24}$$

В силу (19), (20) и уравнения (22) нахождение неизвестных параметров отображения сводится к определению параметров a, c при тех же величинах H, V, что и в предельном случае.

Интегрируя (3), с учетом (2) имеем

$$H = \frac{2Q(1-a)}{\pi^2\rho} \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{[G - G(\zeta)] - \pi\rho M Z[1 + fr/(c\sqrt{a\zeta}\,)]}{(a-\zeta)(1-\zeta)}\, d\zeta. \tag{25}$$

Используя зависимости (2), (3), (17), получаем параметрическое представление границы раздела BC

$$x + iy = \frac{Q(1-a)}{\pi^2\rho} \int\limits_{0}^{\zeta} \frac{2\pi\rho M\Phi(\zeta) + \Lambda(\zeta)\sqrt{\zeta}}{(\zeta-a)(1-\zeta)\sqrt{\zeta}}\, d\zeta + i\Big(H_1 - \frac{Q}{\pi\rho}\, N(\zeta)\Big). \tag{26}$$

Входящая в это представление функция $N(\zeta)$ определена в (14).

Согласно (17) и (26) величина V определяется равенством

$$V = H_1 L - \frac{Q^2(1-a)}{\pi^3\rho^2} \int\limits_{0}^{c} \frac{2\pi\rho M\Phi(\zeta) + \Lambda(\zeta)\sqrt{\zeta}}{(\zeta-a)(1-\zeta)\sqrt{\zeta}}\, N(\zeta)\, d\zeta. \tag{27}$$

Величины L, H_1 вычисляются с учетом (26) при $\zeta = c$.

При вычислении параметров a, c из уравнений (25) и (27) используем вложенные итерации. Правая часть уравнения (27) рассматривается как сложная функция параметра c. Это означает, что для каждого значения c, фиксируемого в ходе решения уравнения, параметр a определяется из уравнения (25). Численно устанавливается, что правая часть уравнения (25) монотонно возрастает от нуля до некоторого значения $H_* > H$ с увеличением параметра a от $-\infty$ до a_*, а правая часть уравнения (27) возрастает от нуля до $V_* > V$ с возрастанием параметра c от нуля до значения c_*, которое, как и значение a_*, вычисляется предварительно для предельного режима течения при выбранном значении $Q < Q_*$. Сказанное выше обеспечивает однозначную разрешимость описанной итерационной процедуры, при этом

$$a \in (-\infty,\ a_*), \qquad c \in (0,\ c_*). \tag{28}$$

С физической точки зрения неравенство $V_* > V$ означает, что меньшим значениям дебита скважины соответствуют большие значения максимального объема V_* подошвенной воды, остающейся в состоянии покоя.

Возвращаясь к неравенству (24), заметим, что содержащаяся в нем функция $F(a,c)$ монотонно возрастает с уменьшением каждого из параметров a и c. С учетом (13) отсюда следует, что при ограничениях (28) неравенство (24) выполняется. В процессе решения системы уравнений (25), (27) вычисляются также входящие в них параметры f, r, M. Используя соотношения (22), (23), можно показать, что в предельном случае, при $r_2 = C = 0$, корень $r_1 = -B/A$ определяется тем же выражением, что и параметр f в (9).

На основе зависимостей (2), (3) получим выражение для величины H_0 в следующем виде:

$$H_0 = \frac{2Q(1-a)}{\pi^2\rho} \int\limits_a^0 \frac{[G(\zeta) - G] + \pi\rho MZ[1 + fr/(c\sqrt{a\zeta}\,)]}{(\zeta - a)(1-\zeta)}\, d\zeta.$$

Для контроля вычислений в общем случае также можно использовать соотношение $H + H_0 + H_1 = 1$.

4. Об одной модификации исходной постановки задачи. Предположим, что по обе стороны от скважины на одинаковом расстоянии от нее находятся контуры питания с заданными на них напорами; при этом сохраняется заложенная в первоначальную постановку симметрия потока относительно плоскости $x = 0$. В схему течения включается также внутренняя эквипотенциаль, имеющая с контуром скважины общую точку A_1, давление p_1 в которой должно быть задано. Граничные эквипотенциали области фильтрации обозначены на рис. 1, 3 штриховыми линиями.

В самой скважине непосредственно можно измерить давление p_0, связанное с величиной p_1 соотношением $\Delta p = p_1 - p_0$, где Δp характеризует потери давления при прохождении жидкости через фильтр скважины. Величина Q подлежит определению.

В рассматриваемой постановке (в отличие от исходной) предварительно следует определить постоянную ω_C в представлении (2) для потенциала ω, связанного с давлением соотношением (5). Используем для этого условие

$$p_{D_1} = \varphi_{D_1} = 0. \qquad (29)$$

В соответствии с (29) нижняя точка D_1 контура питания принимается в качестве точки отсчета значений давления и потенциала, при этом в области течения $p < 0$, $\varphi > 0$.

Основу вычислительного алгоритма составляет нахождение дебита $Q \in (0, Q_*)$ при $p_1 = p_0 + \Delta p$, где $p_0 \in (0, p_{0*})$ — заданное давление в скважине. В конечном счете эта операция сводится к численному решению уравнения

$$p_1^0 = \frac{p_1}{\rho_1 g} = -\varphi_1 - H_0 - H_1 + \frac{\delta}{2}, \qquad \varphi_1 = \varphi_{A_1} = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{(d_1 - a)(1 - a_1)}{(a_1 - a)(1 - d_1)}. \qquad (30)$$

Здесь d_1, a_1 — соответственно аффиксы точек D_1, A_1, вычисляемые по заданным координатам $x_{D_1} = L_1$, $y_{A_1} = H_0 + H_1 - \delta/2$ на границе. Выражение для величины φ_1 в (30), равной разности потенциалов на скважине и контуре питания, получено из зависимости (2), в которой постоянная φ_C определена на основе (29).

При каждом значении Q, фиксируемом при решении уравнения (30), параметры M, a, c, f, r вычисляются по изложенному в п. **3** алгоритму. Реализация этого алгоритма обусловлена ограничениями (28), второе из которых позволяет получить параметр r в качестве одного из корней уравнения (22). В соответствии с этим последовательность решения подсистемы уравнений (25), (27) изменяется: левая часть уравнения (25) рассматривается как сложная функция параметра $a \in (-\infty, 0)$, а параметр c определяется во внутреннем цикле итерационной процедуры в результате решения уравнения (27). На каждом шаге цикла верхняя граница c_* допустимых значений параметра c, зависящая от параметров a, Q, вычисляется предварительно из соотношения (13). При решении уравнения (30) учитывается, что при $Q \in (0, Q_*)$ функция $p(Q)$ монотонно возрастает. Этот факт устанавливается численно.

5. Случай жидкости меньшей плотности, покоящейся под кровлей пласта. Предположим, что над потоком жидкости с плотностью ρ_2 и вязкостью μ_2 находится жидкость с меньшей плотностью ρ_1. Последняя имеет вязкость μ_1, вообще говоря, отличающуюся от μ_2, и примыкает к кровле пласта. В этом случае область z, представленная на

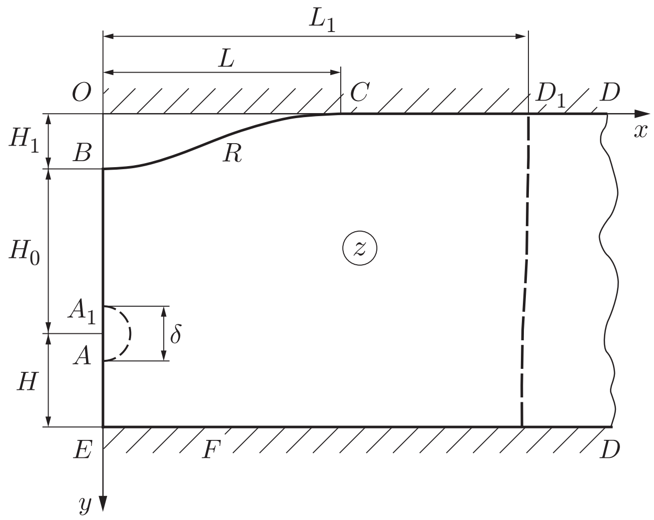

Рис. 6. Область течения в пласте с жидкостью под кровлей пласта

рис. 6, является зеркальным отражением исходной области фильтрации в оси x. В краевой задаче сохраняются граничные условия (1) включая первое условие на BC, в котором параметр ρ определяется равенством

$$\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2. \tag{31}$$

При $\rho_1 = 0$, $\rho = 1$ равенство (31) переходит в известное условие на свободной поверхности, а краевая задача описывает фильтрацию к скважине в нефтеносном пласте с газовой шапкой.

Области остальных функций, используемых при решении задачи, так же, как и область z, симметричны соответствующим областям, представленным на рис. 2–5, относительно оси абсцисс. Это означает, что все полученные выше аналитические зависимости переносятся на рассматриваемое течение. Тем не менее при одних и тех же определяющих физических параметрах соответствующие фильтрационные характеристики различны, поскольку при одинаковых плотностях ρ_1 и ρ_2 параметр ρ в исходной и рассматриваемой схемах имеет разные значения.

Максимальный объем жидкости, покоящейся над потоком при заданном дебите скважины, определяется, как и прежде, в критическом режиме, при котором точка B превращается в точку заострения линии раздела. В данном случае $p = -\rho_2 g(\varphi - y)$, и из соотношения $w_y = d\varphi/dy \geqslant \rho$ при параметре ρ, определяемом согласно (31), следует неравенство $dp/dy = -\rho_2 g(w_y - 1) \leqslant -\rho_1 g$. Таким образом, в рассматриваемом случае течение в критическом режиме также реализуется на грани нарушения гидростатического равновесия покоящейся жидкости.

6. Численные расчеты, анализ течения. На основе полученных аналитических зависимостей разработаны алгоритмы расчета характеристик течения. В каждой из двух рассмотренных выше постановок краевой задачи определяющими физическими параметрами являются плотности фильтрующейся и покоящейся жидкостей и расстояние от кровли пласта до точечного стока A, моделирующего скважину, а при задании давления в скважине — также ее диаметр (в этом случае в схему течения включается контур питания).

Что касается дебита скважины или давления на ней, то заданию одного из этих параметров должно предшествовать нахождение его максимально допустимого значения в критическом режиме с одновременным нахождением объема V жидкости, остающейся неподвижной при откачке из скважины (эта величина включается в число определяющих физических параметров при последующих расчетах течения в нормальном режиме).

Приведем пример расчетов по описанной выше вычислительной процедуре для конкретной комбинации входных параметров, полагая $\rho_1 = 0{,}8$, $\rho_2 = 1$, $H = 0{,}2$ и задавая давление в скважине диаметром $\delta = 0{,}01$, а также абсциссу $L_1 = 3$ точки D_1 контура питания. У используемой при расчетах пьезометрической высоты $p^0 = p/(\rho_1 g)$ верхний индекс 0 опускается.

Сначала будем считать, что фильтруется более легкая жидкость. В этом случае согласно (1) имеем $\rho = 0{,}25$. Предположим, что в критическом режиме зафиксированы значения $Q = Q_* = 1$, $p_0 = p_{0*} = -6$, при этом $V = 0{,}006\,55$, $H_1 = 0{,}1729$, $L = 0{,}1131$, $p_{1*} = -5{,}0624$. Таким образом, значение $\Delta p = 0{,}9376$ принимается равным потерям давления при прохождении жидкости сквозь фильтр. Используя этот параметр для корректировки величины p_0, при дальнейших расчетах можно считать заданным давление p_1 на скважине в точке A_1. В каждом расчетном варианте в числе параметров, определяющих течение, задается найденная для критического режима и фиксируемая в дальнейшем величина V объема подошвенной воды, содержащаяся в уравнении (27).

Для значений $p_1 = -4$; -2; -1; $-0{,}8$; $-0{,}7971$ найдено соответственно $Q = 0{,}7510$; $0{,}2824$; $0{,}0480$; $0{,}0012$; $0{,}0005$, $H_1 = 0{,}0981$; $0{,}0535$; $0{,}0260$; $0{,}0063$; $0{,}0044$, $L = 0{,}1322$; $0{,}2020$; $0{,}3933$; $1{,}7526$; $2{,}6338$. Согласно (30) при $p_1 = -0{,}8$; $-0{,}7971$ разность потенциалов на скважине и контуре питания уменьшается до значений $\varphi_1 = 0{,}0050$; $0{,}0021$ соответственно, что приводит к практически полному прекращению притока в скважину и растеканию воды по подошве пласта.

Глубина заложения скважины и задаваемое в ней давление (или ее дебит) являются технологическими параметрами, определяющими режим откачки. В конкретной ситуации их следует согласовывать с параметрами, характеризующими естественное состояние пласта. К числу таких параметров относятся величины V, ρ, а в постановке с заданным давлением на скважине — также пластовое давление и расстояние от контура питания до скважины. Максимальный дебит скважины без захвата ею подошвенной воды достигается в случае, если скважина расположена непосредственно под кровлей пласта, т. е. при $H = 0$. В рассмотренном примере для такой скважины в критическом режиме получены значения $Q_* = 1{,}1085$; $p_{1*} = -7{,}2376$.

Столь значительное увеличение степени вакуумирования по сравнению со значением, вычисленным при $H = 0{,}2$, обусловлено как возрастанием продуктивности скважины, так и ее расположением на большей высоте. Поэтому при откачке в нормальном режиме целесообразно закладывать скважину настолько глубоко, насколько это возможно при данном ее дебите без вовлечения в движение воды, минимизируя тем самым влияние силы тяжести. Например, если $Q = 0{,}1$, то нормальный режим откачки сохраняется до значения $H = 0{,}7978$, при котором $p_1 = -0{,}6339$, тогда как при $H = 0$ имеем $p_1 = -1{,}5559$.

При фиксированном давлении на скважине и контуре питания расстояние L_1 между ними является одним из главных параметров, определяющих интенсивность потока. Так, при $H = 0{,}2$, $p_1 = -4$ с увеличением L_1 от 3 до 7 дебит Q уменьшается с 0,7510 до 0,3877. При этом вода растекается по подошве пласта: $H_1 = 0{,}0981$; $0{,}1322$, $L = 0{,}0627$; $0{,}1776$ соответственно. Заметим, что уже при $L_1 = 3$ эквипотенциаль, принимаемая в качестве контура питания, практически вертикальна: на кровлю пласта она выходит в точке с абсциссой $x = 3{,}000\,08$.

В числе других характеристик определяется также значение максимальной скорости фильтрации на границе области течения $|w_F|$ и абсцисса x_F точки F, в которой эта скорость достигается. Согласно расчетам точка F находится на кровле или подошве при функционировании скважины соответственно в верхней или нижней части пласта, а ее положение практически не зависит от давления на скважине, в то время как зависимость $|w_F|(Q)$ близка к пропорциональной. При выбранных входных параметрах во всем диапазоне значений давления на скважине $x_F = 0{,}215$, $|w_F|/Q = 1{,}70$ (изменения зафиксированы лишь в следующих знаках после запятой).

Параметр ρ оказывает существенное влияние на объем V подошвенной жидкости, остающейся неподвижной при откачке из скважины, причем при реальных, исчисляемых сотыми долями единицы, значениях параметра ρ величины H_1, L приближенно пропорциональны этому параметру, а величина V — его квадрату. Однако на основные структурные характеристики потока изменение ρ практически не влияет.

В подтверждение сказанному выше приведем результаты расчетов, выполненных при $H = 0{,}2$, $\delta = 0{,}01$, $Q = 1$, $L_1 = 3$, $\rho = 0{,}2500$; $0{,}0250$; $0{,}0025$. При этих значениях параметра ρ в критическом режиме течения имеем соответственно $H_1 = 0{,}172\,88$; $0{,}017\,76$; $0{,}001\,77$, $L = 0{,}113\,064$; $0{,}011\,306$; $0{,}001\,131$, $V = 66\cdot 10^{-4}$; $67\cdot 10^{-6}$; $67\cdot 10^{-8}$; вместе с тем во всех трех вариантах получены значения $p_1 = -5{,}062$, $x_F = 0{,}2146$, $w_F = -1{,}701$. Выявленные закономерности проявляются также при заложении скважины на больших глубинах. В частности, при $H = 0{,}8$ и трех указанных выше значениях ρ (при тех же прочих входных параметрах) имеем соответственно $V = 74\cdot 10^{-6}$; $75\cdot 10^{-8}$; $75\cdot 10^{-10}$, $H_1 = 0{,}018\,622$; $0{,}001\,875$; $0{,}000\,187$, $L = 0{,}011\,936$; $0{,}001\,194$; $0{,}000\,119$, $p_1 = -4{,}469$; $x_F = 0{,}2146$, $w_F = -1{,}701$. Отметим, что в обеих сериях (при $h = 0{,}2$; $0{,}8$) значения x_F и w_F одинаковы, различие заключается лишь в том, что в первой серии точка F находится на кровле пласта, а во второй — на его подошве.

Отмеченная в п. **2** инвариантность геометрических характеристик потока к изменению величин Q и ρ при сохранении их отношения проявляется и в общем случае, а составляющие скорости фильтрации в каждой точке изменяются, как и в критическом режиме, пропорционально указанным величинам.

В случае $H = 0$, когда сток A, располагаясь на кровле пласта, совмещается с угловой точкой E, имеем $a = -\infty$. При этом полученные выше зависимости и основанные на них вычислительные алгоритмы существенно упрощаются. В частности, в критическом режиме с высокой точностью выполняется равенство $L \approx \rho/(2Q)$. Близкая к линейной зависимость $L(\rho)$ в общем случае зафиксирована в приведенном выше примере численных расчетов.

Предположим теперь, что фильтруется более тяжелая жидкость. Согласно (31) при прежних значениях $\rho_1 = 0{,}8$, $\rho_2 = 1$ имеем $\rho = 0{,}2$. Величина H представляет собой расстояние от подошвы пласта до стока A (см. рис. 6). Все детали выполненного выше анализа переносятся на рассматриваемую ситуацию с учетом отмеченной в п. **5** переориентации области течения относительно кровли и подошвы пласта. В частности, при $H = 0{,}2$, $Q = 1$ для критического режима, являющегося исходным при расчетах, имеем $V = 0{,}004\,22$, $p_1 = -5{,}0623$, $H_1 = 0{,}1396$, $L = 0{,}0905$, $x_F = 0{,}2146$, $w_F = -1{,}7013$. Сопоставление этих значений с полученными при $\rho = 0{,}25$ подтверждает заключение о том, что величина ρ существенно влияет лишь на параметры конуса покоящейся жидкости, примыкающей в данном случае к кровле. Точка F максимума скорости фильтрации находится теперь на подошве пласта.

Рассмотрим отмеченный в п. **5** случай $\rho_1 = 0$, $\rho = 1$, соответствующий фильтрации жидкости в пласте с газовой шапкой. В этом варианте при $H = 0{,}2$, $Q = 1$ для критического режима получены значения $V = 0{,}0823$, $p_1 = -5{,}0833$, $H_1 = 0{,}5180$, $L = 0{,}4525$, $x_F = 0{,}2164$, $w_F = -1{,}7196$. Объем V газовой шапки, частично проникающей в нижнюю часть пласта, значительно превышает приведенное выше значение, найденное при $\rho_1 = 0{,}8$. Заметим, что в данном случае дебит скважины $Q = 1$ обеспечивается практически при том же давлении p_1 на контуре скважины, что и в предыдущем варианте расчета.

Заключение. В работе построены точные решения ряда стационарных задач о притоке жидкости к горизонтальной скважине в условиях, когда в пласте присутствует также жидкость с иными физическими параметрами, примыкающая к подошве или кровле пласта. Разработан алгоритм расчета вспомогательных параметров в прямой постановке. Проведены вычисления, позволившие описать геометрические свойства области течения в зависимости от глубины заложения скважины, ее дебита или давления внутри нее. Установлена определяющая роль критических режимов течения при оценке диапазонов значений технологических параметров эксплуатации нефтяного пласта, исключающих прорыв в скважину подошвенной воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
2. **Маскет М.** Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004.
3. **Чарный И. А.** Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
4. **Пирсон С. Д.** Учение о нефтяном пласте. М.: Гостоптехиздат, 1961.
5. **Kidder R. E.** Flow of a immiscible fluids in a porous media: Exact solution of a free boundary problem // J. Appl. Phys. 1956. V. 17, N 8. P. 867–869.

Поступила в редакцию 29/VI 2007 г.