

УДК 624.131.21+539.37

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ РАЗОСНОСТИ
ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В СЫПУЧИХ СРЕДАХ**

А. П. Бобряков, А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: revuzhenko@yandex.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Дано теоретическое обоснование и приведена техническая реализация устройства сложного нагружения со средствами измерений механических свойств сыпучей среды. На этой базе разработана методика определения разности тензоров напряжений и деформаций. Приведены результаты испытаний песка разной крупности. Установлено, что поворот осей тензора деформаций опережает поворот осей тензора напряжений на угол, приблизительно равный 21° .

Напряжение, деформация, соосность, сыпучая среда, сложное нагружение, поворот осей

Одна из главных проблем механики сыпучих сред состоит в формулировке замкнутой системы континуальных уравнений, которая описывает процессы деформирования таких сред. Сыпучие среды занимают промежуточное положение между вязкими жидкостями и твердыми телами (упругими или пластичными). Для вязких жидкостей и упругих тел уравнения поведения получены еще в позапрошлом веке. Для сыпучих сред (так же, как и для пластических) проблема оказалась значительно сложнее. Здесь построен ряд моделей, но в целом задача еще далека от своего разрешения.

Основные трудности связаны с описанием сложного нагружения. При пропорциональном нагружении оси тензора напряжений неподвижны и различные модели (течения и деформационные) приводят к одинаковым результатам. Если же оси поворачиваются, то различные модели приводят к разным результатам и вопрос о соосности тензоров становится достаточно проблематичным. Так, в работе [1] приведены результаты экспериментов по установлению режимов скольжения при сдвиге берегов трещины, заполненной сыпучим материалом. Рассматривается процесс разрушения силовых цепочек, которые расположены поперек направления сдвига и дают свой вклад в разность тензоров напряжений и деформаций.

Модели сплошных сред носят, как правило, феноменологический характер. Это значит, что они опираются на базовые экспериментальные данные. Для металлов разработана методика испытаний, которая позволяет охватить как простые, так и сложные нагружения с поворотом осей тензора деформации. Методика заключается в исследовании поведения тонкостенных трубчатых образцов, которые подвергаются действиям внутреннего и внешнего давления, рас-

тяжения и, главное, независимого кручения. Однако для горных пород и тем более для грунтов и сыпучих сред использование данной методики наталкивается на значительные трудности. В работах [2–5] показано, что для грунтов при сложном нагружении тензоры напряжений и деформаций несоосны. Угол между главными направлениями тензоров составляет до 18° , поскольку при изломах траекторий напряжения нельзя получить большие деформации образца и повороты.

Необходима разработка методики, для которой такие свойства сыпучей и других подобных сред, как текучесть, низкое или практически нулевое сцепление были бы достоинством, а не существенным недостатком. Проще говоря, необходимы специальные методы, разработанные именно для такого рода сред. Сначала рассмотрим проблему в самом общем виде.

Как известно, идеальными для построения определяющих уравнений являются эксперименты, в которых реализуется однородное напряженно-деформированное состояние образца. Таким состояниям соответствует аффинная деформация тела. В [6] дана классификация таких деформаций с точки зрения возможности их реализации в эксперименте. Простейшей, как известно, является деформация сдвига. В чистом виде она реализуется в течении Куэтта между параллельными пластинами. Описание течения Куэтта является предельно ясным: две параллельные пластины должны двигаться в своих плоскостях с противоположно направленными и постоянными по величине скоростями. Между пластинами помещается деформируемая среда. Если среда вовлекается в движение, является однородной и устойчивой, то в стационарном режиме течения распределение деформаций в материале может быть только однородным. Ему соответствует линейное распределение скоростей (рис. 1а). Данный факт от реологии среды и определяющих уравнений не зависит, поэтому течение Куэтта можно использовать для получения данных об определяющих уравнениях среды и ее параметрах.

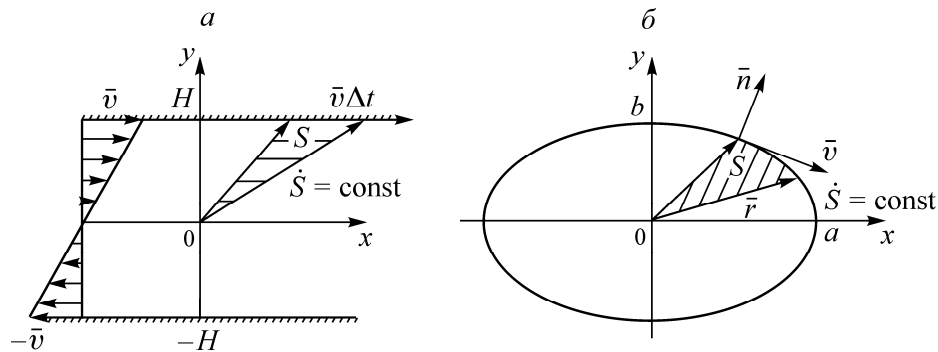


Рис. 1. Кинематические схемы нагружения материала с линейным и кеплеровским распределением скоростей

Приведенное описание течения Куэтта кажется естественным и единственно возможным (что может быть проще утверждения о постоянстве линейных скоростей параллельных пластин?). Между тем можно дать альтернативное описание течения Куэтта. Оно состоит в следующем: деформируемая область по-прежнему ограничивается двумя параллельными пластинами. Причем на границе задается кеплеровское распределение скоростей: радиусы-векторы граничных точек за одинаковое время ометают одинаковые площади (рис. 1а). Таким образом, на границе теперь задается постоянной не линейная, а секториальная скорость граничных точек. Нетрудно видеть, что для параллельных пластин оба описания эквивалентны. Однако можно доказать, что второе описание (через секториальную скорость) глубже отражает суще-

ство дела, чем общепринятое первое описание. Действительно, рассмотрим сложное нагружение материала, которое будем осуществлять как суперпозицию последовательности течений Куэтта. Выберем шаг по времени Δt . Реализуем течение, показанное на рис. 1а, в промежутке времени Δt . Затем повернем пластины относительно материала на угол $\omega \Delta t$. Опять реализуем сдвиг со скоростью γ и т. д. Ясно, что суперпозиция чистых сдвигов даст аффинную деформацию сложного нагружения. При $\Delta t \rightarrow 0$ получим [6]

$$u = \frac{dx}{dt} = \gamma y - \omega y, \quad v = \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad (1)$$

где x, y, t — декартовы координаты и время; u, v — компоненты скорости; γ — скорость сдвига; ω — скорость вращения. Значению $\omega = 0$ отвечает классическое течение Куэтта — чистый сдвиг. Если $\gamma < \omega$, то течение (1) осуществляется в эллиптической области:

$$x^2 + \frac{\omega - \gamma}{\omega} y^2 = \text{const}. \quad (2)$$

На границе эллипса скорость \bar{v} направлена по касательной к границе. При этом постоянной будет не линейная скорость \bar{v} , а именно секториальная скорость $\bar{v} \times \bar{r}$ (рис. 1б):

$$(\bar{v} \bar{n}) = 0, \quad |\bar{v} \times \bar{r}| = \text{const}. \quad (3)$$

Здесь \bar{n} — нормаль к границе; \bar{r} — радиус-вектор граничной точки.

Таким образом, к экспериментальной реализации сложного нагружения (1) необходимо предъявить следующие требования:

- должны быть выполнены условия плоской деформации образца;
- образец должен представлять собой прямой эллиптический цилиндр с направляющей в виде эллипса (2);
- на границе эллиптического цилиндра должны быть заданы скорости, удовлетворяющие обоим условиям (3).

Приблизительно указанные условия реализованы с помощью экспериментальной установки, схема которой представлена на рис. 2.

Исследуемый образец 1 помещался в гибкую цилиндрическую камеру 2, выполненную из тонкого (0.4 мм) листового проката бериллиевой бронзы. Дно камеры закрывалось растянутой резиной 3. Нагружение осуществлялось жесткими вращающимися пластинами — шаблонами 4 с соосными эллиптическими отверстиями, в которые вставлялась гибкая камера. Шаблоны закреплены на валу 5, который через подшипники с возможностью вращения установлен на неподвижном основании 6. Для изменения величин действующих периодических деформаций использовались сменные шаблоны с разными эксцентриситетами эллиптических отверстий.

Привод на вал (на рис. 2 не показан) осуществлялся от электродвигателя через редуктор с возможным переключением скорости вращения шаблонов. Вращающий момент на цилиндрической камере, возникающий от трения с шаблонами, компенсировался гибкими тягами 7, закрепленными одним концом к верхней части оболочки, а другим — к неподвижным стойкам 8, установленных на основании 6.

В результате того, что форма поперечного сечения камеры отличалась от круговой, вращение вала приводило к периодическому деформированию тела, помещенного в камеру. Измерения нормальной и касательной компонент напряжений, действующих на вертикальной площадке,

выполнялись разными датчиками, размещенными в общем корпусе, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда 9 размером $25 \times 15 \times 7$ мм. На одной из его граней располагались тензочувствительные элементы датчика нормального напряжения σ , на другой грани 25×15 мм — тензочувствительные элементы датчика касательного напряжения τ . Независимые измерения действующих компонент напряжений позволили проверять достоверность экспериментально полученных результатов с помощью формул тензорного проектирования.

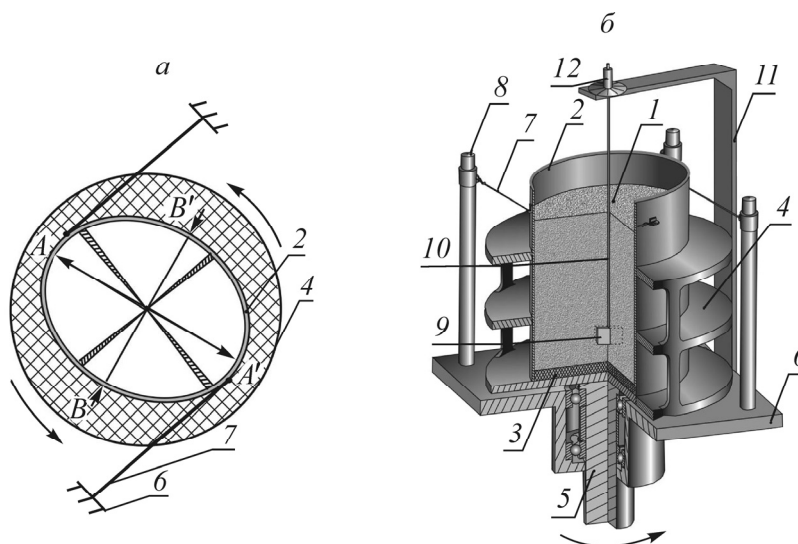


Рис. 2. Кинематическая схема (а) и устройство нагружения (б) экспериментальной установки

Датчик напряжений устанавливался в материале вертикально (нормаль к площадке, на которой измерялись напряжения, горизонтальна. В процессе деформирования материала датчик испытывал незначительные повороты. Для измерения угла поворота к датчику прикреплялся вертикальный металлический стержень 10. Верхний конец стержня крепился к кронштейну 11 через лимб 12 со шкалой, градуированной по углу положения измерительной площадки. Данная конструкция позволяла в любой момент времени определять показания датчика и соответствие их углу его положения.

В используемой схеме нагружения условие плоской деформации выполнялось довольно точно: внутренние горизонтальные сечения образца деформировались так же, как и его свободная поверхность. Условие (2) также выполнялось достаточно точно. Во всех экспериментах нагружение носило квазистатический характер (скорости вращения шаблонов менялись от 0.01 до 0.3 об/с). Поэтому тот факт, что в лабораторной системе координат оси эллипса поворачивались, на процесс деформирования влияния не оказывал (в течении (1) инерционные члены также не фигурируют). Далее, первое условие (3) в эксперименте выполнялось точно, это условие непроникания. Однако точная реализация второго условия (3) наталкивается на значительные трудности. В описанной конструкции второе условие фактически заменяется на условие $|\vec{v}| = \text{const}$ в случае полного прилипания и на условие сухого трения на границе, если прилипания нет. В последнем случае наблюдается проскальзывание материала относительно оболочки. Проскальзывание происходит так, что фактически линейная скорость на границе остается постоянной. Вследствие проскальзывания несколько уменьшается только величина этой постоянной. Поправка легко определяется.

Перейдем к описанию экспериментов. Вначале в гибкую камеру на глубину 120 мм от верхней кромки камеры устанавливался и включался в режим измерений датчик напряжений (рис. 2б). После этого через воронку засыпался сыпучий материал. В экспериментах использовались пески со средними размерами частиц 0.3, 0.31–0.4, 0.5–1.0 мм. Показания датчика выводились на графопостроитель. Как видно, в начале диаграммы рис. 3 после засыпки за счет статического давления нормальное напряжение слабо возрастает (участок 0А). Исходная упаковка является рыхлой и содержит множество дефектов.

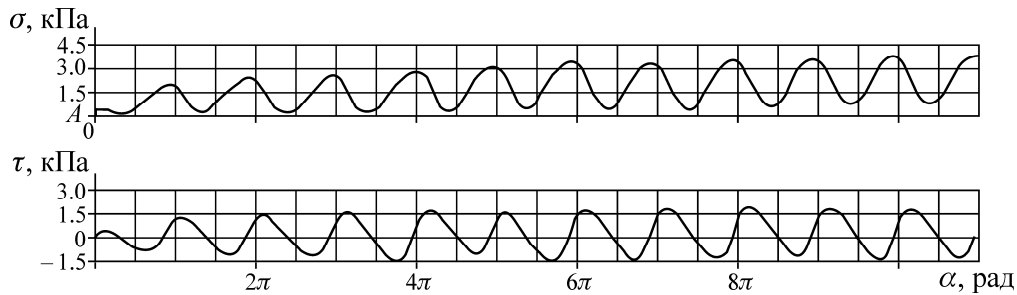


Рис. 3. Диаграммы напряжений в зависимости от угла поворота нагружающих шаблонов на стадии предварительного деформирования материала

Данную структуру можно считать изотропной с хорошим приближением. Действительно, сдвиг такого материала в любом направлении дает одинаковый результат по дилатансии и напряжениям. Однако уже после первого сдвига среда приобретает деформационную анизотропию по дилатансионным свойствам и предельной сдвиговой прочности. Если же материал деформируется по некоторой фиксированной траектории циклически, то степень анизотропии возрастает с увеличением числа циклов. Максимальная степень анизотропии достигается одновременно с переходом упаковки в стационарное состояние. Данное состояние характеризуется стабилизацией механических свойств, которые не зависят от дальнейшего циклического деформирования материала [7].

В рассматриваемых опытах стабилизация механических свойств осуществлялась периодическим деформированием материала вращающимися шаблонами. Как показали результаты экспериментов, такое деформирование на фоне действующих сил гравитации эффективно разрушает дефекты, уплотняют среду и после нескольких циклов приводит ее в стационарное состояние.

Согласно рис. 3, с увеличением числа циклов возрастает как статическое давление, так и амплитудное значение нормального и касательного напряжений (нестационарная фаза деформирования). После 10 циклов напряжения стабилизируются и среда переходит в стационарное состояние. На подготовленном таким образом сыпучем материале проводилось исследование разности тензоров. Отметим, что в процессе нагружения плоскость датчика напряжений могла медленно поворачиваться, но для интерпретации результатов важно знать ориентацию плоскости датчика относительно осей эллиптических шаблонов. По положению лимба 12 (см. рис. 2б) можно судить о фактическом направлении нормали к плоскости датчика σ . В моменты, когда большая ось шаблона совпадала с плоскостью датчика, на осциллограммах напряжений делались вертикальные отметки. Графики напряжений как функции угла поворота шаблонов приведены на рис. 4. С целью повышения точности определения угла разности нагружение осуществлялось медленно вручную. При вращении шаблонов против часовой стрелки каждое во-

локно материала поочередно испытывало максимальную деформацию растяжения в направлении большой оси эллипса AA' и максимальную деформацию сжатия на малой оси эллипса BB' (см. рис. 2а).

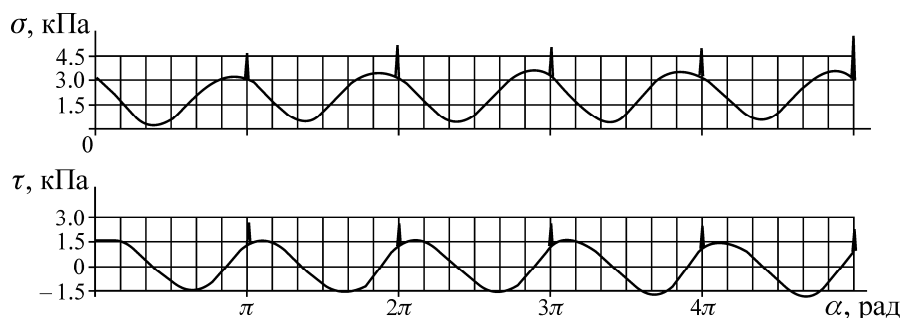


Рис. 4. Диаграммы напряжений материала в стационарном состоянии; вертикальные отметки соответствуют моменту совпадения плоскости датчика с большой осью эллипса

Экспериментально установлено, что максимальные нормальные и касательные напряжения пропорциональны весу столба материала над датчиком. Как видно из рис. 4, нагружение носит периодический характер с периодом, равным времени поворота шаблонов на угол π . Отметки на диаграммах соответствуют моменту, когда плоскость датчика проходит через большую ось эллипса. Данные об их положении позволяют судить о степени разности тензоров напряжений и деформации. Известно, что для упругого тела положения отметок при совмещении плоскости с большой осью эллипса будут показывать максимум нормального напряжения и нулевое значение касательного напряжения. То есть при периодическом деформировании любого волокна максимальному сжимающему напряжению соответствует наименьшая длина волокна (его направление совпадает с малой осью эллипса), а наименьшему сжимающему напряжению соответствует наибольшая длина волокна (ориентация — вдоль большой оси эллипса). В данном случае соосны тензоры напряжений и деформаций. Для вязких жидкостей тензор напряжений соосен тензору скоростей деформаций.

Из диаграмм рис. 4 следует, что сухой песок обнаруживает промежуточное поведение: максимум нормальных напряжений не совпадает ни с направлением максимальных деформаций, ни с направлением максимальных скоростей деформаций. Так как измерения проводились при большом числе циклов, отмечался разброс данных. На рис. 2а штриховкой показаны области значений углов, при которых в экспериментах возникают максимумы–минимумы нормальных напряжений от сжатия и растяжения. Максимумы–минимумы возникают раньше отметок и образуют две области, ограниченные углами $21 \pm 2^\circ$, отсчитываемыми в направлении противоположном вращению шаблонов соответственно от малой и большой оси эллипса.

Как показали эксперименты, изменение крупности частиц в диапазоне от 0.3 до 1.0 мм практически не оказывает влияние на величину угла разности.

В ходе одного опыта параметры эллипса остаются постоянными. Однако от опыта к опыту их можно менять и, значит, менять степень деформирования образца. Опыты проводились для эллипсов с полуосями $a = 63$ мм, $b = 53$ мм, $e = 0.541$; $a = 61.3$ мм, $b = 54.8$ мм, $e = 0.448$; $a = 60.0$ мм, $b = 56.7$ мм, $e = 0.327$, где e — эксцентриситет. Убывание эксцентриситета приводит к уменьшению деформаций и, как следствие, к уменьшению амплитуды напряжений. Размах ам-

плитуды σ соответственно составил 3.0, 2.2 1.5 кПа. Приведем параметр Лодэ–Надаи μ_σ для песка крупностью частиц 0.3 мм, деформированного шаблонами с эксцентриситетом $e = 0.542$. Экспериментальные данные для расчета: $\sigma_1 = 3.6$, $\sigma_2 = 1.43$, $\sigma_3 = 0.6$ кПа. Отсюда

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = -0.447.$$

Установлено, что изменение степени деформирования не привело к изменению угла разности. Сыпучий материал, в отличие от вязкой жидкости, не чувствителен к скорости деформирования, поэтому внутренние напряжения упаковки, приведенной в стационарное состояние, остаются неизменными.

ВЫВОДЫ

Эксперименты по деформированию песков разной крупности показали, что главные оси тензора напряжений отклоняются от осей тензора деформаций на угол, среднее значение которого составляет 21° . В исследованном диапазоне этот угол не зависит или слабо зависит от крупности частиц, а также от степени деформирования образца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочарян Г. Г., Марков В. К., Остапчук А. А., Павлов Д. В. Мезомеханика сопротивления сдвигу по трещине с заполнителем // Физ. мезомеханика — 2013. — Т. 16. — № 5.
2. Ломизе Г. М., Иващенко И. Н., Захаров М. Н. Деформируемость глинистого грунта в условиях сложного нагружения // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1970. — № 6.
3. Захаров М. Н., Иващенко И. Н. О деформируемости грунтов при сложном напряженном состоянии // ПМТФ. — 1971. — № 6.
4. Захаров М. Н. Некоторые вопросы механики грунтов при сложном нагружении // Прикл. механика. — 1973. — Т. 9. — Вып. 11.
5. Захаров М. Н., Иващенко И. Н. К теории пластического течения грунтов // Изв. АН СССР, МТТ. — 1972. — № 2.
6. Ревуженко А. Ф. Механика сыпучей среды. — Новосибирск: Офсет, 2003.
7. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф. Однородный сдвиг сыпучего материала. Дилатансия // ФТПРПИ. — 1982. — № 5.

Поступила в редакцию 21/IV 2014