

УДК 534.22.094.1

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В РАМКАХ КОНТИНУУМА КОССЕРА

М. А. Кулеш, В. П. Матвеев, И. Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mail: shardakov@icmm.ru

В рамках несимметричной теории упругости (среда Коссера) рассмотрена задача о распространении поверхностной акустической волны Рэлея в бесконечном полупространстве. Предполагается, что деформация материала описывается не только вектором перемещения, но и независимым вектором поворота. Получено общее аналитическое решение задачи в перемещениях. Проведен сравнительный анализ полученного решения с соответствующим решением для классической упругой среды. Введены макропараметры, характеризующие отличие напряженно-деформированного состояния от предсказываемого классической теорией упругости.

Ключевые слова: волна Рэлея, дисперсия, среда Коссера, аналитические решения.

Введение. Модель среды, деформация которой описывается не только вектором перемещения \mathbf{u} , но и кинематически независимым вектором поворота $\boldsymbol{\omega}$, являющимися функциями координат и времени, давно привлекает внимание исследователей. Эта теория получила название моментной или несимметричной теории упругости. Особенность деформационного поведения упругих тел в рамках этой теории заключается в том, что в упругом теле, начиная с некоторого характерного масштаба и (или) при больших значениях градиентов напряжений или деформаций, возможна реализация напряженно-деформированного состояния, которое будет в значительной степени отличаться от предсказываемого классической (симметричной) теорией упругости.

В теории среды Коссера [1, 2] вектор $\boldsymbol{\omega}$ характеризует малые повороты частиц, а тензоры напряжений $\tilde{\sigma}$ и моментных напряжений $\tilde{\mu}$ являются несимметричными. Динамическое поведение упругой изотропной среды без учета температурных эффектов характеризуют восемь констант: две постоянные Ламе, четыре упругие константы, характеризующие микроструктуру, плотность и параметр, отвечающий за меру инерции среды при вращении (плотность момента инерции).

Во многих публикациях анализ моментного поведения материала рассматривается в рамках упрощенной модели, называемой средой со стесненным вращением или псевдосредой Коссера [3]. Упрощение достигается за счет использования зависимости $\boldsymbol{\omega} = (1/2) \text{rot } \mathbf{u}$, которая, в частности, позволяет сократить число физических параметров с восьми до пяти. Но из-за недостатков, подробно рассмотренных в [1], модель псевдосреды Коссера далее в работе использоваться не будет.

В рамках несимметричной теории упругости (особенно в случае стесненного вращения) получено большое количество точных аналитических решений. Во многих работах

эти решения анализируются и сопоставляются с соответствующими решениями классической теории упругости. При таком сопоставлении, как правило, новые физические константы, определяющие вклад моментных составляющих, задают из области их энергетически допустимых значений. Это обусловлено недостаточностью информации о материальных константах сред с микроструктурой, что является одним из основных факторов, сдерживающих развитие моделей несимметричных сред.

Имеется несколько работ, посвященных определению физических констант среды Коссера. Так, в [4] на основе статических экспериментов измерены константы упругости. Результаты динамических (в частности, ультразвуковых) экспериментов использовались для идентификации моделей Леру и псевдосреды Коссера [5] и для идентификации линейной среды Коссера [6, 7].

Ряд наблюдаемых эффектов, в частности дисперсия упругих поверхностных волн Рэлея [5], не могут быть объяснены в рамках классической модели сплошной среды. В рамках же среды Коссера этот эффект имеет объяснение. Следует отметить, что степень затухания амплитуды рэлеевской волны с глубиной, а также эллиптичность волны зависят от физических констант материала, в том числе и от параметров, описывающих моментные свойства. Это обстоятельство позволяет надеяться на эффективное применение такого типа волн в возможных экспериментальных исследованиях, направленных на обнаружение “моментного” поведения материала и далее на определение материальных параметров.

Задача о распространении поверхностных волн в полупространстве в рамках классической упругой среды рассматривалась, например, в [8, 9], для псевдосреды Коссера — в работе [10], а для микрополярной среды — в [11]. В [12] получен аналог уравнения Рэлея для среды Коссера, однако следует отметить, что это решение не позволяет в полной мере проанализировать структуру и затухание рэлеевской волны.

В данной работе в рамках среды Коссера приведено аналитическое решение в перемещениях, описывающее распространение волны Рэлея в полупространстве. На основе полученного решения выполнен параметрический анализ коэффициента эллиптичности и волнового числа. В силу того что оба параметра могут быть измерены, полученное решение может служить теоретической основой для возможных экспериментов по определению новых материальных параметров упругой среды Коссера.

1. Постановка задачи. Приведем основные соотношения для упругой среды Коссера [1]:

— уравнения движения

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\sigma}^T : \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \cdot \tilde{\mu} + \mathbf{Y} = j \ddot{\omega}; \quad (1.1)$$

— геометрические соотношения

$$\tilde{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\chi} = \nabla \boldsymbol{\omega}; \quad (1.2)$$

— физические уравнения

$$\tilde{\sigma} = 2\mu \tilde{\gamma}^{(S)} + 2\alpha \tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma}) \tilde{\mathbf{e}}, \quad \tilde{\mu} = 2\gamma \tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon \tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi}) \tilde{\mathbf{e}}. \quad (1.3)$$

С учетом соотношений (1.1)–(1.3) уравнения движения для вектора перемещения \mathbf{u} и вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$ имеют вид

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ (\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Y} &= j \ddot{\omega}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.1)–(1.4) \mathbf{X} — вектор массовых сил; \mathbf{Y} — вектор массовых моментов; $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\chi}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\mu}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; μ , λ — постоянные Ламе; α , β , γ , ε — физические постоянные материала в рамках

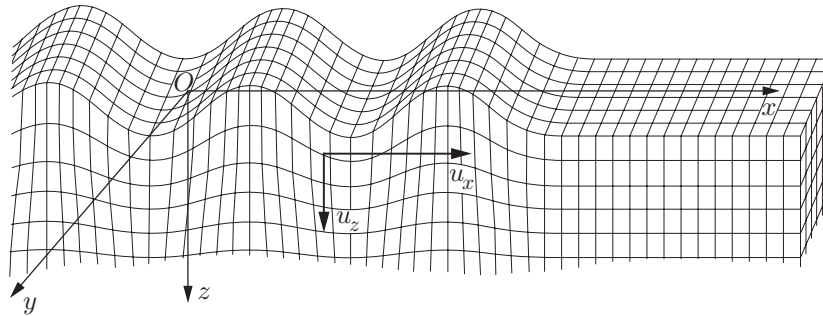


Рис. 1

упругой среды Коссера; ρ — плотность; j — плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении); $\tilde{\mathbf{E}}$ — тензор Леви — Чивиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ — операция альтернирования; $\nabla(\cdot)$ — набла-оператор; $I_1(\cdot)$ — первый инвариант тензора; $\tilde{\mathbf{e}}$ — единичный тензор [13]. В отличие от классической теории тензоры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}$ являются несимметричными.

Рассмотрим полупространство, поверхность которого свободна от нагрузок в случае отсутствия массовых сил и моментов. Оси декартовых координат x и y направим по поверхности, а ось z — в глубь полупространства (рис. 1).

Решение системы (1.4), описывающее поверхностную волну, ищется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, z, t) &= \{U_x(z), 0, U_z(z)\} e^{i(kx-ft)}, \\ \boldsymbol{\omega}(x, z, t) &= \{0, W_y(z), 0\} e^{i(kx-ft)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $i = \sqrt{-1}$; k — волновое число; f — круговая частота; $U_x(z)$, $U_z(z)$, $W_y(z)$ — зависящие от глубины функции затухания, а физический смысл имеют только вещественные части данных комплекснозначных функций.

Граничные условия на свободной поверхности полупространства запишем в виде

$$\sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \mu_{zx} = 0, \quad \mu_{zy} = 0, \quad \mu_{zz} = 0. \quad (1.6)$$

2. Построение решения. Подставляя вектор перемещения и поворота (1.5) в (1.4), получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно функций $U_x(z)$, $U_z(z)$, $W_y(z)$:

$$\begin{aligned} (\alpha + \mu) \frac{d^2}{dz^2} U_x(z) + (\rho f^2 - k^2(\lambda + 2\mu)) U_x(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha) \frac{d}{dz} U_z(z) - 2\alpha \frac{d}{dz} W_y(z) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2}{dz^2} U_z(z) + (\rho f^2 - k^2(\alpha + \mu)) U_z(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha) \frac{d}{dz} U_x(z) + 2ik\alpha W_y(z) &= 0, \quad (2.1) \\ (\gamma + \varepsilon) \frac{d^2}{dz^2} W_y(z) + (j f^2 - k^2(\gamma + \varepsilon) - 4\alpha) W_y(z) + 2\alpha \frac{d}{dz} U_x(z) - 2ik\alpha U_z(z) &= 0. \end{aligned}$$

Для удобства представления решения все величины приведем к безразмерному виду с использованием характерных размера X_0 и частоты f_0 . Дополнительно введем две безразмерные величины, одна из которых зависит от характерного размера. Эти величины уже использовались авторами ранее при анализе аналитических решений двумерных статических задач для среды Коссера [14]:

$$A = X_0 \sqrt{\frac{\mu}{B(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}. \quad (2.2)$$

Для учета динамических эффектов будем использовать четыре безразмерных параметра, два из которых являются аналогами скорости продольной и поперечной волны, а два дополнительных обусловлены наличием новых материальных констант среды Коссе-ра:

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_3^2 = \frac{\alpha + \mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_4^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{j X_0^2 f_0^2}. \quad (2.3)$$

Таким образом, с учетом соотношений (2.2), (2.3) безразмерная система уравнений (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} U_x(z) + \left(\frac{f^2}{C_3^2} - k^2 \frac{C_1^2}{C_3^2} \right) U_x(z) + ik \left(\frac{C_1^2 - C_2^2}{C_3^2} - \frac{1}{B} \right) \frac{d}{dz} U_z(z) - \frac{2}{B} \frac{d}{dz} W_y(z) &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} U_z(z) + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2 \frac{C_3^2}{C_1^2} \right) U_z(z) + ik \left(\frac{C_1^2 - C_2^2}{C_1^2} - \frac{C_3^2}{BC_1^2} \right) \frac{d}{dz} U_x(z) + \frac{2ikC_3^2}{BC_1^2} W_y(z) &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} W_y(z) + \left(\frac{f^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2B}{B-1} \right) W_y(z) + \frac{2A^2B}{B-1} \frac{d}{dz} U_x(z) - \frac{2ikA^2B}{B-1} U_z(z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для нахождения решения этой системы удобно воспользоваться заменой переменных:

$$U_x(z) = ik\Phi(z) - \frac{d}{dz} \Psi(z), \quad U_z(z) = \frac{d}{dz} \Phi(z) + ik\Psi(z), \quad W_y(z) = \Omega(z). \quad (2.5)$$

Эта замена позволяет преобразовать (2.4) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \Phi(z) + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2 \right) \Phi(z) &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + \left(\frac{f^2}{C_3^2} - k^2 \right) \Psi(z) + \frac{2}{B} \Omega(z) &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} \Omega(z) + \left(\frac{f^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2B}{B-1} \right) \Omega(z) - \frac{2A^2B}{B-1} \frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + \frac{2k^2A^2B}{B-1} \Psi(z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решения системы (2.6), соответствующие уменьшению амплитуды волны с глубиной, имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= D_0 e^{-\nu_0 z}, \quad \Psi(z) = D_1 e^{-\nu_1 z} + D_2 e^{-\nu_2 z}, \\ \Omega(z) &= (B/2)[D_1(k^2 - \nu_1 - f^2/C_3^2) e^{-\nu_1 z} + D_2(k^2 - \nu_2 - f^2/C_3^2) e^{-\nu_2 z}]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решения (2.7) и соотношения (2.5) позволяют амплитудные функции $U_x(z)$, $U_z(z)$, $W_y(z)$ представить в виде

$$\begin{aligned} U_x(z) &= ikD_0 e^{-\nu_0 z} + D_1 \nu_1 e^{-\nu_1 z} + D_2 \nu_2 e^{-\nu_2 z}, \\ U_z(z) &= -D_0 \nu_0 e^{-\nu_0 z} + ikD_1 e^{-\nu_1 z} + ikD_2 e^{-\nu_2 z}, \\ W_y(z) &= (B/2)[D_1(k^2 - \nu_1 - f^2/C_3^2) e^{-\nu_1 z} + D_2(k^2 - \nu_2 - f^2/C_3^2) e^{-\nu_2 z}], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где константы D_k находятся из граничных условий, а собственные значения ν_k определяются выражениями

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \sqrt{k^2 - f^2/C_1^2}, \quad \nu_1 = \sqrt{k^2 - a_1}, \quad \nu_2 = \sqrt{k^2 - a_2}, \\ a_{1,2} &= \frac{C_3^2 + C_4^2}{2C_3^2 C_4^2} f^2 - 2A^2 \pm \sqrt{\frac{(C_3^2 - C_4^2)^2}{4C_3^4 C_4^4} f^4 - \frac{2A^2(C_2^2 C_3^2 - 2C_3^2 C_4^2 + C_2^2 C_4^2)}{C_2^2 C_3^2 C_4^2} f^2 + 4A^4}. \end{aligned}$$

Как показано в [12], в случае решения системы (2.1) значения a_k определяются также решениями алгебраического уравнения $Xa^2 - Ya - Z = 0$, где

$$X = \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}{2\alpha}, \quad Y = \frac{j(\mu + \alpha) + \rho(\gamma + \varepsilon)}{2\alpha} f^2 - 2\mu, \quad Z = 2\rho \left(1 - \frac{jf^2}{4\alpha}\right) f^2.$$

При подстановке решения (2.8) в граничные условия (1.6) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно констант D_k (граничные условия также предварительно обезразмериваются):

$$\begin{bmatrix} 2k^2 - f^2/C_2^2 & -2ik\nu_1 & -2ik\nu_2 \\ 2ik\nu_0 & 2k^2 - f^2/C_2^2 & 2k^2 - f^2/C_2^2 \\ 0 & (a_1 - f^2/C_3^2)\nu_1 & (a_2 - f^2/C_3^2)\nu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Условие равенства нулю определителя этой системы дает аналог классического уравнения Рэлея [8, 9] относительно неизвестного волнового числа k :

$$\begin{aligned} & \sqrt{k^2 - a_1} (a_1 - f^2/C_3^2) [(2k^2 - f^2/C_2^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - a_2} \sqrt{k^2 - f^2/C_1^2}] - \\ & - \sqrt{k^2 - a_2} (a_2 - f^2/C_3^2) [(2k^2 - f^2/C_2^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - a_1} \sqrt{k^2 - f^2/C_1^2}] = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

и условия связи констант

$$D_1 = \frac{i(f^2 - 2k^2 C_2^2)(f^2 - a_2 C_3^2)}{2k C_2^2 C_3^2 (a_1 - a_2) \nu_1} D_0, \quad D_2 = -\frac{i(f^2 - 2k^2 C_2^2)(f^2 - a_1 C_3^2)}{2k C_2^2 C_3^2 (a_1 - a_2) \nu_2} D_0.$$

Возвращаясь к компонентам вектора перемещения и поворота (1.5), окончательно получим

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= F_0 \left(k e^{-\nu_0 z} + \frac{F_1}{k} e^{-\nu_1 z} - \frac{F_2}{k} e^{-\nu_2 z} \right) e^{i(kx - ft - \pi/2)}, \\ u_z(x, z, t) &= F_0 \left(\nu_0 e^{-\nu_0 z} + \frac{F_1}{\nu_1} e^{-\nu_1 z} - \frac{F_2}{\nu_2} e^{-\nu_2 z} \right) e^{i(kx - ft)}, \\ \omega_y(x, z, t) &= F_0 B \left[\frac{F_1}{2k\nu_1} \left(a_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-\nu_1 z} - \frac{F_2}{2k\nu_2} \left(a_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-\nu_2 z} \right] e^{i(kx - ft - \pi/2)}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где F_0 — неопределенная константа, а константы F_1, F_2 определяются так:

$$F_1 = \frac{(f^2 - 2k^2 C_2^2)(f^2 - a_2 C_3^2)}{2C_2^2 C_3^2 (a_1 - a_2)}, \quad F_2 = \frac{(f^2 - 2k^2 C_2^2)(f^2 - a_1 C_3^2)}{2C_2^2 C_3^2 (a_1 - a_2)}. \quad (2.11)$$

Таким образом, соотношения (2.9)–(2.11) являются решением обезразмеренной системы (1.4) с граничными условиями (1.6).

3. Параметрический анализ решения. Основной целью параметрического анализа является поиск качественно и количественно различающихся величин в “моментном” и классическом случаях. Далее все величины, относящиеся к классической среде, будем обозначать индексом “*”.

Для численного анализа были взяты значения физических параметров, представленные в [6] и соответствующие параметрам кости человека: $\lambda = 2,8 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 4 \cdot 10^9$ Н/м², $\alpha = 4 \cdot 10^9$ Н/м², $\gamma = 1,936 \cdot 10^8$ Н, $\varepsilon = 3,046 \cdot 10^9$ Н. В литературе не удалось найти значения плотности момента инерции j , поэтому выберем его произвольно: $j = 1 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

Соотношение (2.7) показывает, что составляющая колебательного процесса, отвечающая потенциалу сдвиговой волны Ψ , существует одновременно с составляющей, характеризующей вектором микровращения. Раздельное существование указанных составляющих

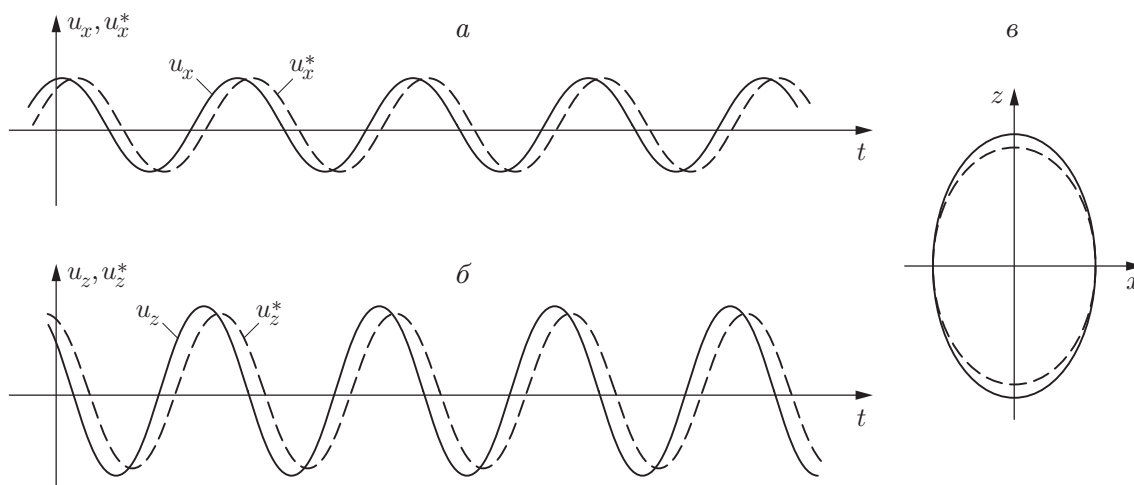


Рис. 2

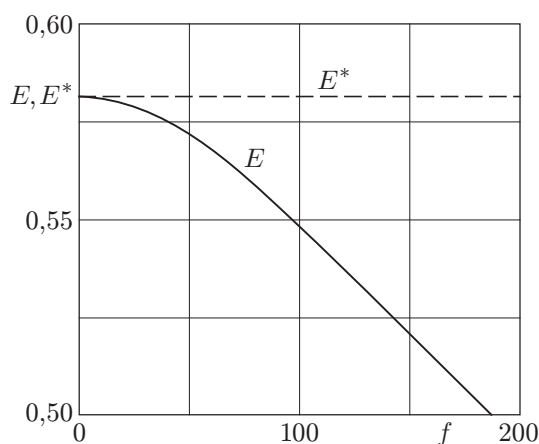


Рис. 3

волнового процесса возможно лишь при $\alpha = 0$, и в этом случае уравнения (2.6) описывают волну Рэлея в классическом упругом полупространстве.

Вид решения (2.10) показывает, что траекторией движения любой частицы является эллипс, большая ось которого совпадает с осью z , а малая — с осью x . Характерный вид компонент перемещений (2.10) на поверхности полупространства $z = 0$ для некоторого удаления Δx от начала координат в зависимости от времени представлен на рис. 2, а, б, а вид компоненты перемещений в плоскости (x, z) — на рис. 2, в. Штриховые линии соответствуют решению для классической среды [8], сплошные — новому решению для среды Коссера.

Данные, приведенные на рис. 2, позволяют предположить, что в качестве первой экспериментально измеряемой величины можно выбрать коэффициент эллиптичности $E = |u_x|/|u_z|$, который на поверхности полупространства $z = 0$ не зависит от координаты x и времени t , однако является функцией частоты (рис. 3) и упругих параметров материала. Видно, что влияние моментного описания поведения материала на величину δ_1 (наличие “моментных” эффектов) значительно усиливается при увеличении частоты. Это объясняется тем, что геометрия и, следовательно, эллиптичность рэлеевской волны для классической упругой среды от частоты не зависят.

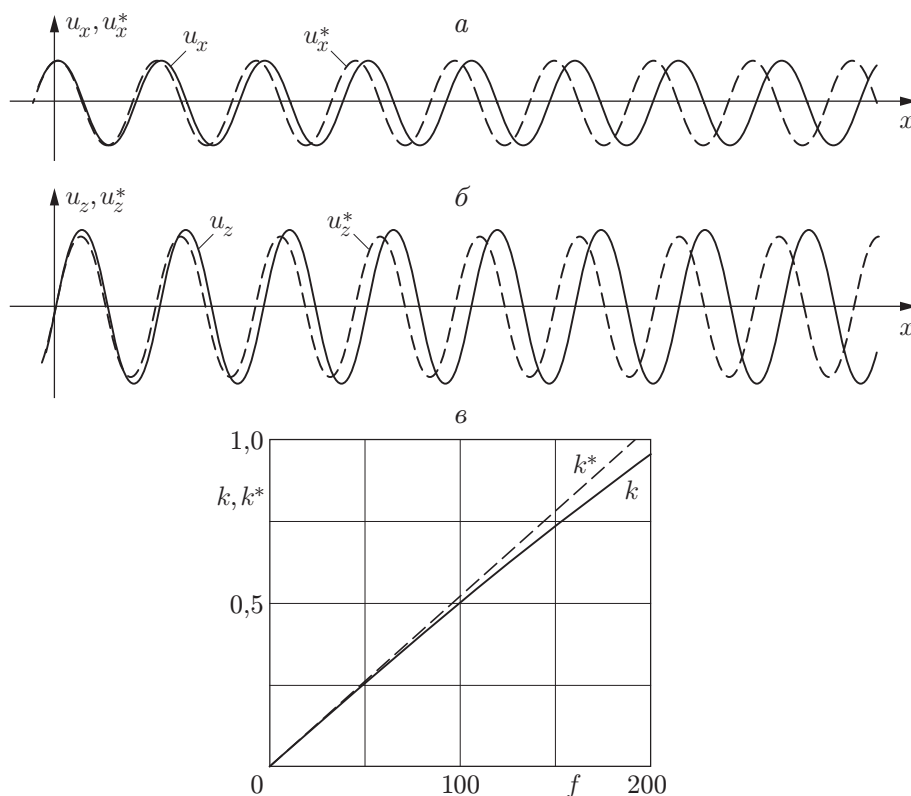


Рис. 4

На рис. 4, *a, б* приведена зависимость компонент вектора перемещений от координаты x для некоторого момента времени t_1 на поверхности полупространства. Сплошные линии соответствуют решению для “моментной” среды, штриховые — для классической. Волновые числа классической и “моментной” сред также различаются (рис. 4, *в*). Таким образом, на основе этих зависимостей в качестве второго потенциального эксперимента можно предложить измерение волнового числа.

Волновое число не может быть измерено непосредственно, однако можно применить несложную вычислительную процедуру, основанную на использовании фурье-преобразования. Для этого построим два сигнала $S_1(t) = u_z(x_1, 0, t)$ и $S_2(t) = u_z(x_2, 0, t)$ (x_1, x_2 — фиксированные точки на оси x). На рис. 5, *a* сплошной линией показан сигнал $S_1(t)$, пунктирной — сигнал $S_2(t)$. Выполним непрерывное фурье-преобразование обоих сигналов:

$$\hat{S}_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) e^{-ift} dt = F_0 \left(\nu_0 + \frac{F_1}{\nu_1} - \frac{F_2}{\nu_2} \right) e^{ik(f_s)x_1} \delta(f - f_s),$$

$$\hat{S}_2(f) = F_0 \left(\nu_0 + \frac{F_1}{\nu_1} - \frac{F_2}{\nu_2} \right) e^{ik(f_s)x_2} \delta(f - f_s),$$

где $\hat{S}_1(f)$, $\hat{S}_2(f)$ — комплексные функции фурье-образа; f_s — образующая частота сигнала; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Отсюда следует, что фурье-спектры этих двух сигналов связаны соотношением

$$\hat{S}_2(f) = e^{ik(f_s)(x_2-x_1)} \hat{S}_1(f), \quad (3.1)$$

которое может быть относительно легко инвертировано при помощи какого-либо метода оптимизации. Соотношение (3.1) проиллюстрировано на рис. 5, *б*: сплошная линия — модуль

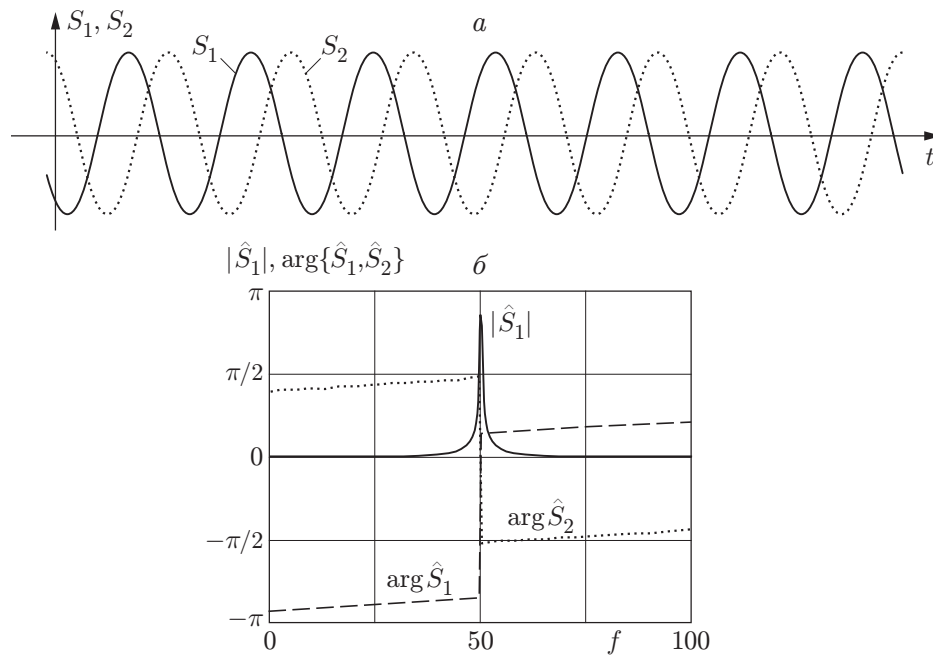


Рис. 5

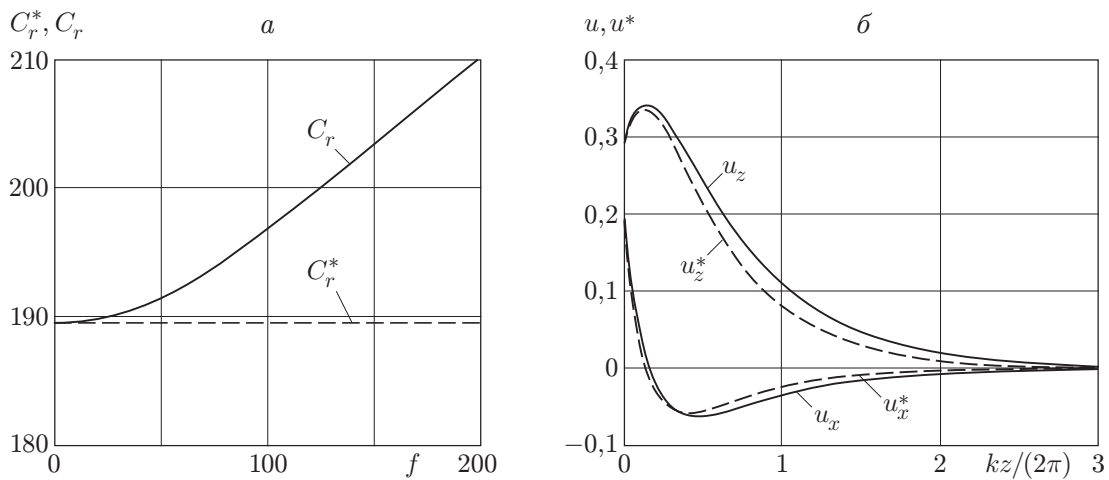


Рис. 6

ли фурье-коэффициентов обоих сигналов, которые в силу отсутствия диссипации совпадают, штриховая линия — аргумент комплексного спектра $\hat{S}_1(f)$, пунктирная — аргумент спектра $\hat{S}_2(f)$. Таким образом, соотношение (3.1) описывает один из возможных путей измерения волнового числа в эксперименте.

В заключение приведем также зависимости, характеризующие изменение скорости $C_r = f/k(f)$ и затухание рэлеевской волны. Как видно на рис. 6,а, скорость для среды Коссера зависит от частоты, т. е. в отличие от классической среды волны Рэлея в среде Коссера обладают дисперсией, что согласуется с экспериментальными исследованиями [7]. Именно этот факт, не имеющий аналогов в классической теории упругости, может быть использован для проверки адекватности несимметричной теории упругости реальным конструкционным материалам. Затухание, т. е. зависимость компонент вектора перемещений от относительной глубины, отнесенной к длине волны, иллюстрируется рис. 6,б. Данная

зависимость показывает, что волна Рэлея является типично поверхностной, однако отличие затухания от классического случая небольшое.

Заключение. Качественный и численный анализ полученных в работе аналитических решений, а также зависимостей, представленных на рис. 2–6, позволяет сделать следующие выводы.

В отличие от плоских статических задач несимметричной теории упругости [14] решение волнового уравнения для волны Рэлея непредставимо в виде суммы классических и моментных частных решений.

В отличие от классического случая параметр эллиптичности волны зависит от частоты. При увеличении частоты различия между значениями этого параметра для классического и несимметричного случаев возрастают. При увеличении частоты также возрастают различия между значениями волнового числа для классической и “моментной” сред. Оба параметра могут быть измерены в процессе эксперимента, реализуемого с целью обнаружения эффектов “моментных” свойств среды. Информативность параметров с точки зрения проявления этих свойств подтверждается приведенными зависимостями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. **Пальмов В. А.** Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 3. С. 401–408.
3. **Морозов Н. Ф.** Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
4. **Gauthier R. D., Jahsmann W. E.** A quest for micropolar elastic constants // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1975. V. 42, N 2. P. 369–374.
5. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
6. **Lakes R. S.** Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure / Ed. by H. Muehlhaus. N. Y.: Wiley, 1995. P. 1–22.
7. **Gauthier R. D., Jahsmann W. E.** A quest for micropolar elastic constants. Pt 2 // Arch. Mech. 1981. V. 33, N 5. P. 717–737.
8. **Викторов И. А.** Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
9. **Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П.** Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991.
10. **Adomeit G.** Determination of elastic constants of a structured material // Proc. of the IUTAM symp. on the generalized cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Stuttgart; Freudensstadt, Germany, 1967. Berlin: Springer-Verlag, 1968. P. 37, 38.
11. **Eringen A. C.** Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids. N. Y.: Springer-Verlag, 1999.
12. **Лялин А. Е., Пирожков В. А., Степанов Р. Д.** О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 1982. Т. 28, № 6. С. 838–840.
13. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
14. **Kulesh M. A., Matveenko V. P., Shardakov I. N.** Parametric analysis of analytical solutions to one- and two-dimensional problems in couple-stress theory of elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2003. Bd 83, N 4. S. 238–248.