

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДАВЛЕНИЯ ДЕТОНАЦИИ ВОДОРОДОКИСЛОРОДНОЙ СМЕСИ ИНЕРТНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

А. В. Фёдоров, Д. А. Тропин, И. А. Бедарев

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск
fedorov@itam.nsc.ru, D.A.Tropin@yandex.ru, bedarev@itam.nsc.ru

Работа посвящена проблеме поиска способов управления, подавления и ослабления взрывных и детонационных процессов в гомогенных/гетерогенных средах (смесях реагирующих газов и инертных компонентов). Анализ проводится с помощью аналитических и численных методов. Дана постановка и приведено решение задачи о подавлении детонации в смеси реагирующих газов и инертных компонентов (аргона и частиц песка) в одномерном нестационарном течении. Определено влияние диаметра и концентрации частиц на скорость детонации, рассчитаны и сопоставлены параметры детонационной волны в стехиометрической водородокислородной смеси, разбавленной химически инертным газом — аргонном и частицами. Исследовано влияние начальных параметров смеси на возможности подавления детонации инертными частицами. Показано, что с ростом объемной концентрации частиц скорость детонации значительно уменьшается. Было также установлено, что уменьшение размера частиц при сохранении их доли в объеме также приводит к уменьшению скорости детонации.

Ключевые слова: подавление детонации, математическое моделирование, смесь реагирующих газов и инертных частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы детонации газозвесей реагирующих газов и твердых инертных частиц привлекают внимание многочисленных исследователей [1–5]. Вызвано это тем обстоятельством, что при транспортировке смесей горючих газов к местам потребления, при их использовании в промышленных производствах и быту происходят аварийные взрывы. Одним из способов подавления неконтролируемой детонации является метод гашения с помощью добавления инертных частиц. При этом наличие частиц в реагирующей газовой смеси приводит к различным картинам протекания детонации смеси.

Оказалось, что добавление химически инертных твердых частиц — эффективный способ контролирования и модификации процессов горения и детонации в газовых системах. Этот способ может быть использован, например, для того, чтобы уменьшить скорость детонации и длину зоны реакции [2].

Следует отметить, что описанные в литературе экспериментальные исследования по-

давления детонации добавлением в поле течения инертных мелких частиц носят фрагментарный характер. Так, авторы [1] исследовали подавление детонации в смесях метан — кислород, пропан — кислород. Эксперименты выполнены для различных составов смеси, изменялись содержания компонентов газа и масса инертных примесей. Приведены данные по минимальной массе и суммарной площади поверхности частиц солей калия и натрия, которые необходимы для гашения детонационной волны (ДВ) в ранее указанной смеси газов.

Согласно экспериментам эффективность подавления волны инертными частицами повышается при увеличении концентрации, уменьшении размера и плотности частиц. Влияние таких свойств частиц, как теплоемкость, температура и теплота плавления, и начальных параметров смеси на процесс подавления детонации, как правило, не исследовалось.

Теоретические исследования распространения и подавления ДВ в газах с химически инертными частицами проведены в [2], где предложена физико-математическая модель детонации реагирующего газа и инертных частиц в двухскоростной двухтемпературной смеси при условии мгновенного тепловыделения за фронтом ДВ. После некоторых преобразований получено выражение для плотности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-92010-ННС-а) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2009 г. (код проекта 2.1.1/4674).

газа в течении. Требуя равенства нулю некоторого подкоренного выражения и анализируя его при концентрации частиц, стремящейся к нулю, авторы получили выражение для скорости детонации в чистом газе. Это позволило им определить в последующем, используя лишь информацию о времени задержки воспламенения и некоторые качественные соображения, скорость ДВ в смеси газа и частиц, а затем и реализовать итерационную процедуру для определения влияния частиц на скорость детонации в смеси. Проведены расчеты и сделан общий вывод, что скорость детонации в такой смеси уменьшается при добавлении частиц.

В [3–5] для описания данного явления предложена математическая модель в рамках механики двухскоростной двухтемпературной гетерогенной среды, когда газовая смесь реагирует в соответствии с аррениусовской кинетикой, а частицы являются инертными. На ее основе решена задача о структуре ДВ, для чего выполнен качественный анализ соответствующей системы уравнений, описывающих детонационное течение. Показано, что при условии сверхзвукового течения по замороженной скорости звука в конечной точке последняя является достижимой и описывает течение недожатой детонации. Если же течение в конечной точке дозвуковое по равновесной скорости звука, то такая конечная точка тоже достижима, а траектория описывает пересжатое детонационное течение. Отмечается, что имеются также структурно-неустойчивые конечные состояния, когда конечная точка в некоторой гиперплоскости является седлом. Численные расчеты, иллюстрирующие доказанные положения, показали, что при увеличении диаметра частиц и их фиксированном содержании перед фронтом волны наблюдается непрерывный переход скорости детонации от некоторого значения D_e к большему D_f . В [5, 6] данная математическая модель была применена для описания детонации водородовоздушной смеси и верифицирована с помощью экспериментальных данных по зависимости скорости детонации от объемной концентрации частиц [7]. Отметим также работу [8], где представлены данные по подавлению детонации в метановоздушных смесях частицами SiC размером $450 \div 3450$ мкм. Показано, что при этом расширяются пределы детонации, уменьшаются энергия иницирования и скорость детонации. Вблизи критических условий наблюдалось большее количе-

ство типов неустойчивостей. Отмечается ключевая роль удельной поверхности частиц в подавлении детонации. Оказалось, что при фиксированной концентрации частиц, но их значительных размерах гетерогенная детонация может распространяться в метановоздушной смеси с частицами. Впоследствии в [9] также исследовалась структура ДВ и устойчивость детонации в смесях реагирующих газов и твердых частиц в рамках модели механики гетерогенных сред, как в одномерном, так и в двумерном нестационарном течении. В этой работе численно проанализировано влияние диаметра и концентрации частиц на скорость детонации и другие параметры смеси.

В [10] был проведен расчет подавления детонации в стехиометрической водородокислородной смеси инъекцией химически инертных частиц Al_2O_3 , SiO_2 , W. Для этой цели в рамках модели приведенной равновесной кинетики предлагается модель химического равновесия в смеси газа и химически инертных частиц. На ее основе получены распределения параметров смеси — зависимости теплоемкости, молярной массы и показателя адиабаты от температуры газа для смеси $H_2—O_2—W$ в плоскости Чепмена — Жуге. Показано, что скорость детонационной волны уменьшается с увеличением массовой доли частиц, и установлено, что из рассматриваемых в работе частиц наиболее эффективны частицы Al_2O_3 . Кроме того, получены распределения тех же параметров в пике Неймана и зависимости продольного размера детонационной ячейки от массовой доли частиц Al_2O_3 , SiO_2 , W. Показано, что размер ячейки увеличивается при возрастании массовой доли частиц. В расчетах полагалось, что зависимость размера ячейки детонации в газе с химически инертными частицами от параметров смеси имеет тот же вид, что и аналогичная зависимость в случае газовой детонации без частиц. Аналитически проведена оценка минимальной массы частиц, необходимой для подавления многофронтной ДВ, в приближении равенства расстояния между лидирующим фронтом ДВ и плоскостью Чепмена — Жуге размеру детонационной ячейки.

Таким образом, рамки применяемых математических моделей для описания детонационных явлений в газозвзвях ограничены моделями равновесной [2, 10], модельной или приведенной кинетики химических превращений [3–6, 9] в ДВ. Поэтому представляется интерес-

ным развить теоретическую модель этих явлений, которая позволила бы детально описать структуру ДВ, выявить соответствие между данными, полученными на основе детальной и приведенной кинетики. В представляемом исследовании примем математическую модель, в которой не учитывается движение частиц (модель замороженной по скорости смеси, неравновесной по температурам), но с учетом детальной кинетики [11].

1. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ И ПОДАВЛЕНИИ ДЕТОНАЦИИ В СМЕСИ ВОДОРОДА И КИСЛОРОДА В ПРИСУТСТВИИ МЕЛКИХ ЧАСТИЦ

Физико-химико-математическая модель. Основные уравнения

Рассмотрим ударную трубу, заполненную газовой смесью водорода, кислорода, аргона, а также распределенными в пространстве частицами. Пусть по смеси распространяется ударная волна (УВ). При некоторых условиях на число Маха УВ параметры смеси могут превысить критические для воспламенения и горения значения и будет возможен дефлаграционно-детонационный переход. В одномерной нестационарной постановке динамика смеси описывается уравнениями неравновесной газовой динамики:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 U_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_1 U_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 U_1^2 + p)}{\partial x} = -f,$$

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 U_1(E_1 + p/\rho_1))}{\partial x} = -q - fU_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 E_2)}{\partial t} = q + fU_1.$$

Здесь и далее индекс 1 относится к смеси газов, 2 — к частицам, $E = e + U^2/2$ — полная энергия фазы или компонента, ρ , U , p , e — плотность, скорость, давление и внутренняя энергия смеси соответственно. Внутренняя энергия реакционно-способной смеси определяется из соотношения

$$e = c_v T + \sum_{\alpha=1}^8 \xi_{\alpha} h_{0\alpha} - c_p T_{00},$$

где c_p , c_v — удельные теплоемкости смеси при постоянном давлении и постоянном объеме, ξ_{α} — относительная массовая концентрация компонента α , $c_v = \sum_{\alpha=1}^8 c_{v,\alpha} \xi_{\alpha}$, $h_{0\alpha}$ — энтальпия образования компонента. Значение α меняется от 1 до 8, $T_{00} = 298.15$ К.

Считаем, что частицы неподвижны, т. е. $U_2 = 0$. Тогда полная энергия частиц будет иметь вид $E_2 = c_{v,2} T$. Законы обтекания и теплообмена между газом и частицами выражаются известными формулами:

$$f = \frac{3m_2 \rho_{11}}{4d} C_D U_1^2, \quad q = \frac{6m_2 \lambda_1}{d^2} \text{Nu}(T_2 - T).$$

Здесь m_2 — объемная концентрация частиц; λ_1 — теплопроводность газа; d — диаметр частицы; зависимость числа Нуссельта от чисел Рейнольдса и Прандтля принимается в виде $\text{Nu} = 2 + 0.6 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$; коэффициент сопротивления с учетом его зависимости от числа Рейнольдса и числа Маха относительного движения частиц определяется по формуле Эргана, приведенной и подтвержденной сопоставлением с экспериментом в [12]:

$$C_D = \left[1 + \exp\left(-\frac{0.43}{M_{12}^{4.67}}\right) \right] \left[0.38 + \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt{\text{Re}}} \right],$$

где $\text{Re} = \frac{\rho_{11} d U_1}{\mu}$, $M_{12} = \frac{U_1 \sqrt{\rho_{11}}}{\sqrt{\gamma_1 p}}$, γ_1 — показатель адиабаты газа. Систему (1) дополним уравнением состояния для газовой смеси в целом

$$p = \rho T R \sum_{\alpha=1}^8 \frac{\xi_{\alpha}}{M_{\alpha}} \quad (2)$$

и в случае использования детальной кинетики [11] — уравнениями химических превращений

$$\frac{d\xi_{\alpha}}{dt} = \frac{1}{\rho} M_{\alpha} \sum_{r=1}^l \rho^{m_r} (\nu'_{\alpha r} - \nu_{\alpha r}) \times \left[k_{fr} \prod_{\beta=1}^8 \left(\frac{\xi_{\beta}}{M_{\beta}}\right)^{\nu_{\beta r}} - k_{br} \prod_{\beta=1}^8 \left(\frac{\xi_{\beta}}{M_{\beta}}\right)^{\nu'_{\beta r}} \right]. \quad (3)$$

Здесь M_{α} , M_{β} — молекулярные массы компонентов α , β ; m_r — порядок r -й реакции, $\alpha = 1, \dots, 8$; $\nu_{\alpha r}$, $\nu'_{\beta r}$ — стехиометрические коэффициенты, со штрихом — относящиеся к продуктам реакции r ; k_{fr} , k_{br} — скорости прямой и

обратной реакций. Система (1)–(3) позволяет после постановки соответствующей начально-краевой задачи рассчитать картину распространения ударной/детонационной волны в канале, заполненном смесью газов и частиц.

Постановка задачи. Считается, что ударная труба разбита на две камеры: камеру высокого давления (КВД), заполненную в начальный момент времени средой с высокими параметрами ($p_1 = 20$ атм, $T_1 = 1300$ К), и камеру низкого давления (КНД) ($p_0 = 1$ атм, $T_0 = 300$ К), где находится рабочая смесь водорода, кислорода, аргона, а также распределенные в пространстве частицы. После разрыва диафрагмы, разделяющей эти камеры, начинается процесс истечения газа в КНД, по которой распространяются контактный разрыв и УВ, возможно переходящая в детонационную волну, ослабляемую наличием холодных частиц. С математической точки зрения это задача о распаде произвольного разрыва для уравнений неравновесной газодинамики с учетом трения и теплообмена на частицах.

Численный метод. При решении системы одномерных нестационарных уравнений неравновесной газовой динамики для аппроксимации по времени использован конечно-разностный метод типа универсального алгоритма, для пространственной аппроксимации — TVD-схема третьего порядка точности с расщеплением вектора потоков по Ван Лиру. Детали алгоритма подробно изложены в [13], там же приведены данные тестирования этого численного метода.

Здесь лишь отметим, что после определения динамических и термодинамических параметров смеси на $(n + 1)$ -м шаге по времени решалась задача по определению относительных массовых концентраций компонентов смеси. Для этого на каждом временном шаге решалась задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики, записанных вдоль траекторий газовых частиц. Реализация осуществлялась решателем жестких систем RADAU5. Для интерполяции значений относительной массовой концентрации в узлы сетки применялась кубическая сплайн-интерполяция. Оказалось, что использование кубического сплайна для интерполяции решений, возникающих на контактных разрывах, разделяющих газы, приводит к возникновению осцилляций. Их удалось подавить использованием сглаживающего фильтра.

Тестирование: неустойчивость одномерной детонационной волны. В работах [14–19] описывается продольная неустойчивость ДВ, которая получается при исследовании детонационных процессов в рамках модели одномерной нестационарной неравновесной газовой динамики с учетом модельных одно- и двухстадийных кинетических законов окисления реагирующего компонента. Данный тип неустойчивости часто интерпретируется как моделирование проявлений ячеистой структуры детонации в одномерном нестационарном подходе. Он возникает при некоторых условиях на значение энергии активации и теплоподвода в решении задачи об ослаблении пересжатой ДВ волной разрежения. Было показано, что возможен выход как на режим Чепмена — Жуге, так и на колебательный аттрактор. Эта задача является дополнительной тестовой задачей для применяемого нами метода, тестированного в [13].

Нами использовалась модель неравновесной газовой динамики с учетом приведенной кинетики, которая описывалась уравнением $\frac{d\xi_{pr}}{dt} = k(1 - \xi_{pr}) \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$, где ξ_{pr} — массовая концентрация продуктов, E_a — энергия активации. Горючим считалась стехиометрическая смесь водорода и кислорода, а продуктами в рамках одностадийной кинетики (для простоты анализа) — лишь вода ($2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$). Тепловыделение $Q = -90$ кДж/моль соответствует скорости детонации Чепмена — Жуге для этой смеси.

В начальный момент времени данные Коши задавались как пересжатая ДВ. В зависимости от энергии активации E_a , теплоты химической реакции Q и степени пересжатия ζ были промоделированы ситуации, когда ДВ переходит в стационарный режим (рис. 1, а), пульсирующий режим (рис. 1, б) и затухающий режим (рис. 1, в).

На рис. 2, а приведены характеристики различных режимов распространения ДВ в зависимости от E_a и Q при фиксированном значении $\zeta = 1.1$. Видно, что с ростом энергии активации возрастает тепловой эффект реакции, при которой возможно существование пульсирующего режима.

На рис. 2, б приведены характеристики различных режимов распространения ДВ в зависимости от ζ и Q при фиксированном значении $E_a = 60 \cdot 10^3$ Дж/моль. Видно, что с ростом степени пересжатия уменьшается теп-

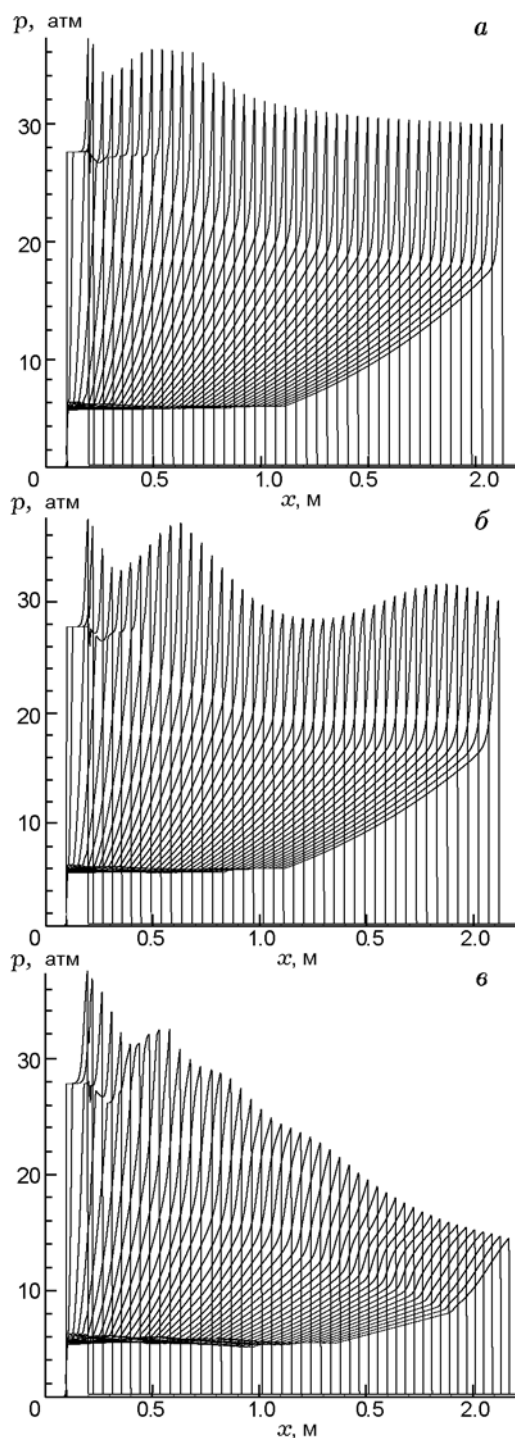


Рис. 1. Стационарный (а), пульсирующий (б) и затухающий (в) режимы распространения детонационной волны:
 $Q = -90 \cdot 10^3$ Дж/моль, $\zeta = 1.1$; $E_a = 60 \cdot 10^3$ (а), $70 \cdot 10^3$ (б), $80 \cdot 10^3$ Дж/моль (в)

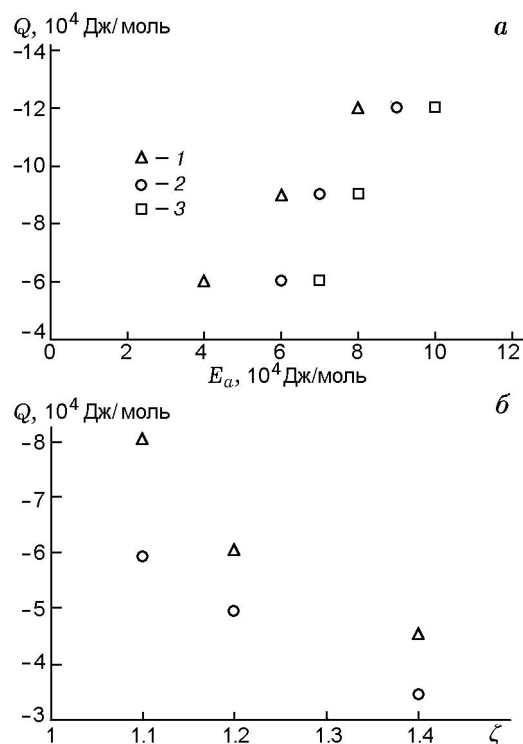


Рис. 2. Различные режимы распространения детонационной волны:
 а — в зависимости от E_a и Q при $\zeta = 1.1$, б — в зависимости от ζ и Q при $E_a = 60 \cdot 10^3$ Дж/моль;
 1 — стационарный режим, 2 — колебательный, 3 — затухающий

ловой эффект реакции, при которой возможно существование пульсирующего режима.

Таким образом, в соответствии с линейной теорией и численными расчетами, проведенными по другим методам [14–19], показано, что при использовании применяемого численного метода возможна реализация различных режимов выхода на аттракторы решения детонационной задачи при изменении значений E_a, Q .

Обсуждение результатов расчетов

Влияние содержания аргона на скорость детонации. Предварительно были проведены тестовые расчеты, верифицирующие используемую кинетическую схему [11] для описания процессов горения. Отметим, что ранее с ее помощью удалось удовлетворительно описать зависимость времени задержки воспламенения от обратной температуры [11]. Расчетные данные по зависимости скорости детонации в смеси водород — кислород — аргон, приведенные на

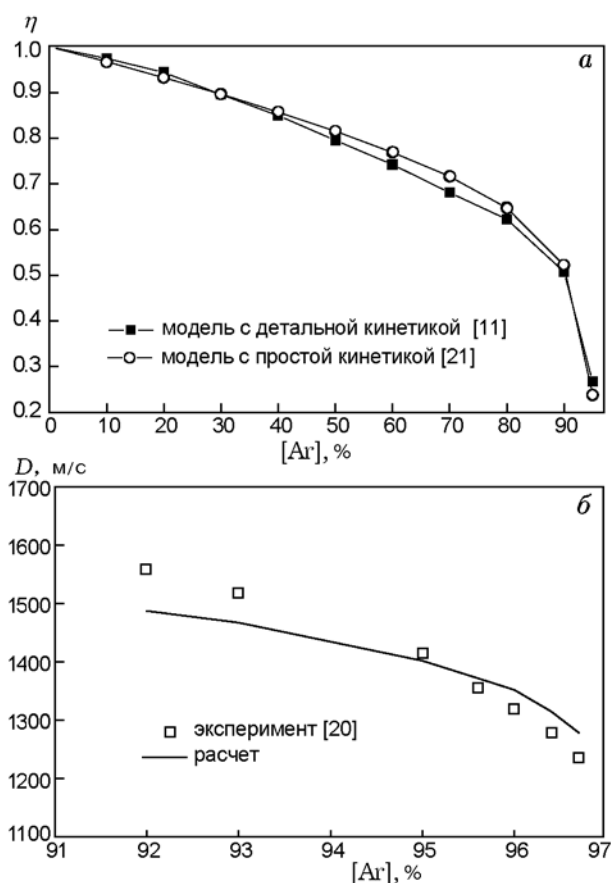


Рис. 3. Зависимости дефицита скорости детонации (а) и скорости детонации (б) от содержания аргона

рис. 3,а, показывают, что при увеличении доли аргона в смеси дефицит скорости детонации, равный $\eta = D/D_{CJ}$ (где D — скорость детонации в смеси газа и частиц, D_{CJ} — скорость детонации Чепмена — Жуге), уменьшается. В диапазоне $\eta \in (0.8, 1)$ эту функцию можно описать линейной зависимостью. После достижения критического значения 0.8 происходит резкое падение дефицита скорости детонации. Очевидно, что это обусловлено возрастанием количества тепла, отнимаемого от детонирующей смеси. На рис. 3,б приведены данные по скорости детонации в более узком диапазоне изменения концентрации аргона. Видно, что наши расчеты с точностью до 5 % совпадают с данными экспериментов [20], в которых $p_0 = 0.2$ атм, $T_0 = 295$ К. Полное подавление ДВ наблюдается при концентрациях аргона больше 95 %. Под подавлением будем понимать распад ДВ на затухающую замороженную УВ и отстающий фронт воспламе-

ния и горения. Таким образом, показано, что используемая кинетическая схема удовлетворительно описывает имеющиеся экспериментальные данные. Поэтому применим ее к расчету подавления детонации в песчаных или иных фильтрах.

Представляет интерес остаточное содержание водорода в продуктах горения после окончания детонационного процесса. Поэтому расчеты были проведены в чистой смеси без учета частиц для различного массового состава смеси: стехиометрическая смесь — $\xi_{H_2}^0 = \frac{1}{9}$, $\xi_{O_2}^0 = \frac{8}{9}$, $\xi_{H_2}^k = 0.25\xi_{H_2}^0$; обогащенный горючий газ — $\xi_{H_2}^0 = \frac{2}{9}$, $\xi_{O_2}^0 = \frac{7}{9}$, $\xi_{H_2}^k = 0.48\xi_{H_2}^0$; обедненный — $\xi_{H_2}^0 = \frac{1}{18}$, $\xi_{O_2}^0 = \frac{17}{18}$, $\xi_{H_2}^k = 0.11\xi_{H_2}^0$ (здесь индекс 0 соответствует начальному состоянию, k — конечному). Оказалось, что при прохождении ДВ по стехиометрической смеси остается 25 % водорода от первоначальной концентрации, в обогащенном газе — 48 %, в обедненном — 11 %.

Покажем, что в наших расчетах действительно наблюдался детонационный процесс, т. е. распространение стационарного самоподдерживающегося сверхзвукового фронта горения. Конкретнее, речь идет о том, что ударно-волновой комплекс, дополняемый фронтом воспламенения и горения, через некоторое время после установления начинает двигаться с постоянной скоростью. Для иллюстрации этого положения на рис. 4 приведено распределение

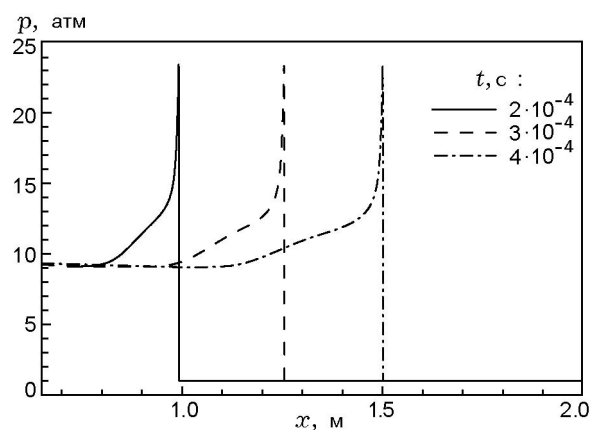


Рис. 4. Распределение давления в ударной трубе через одинаковые промежутки времени. Стационарность режима детонации

давления в ударной трубе в моменты времени $t = 2 \cdot 10^{-4}$, $3 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-4}$ с. Видно, что за равные промежутки времени ДВ проходит одинаковые расстояния. При этом скорость детонации соответствовала скорости Чепмена — Жуге.

Влияние содержания песка на скорость детонации. Далее в качестве инертного компонента были взяты частицы песка SiO_2 . Давление насыщенных паров конденсированной фазы считали пренебрежимо малым и реакции между парами конденсированной фазы и продуктами детонации не учитывали. В случае несправедливости данных предположений результаты расчетов могут рассматриваться только как качественные. На рис. 5 представлены распределения давления в ударной трубе в присутствии частиц диаметром $d = 10^{-4}$, 10^{-5} , 10^{-6} м с объемной концентрацией $m_2 = 10^{-4}$. Как видно, при уменьшении диаметра частиц давление за фронтом ДВ и ее скорость уменьшаются, поскольку при неизменной объемной концентрации площадь поверхности гасящих частиц увеличивается и тем самым возрастает тепловой поток от газа к частицам, т. е. увеличивается количество отобранного тепла.

В то же время уменьшение диаметра частиц приводит к сокращению времени их прогрева, поскольку мелкие частицы прогреваются быстрее. Для иллюстрации этого на рис. 6 приведено распределение температуры частиц диаметром $d = 10^{-4}$, 10^{-5} , 10^{-6} м с объемной концентрацией $m_2 = 10^{-4}$ в момент времени

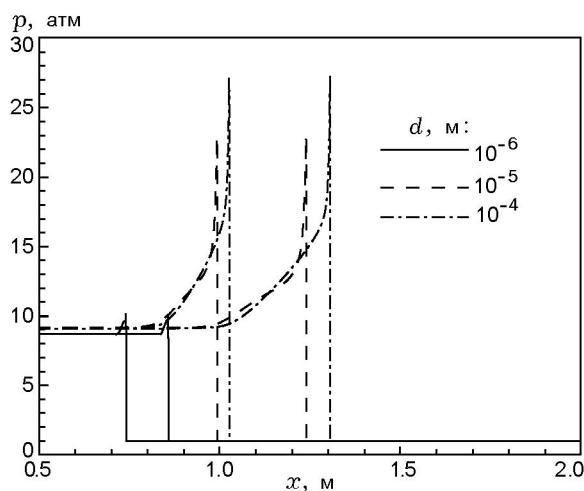


Рис. 5. Распределение давления в ударной трубе в присутствии частиц SiO_2 разного диаметра. Подавление детонации

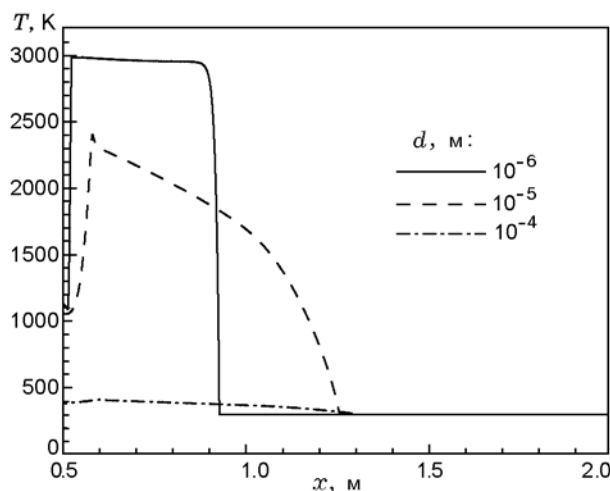


Рис. 6. Распределение температуры частиц разного диаметра в ударной трубе

$t = 3 \cdot 10^{-4}$ с. Видно, что для частиц диаметром $d = 10^{-6}$ м тепловое равновесие между фазами наступает уже в зоне реакции.

На основе многочисленных расчетов локальных характеристик процесса подавления ДВ были построены также интегральные характеристики — зависимости дефицита скорости детонации от относительной концентрации частиц $\eta(\xi_2) = D/D_{CJ}$ (рис. 7). Видно, что увеличение объемной концентрации частиц, так же как и рост массовой концентрации аргона, приводит к уменьшению скорости детонации. Кроме того, оказалось, что частицы размером 1 мкм гасят детонацию достаточно эффективно. Эти результаты качественно близки экспе-

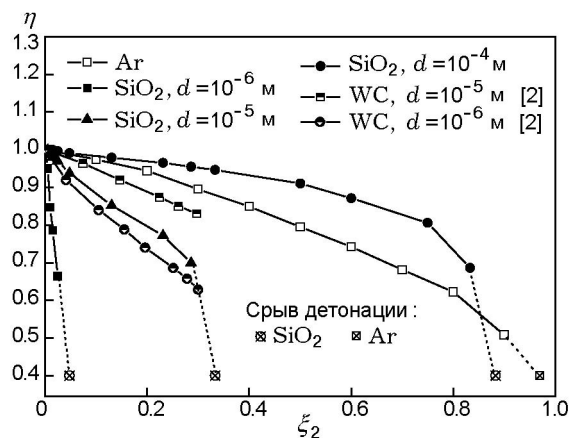


Рис. 7. Зависимости дефицита скорости детонации от массовой концентрации инертных компонентов

риментальным данным [8]. Частицы размером 100 мкм подавляют детонацию аналогично тому, как это происходит в смеси с добавлением аргона. Отметим, что частицы диаметром 100 мкм в широком диапазоне относительных концентраций $\xi_2 \lesssim 0.65$ малоэффективны. Однако после этого предельного значения происходит резкий спад в дефиците скорости, т. е. наступает «взрывное» гашение. Можно высказать суждение, что при этих концентрациях катастрофически нарастает тепло, отнимаемое от газовой фазы. Процесс подавления детонации частицами диаметром 1 и 10 мкм выражен более ярко, так как здесь углы наклона касательных к оси абсцисс по модулю больше, чем в предыдущем случае. На рис. 7 приведены также данные из работы [2], которые свидетельствуют, что расчеты дефицита скорости для смеси пропана с карбидом вольфрама коррелируют с нашими результатами.

2. ЗАДАЧА О СТРУКТУРЕ ДВ В СТЕХИОМЕТРИЧЕСКОЙ СМЕСИ $2\text{H}_2 + \text{O}_2 + \text{Ar}$

Физико-химико-математическая модель без учета задержки воспламенения

Представляется интересным с точки зрения практических серийных расчетов стационарных и нестационарных задач детонации сопоставить данные по детальной кинетике [11], используемой нами, и по приведенной кинетике, предложенной в модели Николаева — Фомина — Зака (НФЗ) [21]. Для рассмотрения удобно взять какое-либо простейшее одномерное течение, например, рассмотрим задачу о структуре ДВ. Подобные расчеты для узких каналов с учетом пульсаций скорости газа и трения о стенки выполнены в [22]. Поэтому рассмотрим пространство, заполненное стехиометрической смесью водорода, кислорода и аргона $2\text{H}_2 + \text{O}_2 + \text{Ar}$. Пусть по смеси распространяется плоская ДВ, за фронтом которой происходят воспламенение и последующее горение смеси. Уравнения, описывающие такое течение в системе координат, связанной с ДВ, имеют стандартный вид законов сохранения:

$$\begin{aligned} \rho U &= \rho_0 U_0 = c_1, \\ p + c_1 U &= p_0 + c_1 U_0 = c_2, \\ e(T, \mu) + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} &= e(T_0, \mu_0) + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{U_0^2}{2} = c_3, \end{aligned} \quad (4)$$

дополненных уравнениями состояния смеси $2\text{H}_2 + \text{O}_2 + \text{Ar}$ в однотемпературном приближении:

$$\begin{aligned} e &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 = (1 - \xi_2) e_1 + \xi_2 e_2, \\ e_1 &= e_1(T, \mu_1) = \frac{RT}{\mu_1} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\mu_1}{\mu_a} + 1 \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_a} - 1 \right) \frac{\theta/T}{\exp(\theta/T) - 1} \right] + E_d \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_{\min}} \right), \\ e_2 &= e_2(T) = c_{v,2} T, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p &= \rho T \frac{R}{\mu} = \rho RT \left[\frac{\xi_1}{\mu_1} + \frac{\xi_2}{\mu_2} \right] = \\ &= \rho RT \left[\frac{1 - \xi_2}{\mu_1} + \frac{\xi_2}{\mu_2} \right], \end{aligned}$$

и уравнением приведенной кинетики:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dx} &= \frac{W_\mu}{U}, \\ W_\mu &= W_\mu(T, \mu_1, \rho) = \\ &= 4K_+ [(1 - \xi_2)\rho]^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_{\max}} \right)^2 \frac{1}{\mu_1} - \\ &- A_2 T^{\frac{3}{4}} (1 - \xi_2)\rho \left[1 - \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right) \right]^{\frac{3}{2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{E_d}{RT}\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_{\min}} - 1 \right) = \\ &= \frac{b(\mu, U)}{U} = B(\mu, U). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь ρ — средняя плотность, p — давление, U — скорость, T — температура, e — внутренняя энергия смеси $2\text{H}_2 + \text{O}_2 + n\text{Ar}$, E_d — средняя энергия диссоциации продуктов реакции, μ — средняя молярная масса смеси $2\text{H}_2 + \text{O}_2 + n\text{Ar}$, μ_a , μ_{\min} , μ_{\max} — молярные массы смеси $2\text{H}_2 + \text{O}_2$ в атомарном, предельно диссоциированном и предельно рекомбинированном состояниях, μ_1 — молярная масса смеси водород — кислород, ξ_1 , ξ_2 — массовые доли смеси $2\text{H}_2 + \text{O}_2$ и аргона соответственно, связанные соотношением $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Это соотношение позволяет исключить из уравнений одно из ξ_i . Исключим ξ_1 и обозначим $\xi = \xi_2$. Индекс 0 соответствует начальному состоянию, индекс 1 — смеси водород — кислород, индекс 2 — аргону.

С помощью (4), (6) нетрудно получить уравнение для скорости смеси:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{W_\mu(p_T e_\mu - p_\mu e_T)}{\rho e_T(U^2 - a_f^2)} = \frac{a(\mu, U)}{c(\mu, U)} = A(\mu, U), \quad (7)$$

где производные от внутренней энергии в смеси без аргона таковы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \mu_1} = & -\frac{RT}{\mu_1^2} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\mu_1}{\mu_a} + 1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_a} - 1 \right) \frac{\theta/T}{\exp(\theta/T) - 1} \right] - \frac{E_d}{\mu_1^2} + \\ & + \frac{RT}{\mu_1} \left[\frac{3}{4\mu_a} + \frac{3}{2\mu_a} \frac{\theta/T}{\exp(\theta/T) - 1} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial T} = & \frac{R}{\mu_1} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\mu_1}{\mu_a} + 1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_a} - 1 \right) \frac{\theta/T}{\exp(\theta/T) - 1} \right] - \\ & - \frac{R}{\mu_1} \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_a} - 1 \right) \frac{\theta}{T^2} \frac{\exp(\theta/T) - 1 - \frac{\theta}{T} \exp(\theta/T)}{(\exp(\theta/T) - 1)^2}, \end{aligned}$$

а функция $a_f^2 = \frac{RT}{\mu} \gamma_f$ — замороженная скорость звука, γ_f — замороженный показатель адиабаты.

Уравнение (7), дополненное уравнением, описывающим приведенную кинетику (6), служит для определения вектора решений $\Phi(u, \mu)$, определяемого для двух функций: скорости и молекулярной массы смеси — из решения краевой задачи на собственное значение скорости детонации D . Решение должно быть определено на всей действительной прямой. Краевые условия традиционны и аналогичны поставленным в [4] для задачи о структуре детонационной волны. Они соответствуют условиям стационарности на $\pm\infty$ и условиям склейки равномерного и переменного потоков на замороженной УВ. При этом в зависимости от типа детонационного течения в конечной точке может быть поставлено условие для равновесного числа Маха $M_e = 1$ (для течения Чепмена — Жуге), либо для замороженного числа Маха

$M_f > 1$ (слабая детонация), либо для равновесного числа Маха $M_e < 1$ (сильная детонация). Тем самым физическая задача об определении типа детонационного течения в смеси сводится к решению краевой задачи, удовлетворяющей системе уравнений (6), (7) с краевыми условиями [4] на всей действительной прямой. Заметим, что плотность и давление выражаются через скорость явным образом, а температура из уравнения сохранения энергии — неявно, через скорость и молекулярную массу. Тем самым все параметры в системе (6), (7) могут быть выражены через $\Phi(u, \mu)$, и данную краевую задачу можно решить методом пристрелки.

Равновесные параметры и расчет скорости детонации Чепмена — Жуге

Известно, что до решения этой краевой задачи можно рассчитать равновесные параметры, т. е. параметры смеси в плоскости Чепмена — Жуге, вместе со скоростью ДВ. Определяющие уравнения при условии равновесия течения $W_\mu = 0$ являются нелинейными относительно переменных U, T , с неявной зависимостью $T(U)$, поэтому аналитически затруднительно получить равновесные параметры.

Тем не менее равновесные параметры могут быть получены численно. Алгоритм их нахождения заключается в следующем. Приравняв нулю уравнение для скорости реакции

$$W_\mu(T, \mu_1, \rho) = 4K_+ [(1 - \xi_2)\rho]^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_{\max}} \right)^2 \frac{1}{\mu_1} -$$

$$\begin{aligned} & - A_2 T^{\frac{3}{4}} (1 - \xi_2) \rho \left[1 - \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right) \right]^{\frac{3}{2}} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{E_d}{RT}\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_{\min}} - 1 \right) = 0, \end{aligned}$$

находим равновесное значение молярной массы смеси $\mu = \mu_e(T, u)$. Подставив это уравнение в уравнение состояния, получим равновесное уравнение состояния для мгновенно прореагировавшей смеси: $p = \rho T \frac{R}{\mu_e(\rho, T)}$, где μ_e — молярная масса смеси в состоянии химического равновесия. Тогда для расчета параметров за фронтом ДВ Чепмена — Жуге имеем три закона сохранения — массы, импульса и энергии, два представления (5) и условие Чепмена —

Жуге $U = c_e(\rho, T)$, где c_e — равновесная скорость звука. То есть имеем шесть уравнений для ρ , U , p , T , e , U_0 , определяющих параметры в точке Чепмена — Жуге. Следовательно, в целом задача является корректной, и если решение этой системы существует, то мы определяем детонационное течение Чепмена — Жуге. Эта система шести уравнений сводится к двум относительно скорости смеси в конечном и начальном состояниях, что определяет скорость Чепмена — Жуге при содержании аргона, равном нулю, — $D_{CJ} = 2900$ м/с, $U_k = 1535$ м/с, $T_k = 3500$ К, $p_k = 20$ атм. После определения скорости Чепмена — Жуге можно получить недосжатый и пересжатый режимы детонации, приняв скорость детонации большей D_{CJ} . Значения μ_e и c_e рассчитывались из аналитически полученных формул при условии, что соответствующий дискриминант положителен.

Замороженные параметры УВ и замороженная скорость звука

Параметры замороженной УВ рассчитывались по близкому алгоритму, но с учетом того, что в такой волне нет химической реакции, поэтому $\mu_f = \mu_0$, а скорость волны принималась равной скорости Чепмена — Жуге. Замороженные параметры для чистой смеси водород — кислород, например, такие как давление и температура, равны $p_f = 34.1$ атм, $T_f = 1975$ К.

Как уже говорилось ранее, для замороженного состояния уравнения имеют вид $p = p(\rho, T, \mu_f)$, $e = e(T, \mu_f)$. В соответствии с этим для замороженной скорости звука запишем

$$c_f^2 = \frac{\rho c_p \frac{\partial p}{\partial \rho}}{\rho c_p - pT} = \gamma_f \frac{p}{\rho}, \quad \text{где } \gamma_f = \frac{c_p}{c_p - R/\mu_f}. \quad (8)$$

Время задержки воспламенения

Для описания детальной структуры ДВ необходимо знать длину зоны индукции, т. е. время задержки воспламенения. Приведенные в литературе аппроксимационные формулы для времени задержки воспламенения t_{ign} учитывают влияние только одного из параметров — давления или начальных концентраций компонентов смеси и описывают конкретные экспериментальные данные соответствующего автора. Поэтому представляется актуальным опи-

сание данной величины в более широком диапазоне параметров. С этой целью был выполнен анализ ряда экспериментов [23–28] и предложена обобщенная зависимость времени задержки воспламенения от давления, концентраций компонентов и температуры за фронтом ДВ:

$$t_{ign} = [H_2]^{-0.23} [O_2]^{-0.5} p^{0.4} \cdot 10^{-9} \exp(9000/T). \quad (9)$$

Проведено сравнение данной формулы с предложенными ранее в литературе:

$$\text{формула Уайта: } t_{ign} = 4.17 \cdot 10^{-14} \times \exp(18100/RT) [O_2]^{-0.5} [H_2]^{-0.5}, \quad (10)$$

$$\text{формула Ферри: } t_{ign} = \frac{8 \cdot 10^{-9}}{p} \exp(9600/T), \quad (11)$$

$$\text{формула Щетинкова: } t_{ign} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{p} \exp(8600/T). \quad (12)$$

Здесь p — в атмосферах, t_{ign} — в секундах.

На рис. 8 приведены зависимости времени задержки воспламенения от температуры за ДВ, рассчитанные по формулам (9)–(12), а также данные экспериментов. В эксперименте [23] изучалась стехиометрическая водородокислородная смесь, разбавленная 94 % аргона: $2H_2 + O_2 + 47Ar$. Массовые доли компонентов для этой смеси равны $\xi_{H_2} = 2.1 \cdot 10^{-3}$, $\xi_{O_2} = 1.67 \cdot 10^{-2}$, $\xi_{Ar} = 0.981$. Давление перед фронтом ДВ составляло $p = 1$ атм. Как видно, формула Щетинкова (12) дает оценку снизу для экспериментальных данных, формула Уайта (10) — верхнюю. Формула Ферри (11) при малых температурах в диапазоне $1000 \div 1200$ К и формула Щетинкова (12) дают весьма близкие результаты в данной логарифмической шкале. Из рис. 8 следует, что все аппроксимации удовлетворительно описывают экспериментальные данные [23].

Однако данные эксперимента [24], проведенного в диапазоне температур $900 \div 1500$ К (см. рис. 8, б), значительно расходятся с результатами расчетов по формулам (10)–(12). При этом эксперимент [24] отличается от [23] начальными концентрациями компонентов ($\xi_{H_2} =$

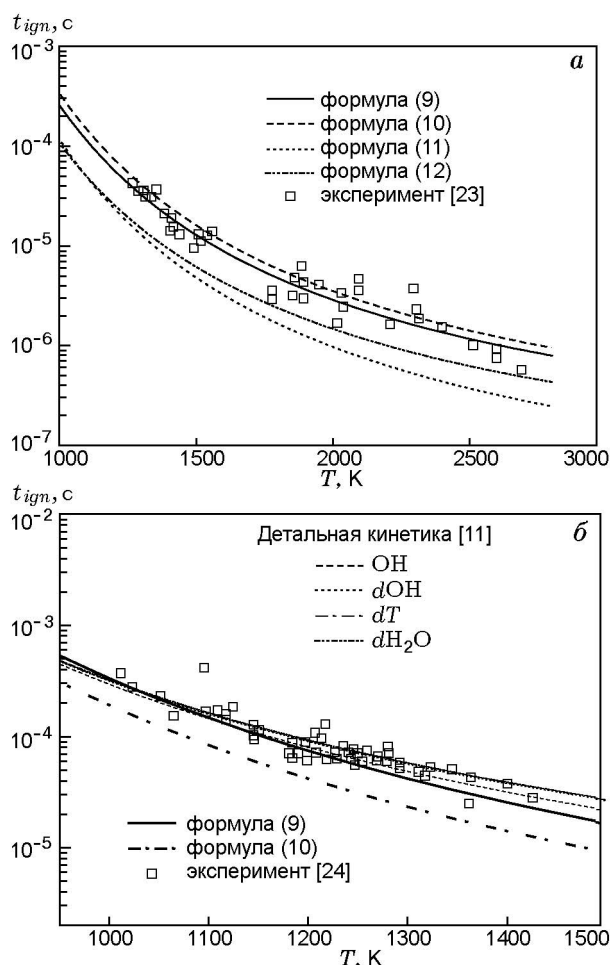


Рис. 8. Сопоставление результатов расчета времени задержки воспламенения в зависимости от температуры за ДВ с данными экспериментов [23] (а) и [24] (б)

$4 \cdot 10^{-3}$, $\xi_{O_2} = 2.8 \cdot 10^{-2}$, $\xi_{Ar} = 0.968$) и давлением перед фронтом ДВ ($p = 1.9$ атм).

На рис. 8, б приведены также результаты расчетов по формуле (9) и по модели с детальной кинетикой по четырем критериям воспламенения: максимум радикала OH, максимум роста радикала OH, максимум роста температуры T и максимум роста H_2O [11]. Видно, что они неплохо согласуются между собой.

Структура детонационной волны

Удалось определить структуру ДВ в рамках модели с приведенной кинетикой для широкой области параметров смеси водород — кислород — аргон на основе формул (4)–(6) и дать численные иллюстрации. Для этого первоначально были получены собственные числа

системы уравнений, определяющих структуру ДВ, из уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_U + B_\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_U + B_\mu}{2}\right)^2 - (A_U B_\mu - A_\mu B_U)}.$$

Поскольку в состоянии химического равновесия $W_\mu = 0$, то

$$A_U = W_U(p_T e_\mu - p_\mu e_T)/c(\mu, U),$$

$$A_\mu = W_\mu(p_T e_\mu - p_\mu e_T)/c(\mu, U),$$

$$B_U = W_U/U, \quad B_\mu = W_\mu/U.$$

Нетрудно заметить, что выражение $(A_U B_\mu - A_\mu B_U)$ обращается в нуль. Поэтому собственные значения будут иметь вид $\lambda_{1,2} = 0, A_U + B_\mu$. В соответствии с [29] такое состояние равновесия является сложным. Оно может иметь характер седла, узла, а также быть состоянием равновесия с одним узловым сектором и с двумя. Расчеты показали, что для детонационного течения Чепмена — Жуге реализуются траектории, достигающие конечной точки Чепмена — Жуге. Так, например, для случая чистой водородокислородной смеси собственные значения равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2.12 \cdot 10^{-1}$. Соответственно можно принять оценку длины зоны химической релаксации, равной $l = 1/|\lambda_2| = 4.67$. В размерных переменных $l = 2.14$ мм. Это значение близко к длине зоны горения, полученной на основе численных расчетов.

По оценкам [30] расстояние до поверхности Чепмена — Жуге не превышает нескольких размеров ячеек многофронтной детонации. В наших расчетах с приведенной двухстадийной кинетикой расстояние до точки Чепмена — Жуге равно приблизительно 2 мм. Зона горения, оканчивающаяся точкой Чепмена — Жуге, определялась по критерию $Me = 0.99$. В расчетах с использованием детальной кинетики это расстояние примерно равно 10 мм. С учетом того, что для данных параметров смеси размеры ячейки по экспериментальным данным [31–33] равны $1 \div 4$ мм, такие размеры зоны реакции не противоречат в целом оценкам и экспериментальным данным.

В качестве иллюстрации на рис. 9 приведено распределение параметров в ДВ для

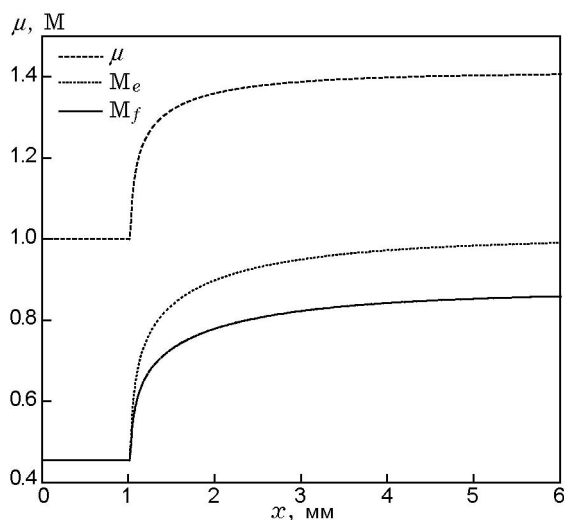


Рис. 9. Распределение замороженного и равновесного чисел Маха и молекулярной массы в структуре ДВ смеси (кинетика НФЗ)

стехиометрической водородокислородной смеси, разбавленной 90 % аргона. В точке 0 находится фронт ДВ, за ним идет зона индукции, в которой параметры не меняются, и далее зона горения. Конечное состояние характеризуется значениями $M_e = 0.999$, $p_k = 18.71$ атм, $T_k = 3258$ К. Протяженность зоны индукции составила $\lambda_{ind} = 1$ мм, зоны горения — $\lambda_{ign} = 17$ мм.

Сравнение двух моделей по интегральным характеристикам, т. е. зависимостям дефицита скорости ДВ от массовой доли аргона, показало хорошее соответствие полученных по ним дан-

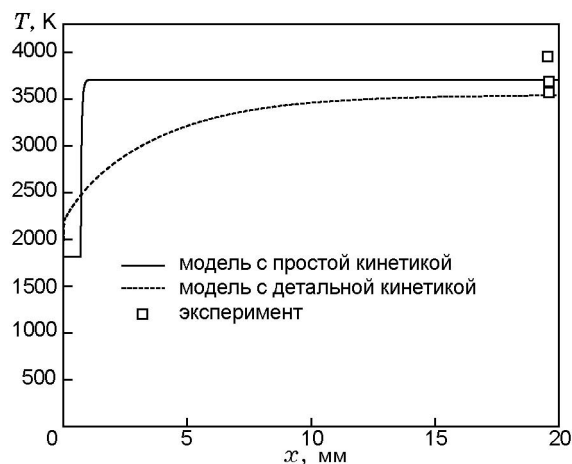


Рис. 10. Распределение температуры в структуре ДВ в смеси (сравнение двух моделей)

ных. Было проведено также сравнение моделей по локальным характеристикам ДВ. На рис. 10 приведено сравнение по температуре стехиометрической водородокислородной смеси.

ВЫВОДЫ

- Предложена физико-математическая модель подавления детонации в смеси водорода и кислорода, основанная на детальной кинетике, путем добавления инертных частиц. На ее основе найдены зависимости скорости детонации от размера и концентрации частиц. Выявлено, что лучшими свойствами для подавления детонации обладают частицы с большей плотностью и теплоемкостью.

- Определена структура стационарной одномерной ДВ в водородокислородной смеси, разбавленной аргоном. Сопоставлены процессы подавления детонации путем добавления гомогенной и гетерогенной фаз.

- Сравнение интегральных параметров, полученных по моделям простой кинетики Николаева — Фомина — Зака и детальной кинетики, показало их соответствие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Laffitte P., Bouchet R. Suppression of explosion waves in gaseous mixtures by means of fine powders // Proc. 7th Intern. Symp. on Combustion. — 1958.
2. Борисов А. А., Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М. Влияние твердых инертных частиц на детонацию горючей газовой смеси // Физика горения и взрыва. — 1975. — Т. 11, № 6. — С. 909–914.
3. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Детонационная динамика газозвесей. — Новосибирск, 1987. — (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. ИТПМ; № 23–87).
4. Казаков Ю. В., Миронов Ю. В., Федоров А. В. Режимы нормальной детонации в релаксирующих средах // Физика горения и взрыва. — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 119–127.
5. Казаков Ю. В., Миронов Ю. В., Федоров А. В. Расчет детонации газовой смеси при наличии инертных твердых частиц // Моделирование в механике. — 1991. — Т. 5 (22), № 3.
6. Fedorov A. V., Fomin V. M. Detonation of the gas mixtures with inert solid particles // IUTAM Symp. on Combustion in Supersonic Flows. — Kluwer Acad. Publ., 1997. — P. 147–191.
7. Wolinski M., Wolanski P. Gaseous detonation processes in presence of inert particles // Archivum Combust. — 1987. — V. 7, N 3/4. — P. 353–370.

8. **Wolanski P., Liu J. C., Kaufman C. W., Nicholls J. A., Sichel M.** The effect of inert particles on methane-air detonations // *Archivum Combust.* — 1988. — V. 8, N 1. — P. 15–32.
9. **Papalexandris M. V.** Numerical simulation of detonations in mixtures of gases and solid particles // *J. Fluid Mech.* — 2004. — V. 507. — P. 95–142.
10. **Фомин П. А., Чен Д.-Р.** Влияние химически инертных частиц на параметры и подавление детонации в газах // *Физика горения и взрыва.* — 2009. — Т. 45, №3. — С. 77–88.
11. **Бедарев И. А., Фёдоров А. В.** Сравнительный анализ трех математических моделей воспламенения водорода // *Физика горения и взрыва.* — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 26–33.
12. **Бойко В. М., Киселев В. П., Киселев С. П., Папырин А. Н., Поплавский С. В., Фомин В. М.** О взаимодействии ударной волны с облаком частиц // *Физика горения и взрыва.* — 1996. — Т. 32, № 2. — С. 86–99.
13. **Бедарев И. А., Фёдоров А. В.** Тестирование метода адаптивных сеток на расчетах одномерных детонационных волн // *Вычислительные технологии.* — 2009. — № 3.
14. **Fickett W., Wood W. W.** Flow calculations for pulsating one-dimensional detonations // *Phys. Fluids.* — 1996. — V. 9, N 5.
15. **Медведев С. А.** Об ослаблении пересжатых детонационных волн с конечной скоростью реакции // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* — 1969. — № 3.
16. **Левин В. А., Марков В. В.** Возникновение детонации при концентрированном подводе энергии // *Физика горения и взрыва.* — 1975. — Т. 11, № 4. — С. 623–633.
17. **Short M., Blythe P. A.** Structure and stability of weak-heat-release detonations for finite Mach numbers // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 2002. — V. 458. — P. 1795–1807.
18. **Lee H. I., Stewart D. S.** Calculation of linear detonation instability: one-dimensional instability of plane detonation // *J. Fluid Mech.* — 1990. — V. 216. — P. 103–132.
19. **Clavin P., He L.** Stability and nonlinear dynamics of one-dimensional overdriven detonations in gases // *J. Fluid Mech.* — 1996. — V. 306. — P. 353–378.
20. **Akbar R.** Mach reflection of gaseous detonations: Ph. D. thesis / Rensselaer Polytechnic Inst. — Troy, New York, Aug. 1997.
21. **Fomin P. A., Trotsyuk A. V., Vasil'ev A. A., Mitropetros K., Hieronymus H., Roekaerts D.** Model of chemical reaction kinetics for calculating detonation processes in gas and heterogeneous mixtures containing hydrogen peroxide // *Combust. Sci. Technol.* — 2006. — V. 178, N 5. — P. 895–919.
22. **Николаев Ю. А., Гапонов О. А.** О пределах детонации в газах // *Физика горения и взрыва.* — 1995. — Т. 31, № 3. — С. 139–145.
23. **Schott G. L., Kinsey J. L.** Kinetic studies of hydroxyl radicals in shock waves. II. Induction times in the hydrogen-oxygen reactions // *J. Chem. Phys.* — 1958. — V. 29. — P. 1177–1182.
24. **Cheng R. K., Oppenheim A. K.** Autoignition in methane-hydrogen mixtures // *Combust. Flame.* — 1984. — V. 58. — P. 125–139.
25. **Hidaka Y., Sato K., Henmi Y., Tanaka H., Inami K.** Shock-tube and modeling study of methane pyrolysis and oxidation // *Combust. Flame.* — 1999. — V. 118. — P. 340–358.
26. **Fujimoto S., Suzuki M.** The induction period of hydrogen-oxygen and methane-oxygen mixtures in a shock tube // *Memoirs Defense Academy, Japan.* — 1967. — V. VII, N 3. — P. 1037–1046.
27. **Soloukhin R. I.** Quasi-stationary reaction zone in gaseous detonation // *XI Symp. on Combustion.* — 1967. — P. 671–676.
28. **Skinner G. B., Ringrose G. H.** Ignition delays of a hydrogen-oxygen-argon mixture at relatively low temperatures // *J. Chem. Phys.* — 1965. — V. 42, № 6. — P. 2190–2192.
29. **Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
30. **Николаев Ю. А., Зак Д. В.** Квазиодномерная модель самоподдерживающейся многофронтной газовой детонации с учетом потерь и турбулентности // *Физика горения и взрыва.* — 1989. — Т. 25, № 2. — С. 103–112.
31. **Шелкин К. И., Тропин Я. К.** Газодинамика горения. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
32. **Васильев А. А., Николаев Ю. А.** Модель ячейки многофронтной газовой детонации // *Физика горения и взрыва.* — 1976. — Т. 12, № 5. — С. 744–754.
33. **Strehlow R. A., Maurer R. E., Rajan S.** Transverse waves in detonation: I. Spacing in the hydrogen-oxygen system // *AIAA J.* — 1969. — V. 7, N 2. — P. 323–328.