ПМТФ, № 2, 1963

О СОВМЕСТНОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ РАЗНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ В ТЕОРИИ ОБТЕКАНИЯ ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

М. В. Третьяков

(Новосибирск)

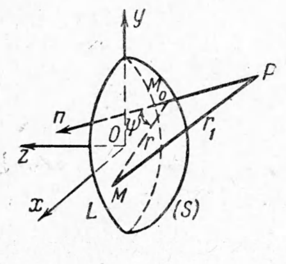
В работе даются постановка и решение некоторой краевой задачи, гидродинамически представляющей задачу обтекания пространственным поступательным потоком равномерно проницаемого слоя источников или стоков, распределенного по незамкнутой поверхности, и показывается, как на основе этой краевой задачи решается задача обтекания потоком идеальной жидкости одной плотности равномерно проницаемой поверхности вращения, излучающей идеальную жидкость другой плотности.

Полученное решение может быть использовано в задачах о равномерном насыщении потока жидкости одной плотности жидкостью другой плотности и в задачах фильтрования газовых и жидкостных смесей.

1. Краевая задача проницания. Пусть некоторая незамкнутая ограниченная контуром L поверхность (S) есть гладкая в смысле Ляпунова (фиг. 1).

Поставим следующую краевую задачу: найти функцию $\Phi(x, y, z)$, гармоническую во всем пространстве вне поверхности (S), если на этой поверхности предельные значения нормальной производной искомой функции удовлетворяют условию

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_+ = \sigma\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_- \tag{1.1}$$



Фиг. 1

где σ — некоторая заданная постоянная положительная величина. Назовем эту задачу краевой задачей проницания и будем искать решение задачи в виде суммы некоторой линейной функции и потенциала простого слоя с плотностью $m(M)$, распределенного по поверхности (S)

$$\Phi(P) = Az + B\iint\limits_{(S)}\frac{m(M)}{r_1}dF \tag{1.2}$$

где A и B — постоянные величины, r_1 — расстояние от точки P пространства до переменной точки M поверхности, а dF — элемент площади этой поверхности.

Возьмем указанное на фиг. 1 направление нормали и найдем выражения для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя, распределенного по незамкнутой поверхности (S).

Пусть замкнутая поверхность Ляпунова (Σ) состоит из двух незамкнутых (S) и (S'), соединенных по контуру L. Распределим по поверхности (Σ) простой слой интенсивности $m(M)$, а по поверхности (S') распределим дополнительно простой слой такой интенсивности $m'(M)$, чтобы

$$m'(M) = -m(M) \tag{1.3}$$

Тогда потенциал простого слоя поверхности (S) с плотностью $m(M)$ может быть представлен так:

$$\iint\limits_{(S)} m(M)\frac{dF}{r_1} = \iint\limits_{(\Sigma)} m(M)\frac{dF}{r_1} + \iint\limits_{(S')} m'(M)\frac{dF}{r_1} \tag{1.4}$$

Для простоты записи обозначим

$$\Phi_0(P) = \iint\limits_{(S)} m(M)\frac{dF}{r_1}, \qquad \Phi_1(P) = \iint\limits_{(\Sigma)} m(M)\frac{dF}{r_1}, \Phi_2(P) = \iint\limits_{(S')} m'(M)\frac{dF}{r_1}$$

По свойству дифференцирования имеем

$$\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\right)_+ = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right)_+ + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right)_+, \qquad \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right)_- + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right)_- \tag{1.5}$$

Так как поверхность (Σ) замкнутая, то по формулам, данным, например, в книге Л. Н. Сретенского [1], имеем

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right)_\pm = \mp 2\pi m(M_0) + \iint\limits_{(\Sigma)} m(M)\frac{\cos\psi}{r^2}dF \tag{1.6}$$

где ψ — угол между нормалью в точке M_0 и направлением M_0M, а r — расстояние M_0M. Так как точка M_0 поверхности (S') не принадлежит, то

$$\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right)_+ = \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right)_- = \iint\limits_{(S')} m'(M)\frac{\cos\psi}{r^2}dF \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.6) и (1.7) в формулы (1.5), учитывая равенство (1.3) и принимая во внимание, что интеграл

$$\iint\limits_{(S')} \frac{\cos\psi}{r^2}dF$$

абсолютно сходящийся, получаем

$$\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\right)_\pm = \mp 2\pi m(M_0) + \iint\limits_{(S)} m(M)\frac{\cos\psi}{r^2}dF \tag{1.8}$$

Из выражения (1.2), учитывая формулы (1.8) и равенство

$$\left(\frac{\partial z_0}{\partial n}\right)_+ = \left(\frac{\partial z_0}{\partial n}\right)_- = \cos\varphi_0$$

где φ_0 — угол между нормалью в точке M_0 и осью z, получим

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\pm = A\cos\varphi_0 \mp 2\pi B m(M_0) + B\iint\limits_{(S)} m(M)\frac{\cos\psi}{r^2}dF \tag{1.9}$$

Подставляя найденные выражения (1.9) в условие (1.1), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$m(M_0) = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} m(M)\frac{\cos\psi}{r^2}dF + \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{A}{2\pi B}\cos\varphi_0 \tag{1.10}$$

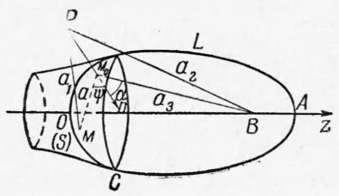
решение которого будет функцией $m(M_0)$ плотности потенциала простого слоя, решающего задачу. Ядро этого интегрального уравнения, как отмечено С. Л. Соболевым [2], принадлежит к числу неограниченных ядер специального типа, для которых имеют место все теоремы Фредгольма.

Рассмотренная краевая задача имеет следующую гидродинамическую трактовку. Если положить $A = -V_\infty$ и $B = -1/4\pi$, то функция (1.2) будет потенциалом скоростей потока идеальной жидкости, возникающего при обтекании поступательным стационарным потоком слоя источников или стоков, распределенного по поверхности (S).

Коэффициент проницаемости σ будет характеризовать меру способности единицы площади слоя пропускать соответствующее количество жидкости от набегающего потока и, как это следует непосредственно из условия (1.1), будет равен отношению объема жидкости, втекающей от набегающего потока в элемент площади ΔF слоя в единицу времени, к объему всей жидкости, вытекающей из этого элемента в единицу времени в поток за слоем.

2. О совместном течении потоков идеальных жидкостей разной плотности. Пусть (S) есть назамкнутая гладкая в смысле Ляпунова поверхность, получившаяся вращением дуги OC вокруг оси z цилиндрических координат z, r, θ с началом в точке 0 (фиг. 2).

Разместим на этой поверхности равномерно проницаемый слой источников идеальной жидкости плотности ρ с заданным коэффициентом проницания σ, а в точке B оси z на расстоянии h от начала поместим сток интенсивности Q. Если теперь на поверхность (S) направим поступательный поток идеальной жидкости той же плотности ρ со скоростью V_∞, направленной по оси z в положительную ее сторону, то потенциал скоростей возникающего при этом течения запишется



Фиг. 2

$$\Phi(P) = V_\infty z - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} \frac{m(M)}{a_1} dF + \frac{Q}{4\pi a_2} \tag{2.1}$$

где a_1 — расстояние от точки P пространства до переменной точки M поверхности, a_2 — расстояние от точки P до точки B, а $m(M)$ — неизвестная функция интенсивности слоя источников.

Направляя нормаль поверхности (S) в сторону положительного направления оси z и принимая во внимание формулы (1.8), из (2.1) получим выражения предельных значений нормальной составляющей скорости рассматриваемого потока в точке M_0

$$V_{n\pm} = V_\infty \cos \varphi_0 - \frac{1}{4\pi} \left[\mp 2\pi m(M_0) + \iint\limits_{(S)} m(M) \frac{\cos \psi}{a^2} dF \right] + \frac{Q}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{a_3^2} \tag{2.2}$$

где φ_0 — угол между нормалью в точке M_0 и осью z, а остальные величины отмечены на фиг. 2.

Подставляя выражения (2.2) в граничное условие краевой задачи проницания, которое в данном случае, с учетом выбранного направления нормали, запишется

$$V_{n-} = \sigma V_{n+} \tag{2.3}$$

получим, что основное интегральное уравнение (1.10) для данного случая запишется

$$m(M_0) = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} m(M) \frac{\cos \psi}{a^2} dF + 2 \frac{1-\sigma}{1+\sigma} V_\infty \cos \varphi_0 + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{2\pi} \frac{\cos \alpha}{a_3^2} \tag{2.4}$$

а его решение даст искомую функцию $m(M_0)$ интенсивности слоя источников, соответствующего данному значению коэффициента σ.

Выберем теперь Q так, чтобы вся жидкость, вытекающая из поверхности (S) в спутную зону, отсасывалась стоком в точке B, т. е. чтобы имело место равенство

$$\iint\limits_{(S)} V_{n+} dF = Q \tag{2.5}$$

При выполнении всего сказанного на оси z будет существовать точка A, в которой скорость потока будет равна нулю. Координата z_0 этой точки определится из условия

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=z_0} = 0 \tag{2.6}$$

Таким образом, среди поверхностей тока рассматриваемого течения существует поверхность тока с уравнением

$$-\int\limits_{(z_0,\,0)}^{(z,\,r)} \left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)dz - \left(r\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)dr = E \tag{2.7}$$

проходящая через точку A и контур, ограничивающий поверхность (S), причем постоянная E определится из условия

$$\iint\limits_{(S)} V_{n-}\, dF = E \tag{2.8}$$

и на основании равенств (2.5) и (2.3), будет равна

$$E = \sigma Q \tag{2.9}$$

Назовем часть всего потока, ограниченную поверхностью тока (2.7) и поверхностью (S), внутренним потоком, а остальную часть — внешним потоком.

Заменим теперь равномерно проницаемый слой источников с коэффициентом проницания σ жидкости с плотностью ρ равномерно проницаемым слоем источников с тем же коэффициентом проницания σ, но другой идеальной жидкости с плотностью $\varkappa$. Тогда внутренний поток будет состоять из смеси обеих жидкостей и плотность этой смеси ρ_1 выразится формулой

$$\rho_1 = \varkappa(1-\sigma) + \sigma\rho \tag{2.10}$$

Подберем интенсивность излучения этого слоя и мощность стока в точке B так, чтобы внутренний поток остался в прежних границах, т. е. чтобы граница раздела потоков снова состояла из линий тока L как для внешнего, так и для внутреннего потоков. Внешний поток при этом не изменится и значит его потенциал выразится той же формулой (2.1), а потенциал внутреннего потока будет уже другим. Так как в случае $\varkappa = \rho$ потенциал скоростей внутреннего потока выражается формулой (2.1), то в случае $\varkappa \neq \rho$ будем искать потенциал скоростей $\Phi_1(P)$ внутреннего потока в форме

$$\Phi_1(P) = k\Phi(P) \tag{2.11}$$

где k — неизвестная постоянная.

Уравнение линии тока L внешнего потока запишется

$$\frac{dz}{\partial\Phi/\partial z} = \frac{dr}{\partial\Phi/\partial r}$$

Умножая его на k^{-1} получим, что L будет линией тока и для внутреннего потока.

Как внешний, так и внутренний потоки будут стационарными и безвихревыми, и для них, следовательно, будет иметь место уравнение Бернулли — Эйлера, на основании которого выражения для давлений во внешнем и внутреннем потоках имеют соответственно вид

$$p = C - \frac{\rho V^2}{2}, \qquad p = C_1 - \frac{\rho_1 V_1^2}{2} \tag{2.12}$$

В критической точке A давления обеих потоков одинаковы и скорости равны нулю, откуда следует, что $C_1 = C$. Вдоль L давление для обеих потоков одинаково и, следовательно, на L выполняется условие

$$\frac{V_1}{V} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}$$

Подставляя сюда выражения скоростей через их потенциалы, получим (учитывая также (2.10))

$$k = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}, \qquad k = \sqrt{\frac{\rho}{\varkappa(1-\sigma)+\sigma\rho}} \tag{2.13}$$

Таким образом, потенциал скоростей для внутреннего потока в форме (2.11) существует и основные величины внутреннего и внешнего потоков связаны зависимостью

$$V_{\infty 1} = kV_\infty, \qquad m_1(M) = km(M), \qquad Q_1 = kQ \tag{2.14}$$

где ρ выражается формулой (2.13) через плотность ρ жидкости набегающего потока и плотность $\varkappa$ жидкости, излучаемой слоем источников.

При $\sigma = 0$ слой источников на поверхности (S) будет непроницаем и внешний поток жидкости с плотностью ρ будет обтекать внутренний поток, состоящий только из жидкости с плотностью $\varkappa$.

Вся граница раздела (включая и поверхность (S)) будет в этом случае поверхностью тока, уравнение которой, согласно выражениям (2.7) и (2.9), запишется

$$\int_{(z_0,0)}^{(z,r)} \left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)dz - \left(r\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)dr = 0$$

Удалим теперь сток B по оси z в бесконечность. Все вышеприведенные рассуждения останутся в силе, а внутренний поток при этом превратится в спутную зону, простирающуюся за поверхностью (S) до бесконечности. Граница этой спутной зоны по мере удаления от (S) будет расширяться, асимптотически приближаясь к поверхности некоторого круглого цилиндра с образующей, параллельной оси z.

Потенциал скоростей внешнего потока при этом согласно формуле (2.1) выразится формулой

$$\Phi(P) = V_\infty z - \frac{1}{4\pi k}\iint\limits_{(S)} \frac{m_1(M)}{a_1}\,dF \tag{2.15}$$

а потенциал скоростей спутной зоны запишется

$$\Phi_1(P) = k\Phi(P) \tag{2.16}$$

Радиус R_∞ цилиндра, к которому асимптотически приближается поверхность спутной зоны, может быть определен из условия

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right)_+ dF = \pi V_{\infty 1} R_\infty^2 \tag{2.17}$$

Во всем вышепроделанном анализе предполагалось $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. При этом единица площади слоя добавляет в поток за единицу времени количество жидкости $(1-\sigma)V_{n+}$ и на поверхности (S) распределен слой источников, функция интенсивности $m(M_0)$ которого определяется уравнением (2.4). Но коэффициент σ может быть и больше единицы. При этом, как следует из условия (2.3), единица площади такого слоя будет поглощать из потока за единицу времени количество жидкости $(\sigma - 1)\, V_{n+}$ и, следовательно, на поверхности (S) в этом случае будет распределен слой стоков, функция интенсивности которого определится тем же уравнением (2.4).

Таким образом, в зависимости от значения коэффициента σ будут иметь место следующие типы рассматриваемого течения:

1. Для $0<\sigma<1$. Внешний поток состоит из жидкости с плотностью ρ и скоростью V_∞ на бесконечности. По поверхности (S) распределен равномерно проницаемый слой источников жидкости с плотностью $\varkappa$, интенсивность $m_1(M_0)$ которого определяется уравнением

$$m(M_0) = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\iint\limits_{(S)} m(M)\frac{\cos\psi}{a^2}dF + 2\frac{1-\sigma}{1+\sigma}V_\infty\cos\varphi_0 \qquad (2.18)$$

и соответствующим равенством из (2.14), а постоянная k при этом определяется формулой (2.13).

Потенциал скоростей внешнего потока определяется равенством (2.15). Спутная зона представляет собой поток смешанной жидкости с плотностью ρ_1, определяемой формулой (2.10), а потенциал скоростей этого потока определяется формулой (2.16).

2. Для $\sigma=0$. Слой источников на поверхности (S) будет непроницаем и внешний поток будет обтекать спутную зону, которая будет состоять из жидкости с плотностью $\varkappa$. Будет существовать поверхность тока (включающая в себя и поверхность (S)), отделяющая внешний поток от спутной зоны.

3. Для $\sigma=1$. Этот случай интереса не представляет, ибо будем иметь только стационарный поступательный поток со скоростью V_∞.

4. Для $\sigma>1$. Весь ход решения, проведенный выше, остается в силе и для этого случая, но теперь, как уже отмечалось, по поверхности (S) будет распределен слой стоков.

Но особенно важным будет при этом случай,когда набегающий поток жидкости с плотностью ρ и скоростью V_∞ на бесконечности состоит из смеси двух жидкостей с плотностями ρ_0 и $\varkappa$, а на поверхности (S) распределен слой стоков, обладающий свойством поглощать только жидкость с плотностью $\varkappa$.

В этом случае из зависимости

$$\rho_0 = \rho\sigma + (1-\sigma)\varkappa$$

определится соответствующий коэффициент σ и из уравнения (2.18) определится функция $m(M_0)$; после чего функция интенсивности $m_0(M_0)$ стоков, поглощающих только жидкость с плотностью $\varkappa$, определится равенством

$$m_0(M_0) = km(M_0), \qquad k = \sqrt{\frac{\rho}{\rho\sigma+(1-\sigma)\varkappa}} = \text{const} \qquad (2.19)$$

3. Решение задачи для диска. Пусть поверхность (S) есть круглый диск радиуса R. Тогда потенциал скоростей (2.1) потока для случая $\varkappa=\rho$ запишется

$$\Phi(P) = V_\infty z - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\frac{m(M)}{a_1}dF + \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(z-h)^2+r^2}} \qquad (3.1)$$

В этом случае $\cos\psi=0$ и решение уравнения (2.4), т. е. функция интенсивности соответствующего слоя, выразится

$$m(M_0) = 2\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\left[V_\infty + \frac{Q}{4\pi}\frac{h}{(h^2+r^2)^{3/2}}\right] \qquad (3.2)$$

а интенсивность Q стока в точке B определится формулой

$$Q = 2\pi V_\infty R^2\left[\sigma + \frac{4h}{\sqrt{h^2+R^2}} - 3\right]^{-1} \qquad (3.3)$$

В случае, когда $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ и $\varkappa \neq \rho$, а сток B удален в бесконечность, для функции интенсивности слоя источников получим выражение

$$m(M_0) = 2\frac{1-\sigma}{1+\sigma}V_\infty \tag{3.4}$$

потенциал скоростей внешнего потока на основании выражений (3.1) (3.4) определится формулой

$$\Phi(P) = V_\infty z + \frac{1-\sigma}{1+\sigma}V_\infty\left[\sqrt{z^2+r^2} - \sqrt{z^2+(r-R)^2} + \right.$$
$$\left. + r\ln\frac{r-R+\sqrt{z^2+(r-R)^2}}{r+\sqrt{z^2+r^2}}\right] \tag{3.5}$$

потенциал скоростей спутной зоны запишется

$$\Phi_1(P) = k\Phi(P)$$

где постоянная k определяется по формуле (2.13), а радиус цилиндра, к которому асимптотически приближается поверхность, ограничивающая спутную зону, на основании выражения (2.17) определится формулой

$$R_\infty = R\sqrt{\frac{2}{1+\sigma}}$$

Полученные результаты остаются в силе и для случая $\sigma > 1$, только в случае, когда набегающий поток представляет собой смесь, а слой стоков способен поглощать только жидкость с плотностью $\varkappa$, постоянная k определится по формуле (2.19).

Поступила 26 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.— Л., ГИТТЛ. 1946.
2. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., ГИТТЛ, 1954.