

УДК 517.9

## РАСЧЕТ СЕМЕЙСТВ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В УЗКОМ КОНТЕЙНЕРЕ

О. Ю. Кантур, В. Г. Цибулин

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Рассмотрена плоская задача фильтрационной конвекции Дарси для контейнеров прямоугольного сечения, удлиненных в вертикальном направлении. С использованием спектрально-разностного метода, сохраняющего косимметрию исходной задачи, изучено развитие семейств стационарных конвективных режимов с момента возникновения неустойчивости на первичном семействе до момента столкновения семейств.

Ключевые слова: фильтрационная конвекция, косимметрия, семейства стационарных решений, спектрально-разностный метод.

**Введение.** При исследовании конвекции несжимаемой жидкости в пористой среде (модель Дарси) обнаружен эффект одновременного существования бесконечного числа стационарных режимов [1]. Это явление объяснено на основе теории косимметрии [2, 3] и исследовано в натуральных [4, 5] и численных экспериментах [6–11]. Непрерывное семейство стационарных конвективных режимов, различающихся спектральными характеристиками, возникает после того, как состояние механического равновесия теряет устойчивость. С увеличением интенсивности подогрева некоторые равновесия на семействе становятся неустойчивыми. Из расчетов с использованием метода Галеркина [6, 7] следует, что в зависимости от геометрических характеристик такой переход может происходить в результате как монотонной, так и колебательной неустойчивости. Это означает появление в спектре равновесия положительного вещественного собственного значения или пары комплексных чисел с положительной вещественной частью. Кроме того, в расчетах [7–9] обнаружены столкновения семейств стационарных режимов и появление периодических и хаотических движений.

В настоящей работе с использованием спектрально-разностного метода [11] изучено развитие семейств стационарных конвективных режимов для прямоугольных контейнеров, высота которых больше ширины. Расчеты проведены для дискретизаций, приводящих к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с числом переменных от нескольких сотен до тысячи. Проанализированы возникновение неустойчивости на первичном семействе, потеря устойчивости всех равновесных состояний семейства, а также случаи столкновения семейств.

**Постановка задачи.** В плоской постановке рассматривается задача о подогреве снизу контейнера прямоугольного сечения, заполненного пористой средой, насыщенной жидкостью. Для жидкости, подчиняющейся закону Дарси, уравнения в безразмерных переменных имеют вид

$$\theta_t = \Delta\theta + \lambda\psi_x + J(\theta, \psi); \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01-01-22002, 02-01-00337) и в рамках программы “Российские университеты — фундаментальные исследования” (код проекта УР.04.01.063).

$$\Delta\psi - \theta_x = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  — отклонение температуры от значений, соответствующих равновесному состоянию;  $\psi$  — функция тока;  $J(\theta, \psi) = \theta_x \psi_y - \theta_y \psi_x$  — якобиан;  $t$  — время;  $x, y$  — декартовы координаты на плоскости. Фильтрационное число Рэлея определяется формулой  $\lambda = \alpha g A k l / (\chi \nu)$ , где  $\alpha$  — объемное расширение;  $g$  — ускорение свободного падения;  $A$  — характерная разность температур;  $k$  — проницаемость;  $l$  — характерная длина;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. На границе области  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$  заданы краевые условия первого рода

$$\theta = 0, \quad \psi = 0. \quad (3)$$

Начальное условие для системы (1), (2) имеет вид

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y), \quad (4)$$

где  $\theta_0(x, y)$  — заданная в области  $\Omega$  функция. Для  $\psi$  начальное условие не ставится, так как функция тока находится по температуре из краевой задачи (2), (3). Система (1)–(3) глобально разрешима и диссипативна, и косимметрия зависит от функции тока  $\psi$  [2, 3]. Отметим также, что уравнения (1), (2) инвариантны относительно следующих преобразований:

$$R_x: \quad \{x, y, \theta, \psi\} \mapsto \{a - x, y, \theta, -\psi\}; \quad (5)$$

$$R_y: \quad \{x, y, \theta, \psi\} \mapsto \{x, b - y, -\theta, -\psi\}. \quad (6)$$

Нулевое равновесие  $\theta = \psi = 0$  для системы (1)–(4) имеется при всех значениях параметра  $\lambda$ , и собственные числа соответствующей спектральной задачи определяются формулой  $\lambda_{nm} = 4\pi^2(n^2/a^2 + m^2/b^2)$ , где  $m, n$  — целые числа. В [3] показано, что первое критическое значение  $\lambda_{11}$  двукратно для произвольной области, и при переходе параметра  $\lambda$  через  $\lambda_{11}$  от состояния покоя ответвляется семейство стационарных режимов с переменным спектром (первичное семейство). Далее каждому переходу параметра  $\lambda$  через очередное критическое значение  $\lambda_{nm}$  ( $n + m > 2$ ) соответствует ответвление от нулевого равновесия нового семейства неустойчивых стационарных режимов.

**Метод решения.** Для решения задачи применяется спектрально-разностный метод, основанный на использовании разложений Галеркина по координате  $y$  и разностных аппроксимаций по координате  $x$  [11]. Решение разыскивается в виде

$$\{\theta, \psi\} = \sum_{j=1}^m \{\theta_j(x, t), \psi_j(x, t)\} \sin \frac{\pi j y}{b}. \quad (7)$$

После подстановки (7) в уравнения (1), (2) и проектирования получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \theta_j'' - c_j \theta_j + \lambda \psi_j' - J_j, & J_j &= \frac{2\pi}{b} \left( \sum_{i=1}^{m-j} \chi_{j,i}^1 + \sum_{i=1}^{j-1} \chi_{j,i}^2 \right), \\ \psi_j'' - c_j \psi_j - \theta_j' &= 0, & j &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по  $x$ , точка — дифференцирование по  $t$ ;  $c_j = j^2 \pi^2 / b^2$ ; величины  $\chi_{j,i}^1, \chi_{j,i}^2$  представляются в виде

$$\begin{aligned} \chi_{j,i}^1 &= ((2i + j)/2)(D_s(\theta_{i+j}, \psi_i) - D_s(\theta_i, \psi_{i+j})) - (j/2)(D_a(\theta_{i+j}, \psi_i) + D_a(\theta_i, \psi_{i+j})), \\ \chi_{j,i}^2 &= ((j - i)/2)(D_s(\theta_i, \psi_{j-i}) + D_a(\theta_{i+j}, \psi_i) - D_s(\theta_{j-i}, \psi_i) + D_a(\theta_{j-i}, \psi_i)), \end{aligned}$$

где  $D_a, D_s$  — дифференциальные операторы:

$$D_a(\theta, \psi) = \theta' \psi - \theta \psi', \quad D_s(\theta, \psi) = \theta' \psi + \theta \psi'. \quad (9)$$

Краевые условия для задачи (8) записываются в виде

$$\theta_j(t, 0) = \theta_j(t, a) = 0, \quad \psi_j(t, 0) = \psi_j(t, a) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Для аппроксимации уравнений (8) по переменной  $x$  применяется метод конечных разностей второго порядка точности. На отрезке  $[0, a]$  вводится сетка  $\omega = \{x_k: x_k = kh, k = 0, \dots, n, h = a/(n+1)\}$ . Здесь и далее используются обозначения  $\theta_{j,k} = \theta_j(x_k, t)$ ,  $\psi_{j,k} = \psi_j(x_k, t)$ ,  $J_{j,k} = J_j(x_k, t)$ .

Первые и вторые производные линейной части уравнений (8) аппроксимируются центральными разностными отношениями. В результате получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{j,k} &= \frac{\theta_{j,k+1} - 2\theta_{j,k} + \theta_{j,k-1}}{h^2} - c_j \theta_{j,k} + \lambda \frac{\psi_{j,k+1} - \psi_{j,k-1}}{2h} - J_{j,k}, \\ \frac{\psi_{j,k+1} - 2\psi_{j,k} + \psi_{j,k-1}}{h^2} - c_j \psi_{j,k} - \frac{\theta_{j,k+1} - \theta_{j,k-1}}{2h} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из краевых условий (10) находятся сеточные функции на границах

$$\theta_{j,0} = \theta_{j,n} = 0, \quad \psi_{j,0} = \psi_{j,n} = 0. \quad (12)$$

В [11] построены аппроксимации операторов  $D_a$  и  $D_s$  (см. (9)), обеспечивающие сохранение косимметрии для задачи (11), (12):

$$\begin{aligned} d_{a,k}(\theta, \psi) &= \frac{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}{2h} \psi_k - \theta_k \frac{\psi_{k+1} - \psi_{k-1}}{2h}, \\ d_{s,k}(\theta, \psi) &= \frac{2\theta_{k+1}\psi_{k+1} + \psi_k(\theta_{k+1} - \theta_{k-1}) + \theta_k(\psi_{k+1} - \psi_{k-1}) - 2\theta_{k-1}\psi_{k-1}}{6h}. \end{aligned}$$

Из начального условия (4) получаются начальные значения температуры

$$\theta_{j,k} = \int_D \theta_0(x_k, y) \sin \frac{\pi j y}{b}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, n.$$

Для интегрирования полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод Рунге — Кутты. Как установлено в работе [3], при  $\lambda$ , незначительно превышающих  $\lambda_{11}$ , все равновесия на семействе устойчивы. Таким образом, стартуя из окрестности неустойчивого нулевого равновесия и интегрируя соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений до установления решения, можно получить некоторое устойчивое равновесие семейства. Далее семейство вычисляется с использованием алгоритма [6, 8, 10], причем матрица линеаризации находится численно, а ее ядро определяется методом SVD-разложения. Для уточнения решения, соответствующего равновесному состоянию в окрестности семейства, применяется метод Ньютона, и значение для следующей точки на семействе вычисляется с использованием экстраполяционного метода Адамса.

**Вычисление семейств стационарных режимов.** Ниже представлены результаты расчета семейств стационарных конвективных режимов для узких контейнеров с относительной высотой  $\beta = b/a > 1$ . Ширина контейнера фиксирована:  $a = 1$ , высота  $b$  варьировалась. Исследование проведено для значений фильтрационного числа Рэлея с момента образования первичного устойчивого семейства до момента столкновения семейств.

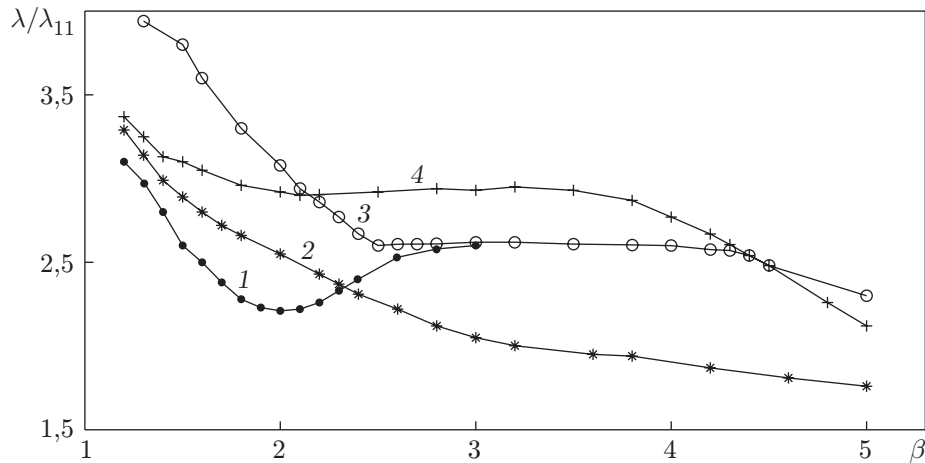


Рис. 1. Зависимость критических значений от высоты контейнера:  
 1 — возникновение монотонной неустойчивости на семействе; 2 — возникновение колебательной неустойчивости; 3 — неустойчивость всего семейства; 4 — столкновение первичного семейства и ветви вторичного семейства

Состояние покоя  $\theta = \psi = 0$  глобально устойчиво при малых градиентах температуры (параметр Рэлея  $\lambda < \lambda_{11}$ ), а при превышении критического значения возникает непрерывное семейство стационарных конвективных режимов, наследующее устойчивость нулевого равновесия [2, 3]. В спектре каждого равновесия содержится нулевое значение, что соответствует нейтральному направлению вдоль семейства, а устойчивость или неустойчивость равновесия семейства определяется из анализа устойчивости на трансверсальном к семейству многообразии.

При малых надкритичностях, т. е. при значениях параметра  $\lambda$ , незначительно превышающих критическое значение  $\lambda_{11}$ , первичное семейство полностью устойчиво. С увеличением параметра сначала происходит рост семейства, и при  $\lambda = \lambda_u$  на нем возникают равновесия (стационарные конвективные режимы) с нейтральным спектром на трансверсальном многообразии. Число таких режимов зависит от геометрии контейнера. Затем эти равновесия теряют устойчивость (второй переход), и на семействе возникают дуги из неустойчивых режимов.

При  $\lambda_{12} < \lambda_u$  происходит ответвление второго семейства, состоящего из неустойчивых режимов и принадлежащего инвариантному подпространству (следствие дискретной симметрии  $R_y$  (см. (6))). С увеличением числа Рэлея в результате внутренней бифуркации на этом семействе возникает не лежащая на инвариантном подпространстве ветвь [8], которая при дальнейшем возрастании  $\lambda$  сталкивается с первичным семейством. В результате происходит перезамыкание ветвей, и в фазовом пространстве образуются новые замкнутые кривые семейств стационарных режимов.

В зависимости от высоты контейнера возможны два сценария. При  $2,1 < \beta < 4,4$  сначала первичное семейство становится полностью неустойчивым ( $\lambda = \lambda_o$ ), а затем происходит его столкновение со вторым семейством ( $\lambda = \lambda_c$ ). Для контейнеров с  $1,0 < \beta \leq 2,1$  и  $\beta \geq 4,4$  наблюдается столкновение первичного семейства, состоящего из устойчивых и неустойчивых стационарных режимов, со вторым, полностью неустойчивым семейством. Во всех случаях в результате получают три замкнутые кривые, состоящие из равновесий: два дополнительных (малых) семейства и одно семейство, полученное объединением почти всех частей исходных семейств. Для контейнеров с сечением, близким к квадратному, эти дополнительные семейства сначала состоят из устойчивых и неустойчивых режи-

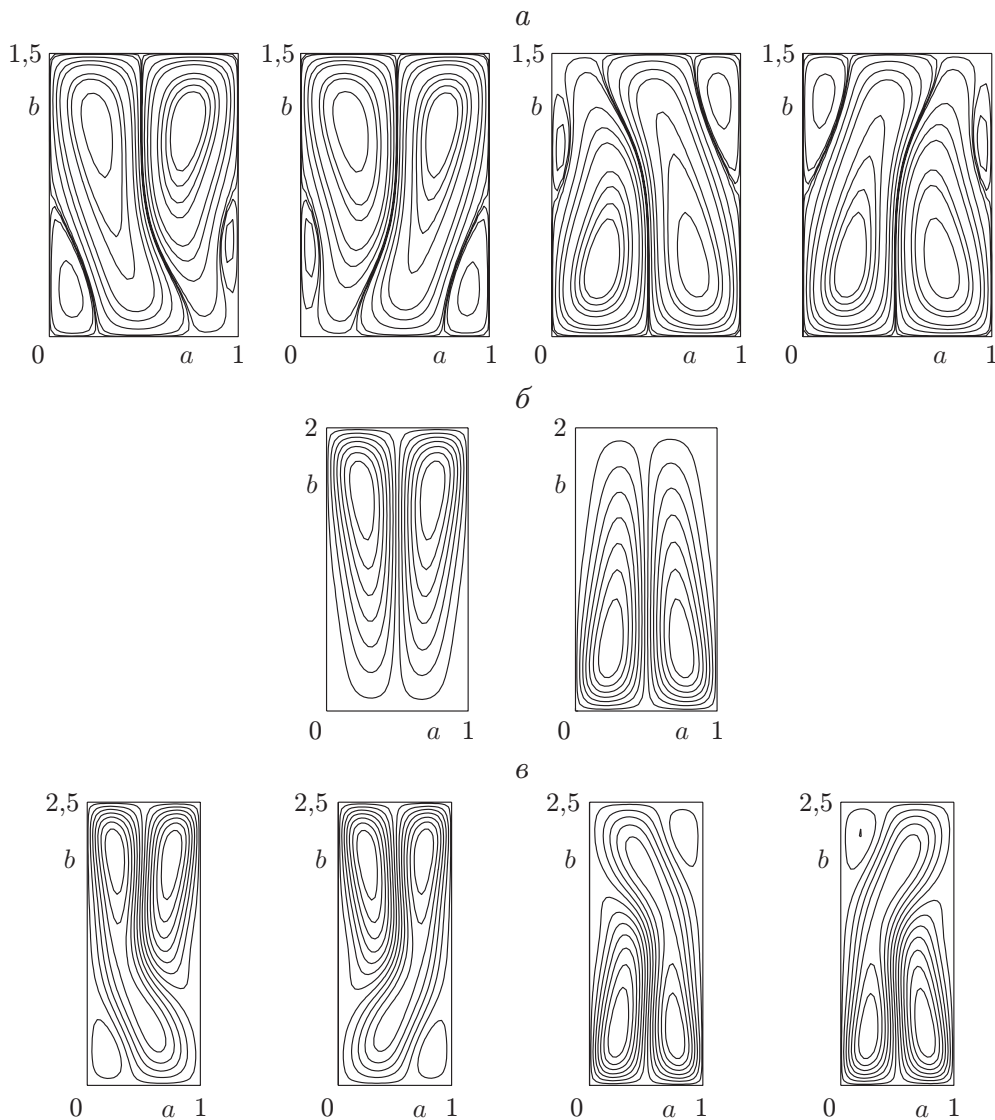


Рис. 2. Функции тока стационарных режимов, теряющих устойчивость раньше других, при различных значениях относительной высоты контейнера:

$a - \beta = 1,5$ ;  $б - \beta = 2$ ;  $в - \beta = 2,5$

мов. Следует отметить, что для  $\beta < 1,34$  эти семейства продолжают существовать при увеличении параметра Рэлея, а для более высоких контейнеров дополнительные семейства стягиваются в точки и исчезают.

Результаты вычислений критических значений  $\lambda_u$ ,  $\lambda_c$ ,  $\lambda_o$  при различных  $\beta$  представлены на рис. 1 (значения  $\lambda$  отнесены к критическому значению первого перехода  $\lambda_{11}$ ). Кривые 1, 2 соответствуют возникновению монотонной и колебательной неустойчивости на семействе, кривая 3 — потере устойчивости всего первичного семейства ( $\lambda = \lambda_o$ ), кривая 4 — критическим значениям столкновения первичного и вторичного семейств ( $\lambda = \lambda_c$ ). Результаты получены для дискретизации с  $n \times m = 16 \times 16$ , для проверки проводились вычисления при  $n \times m = 24 \times 16$ ,  $24 \times 24$ ,  $30 \times 30$ .

**Возникновение неустойчивости на семействе.** В [6, 7] для моделей Галеркина обнаружена колебательная неустойчивость для узкого контейнера с  $b/a = 2,5$ . Из результатов настоящей работы следует, что для узких контейнеров с  $\beta < 2,3$  возникновение

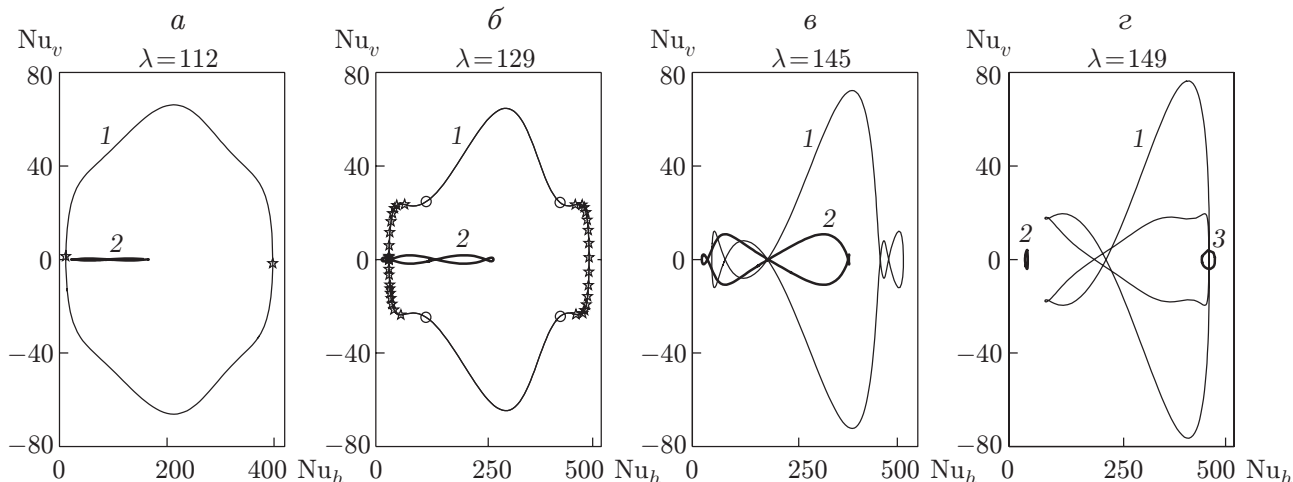


Рис. 3. Семейства стационарных режимов ( $\beta = 2$ ):  
 а-в — до столкновения (1 — первичное семейство, 2 — вторичное семейство); г — после  
 столкновения (1 — объединенное семейство, 2, 3 — малые семейства)

неустойчивых дуг на семействе стационарных режимов происходит в результате монотонной неустойчивости. При изменении  $\beta$  наблюдается непрерывный переход от монотонной потери устойчивости к колебательной, и существует значение  $\beta$ , которому соответствует потеря устойчивости в шести точках семейства: в четырех точках неустойчивость колебательная, а в двух монотонная. Для дискретизации с  $n \times m = 16 \times 16$  возникновение неустойчивости в шести точках получено при  $\beta \approx 2,3$ , для более мелкой дискретизации соответствующее значение  $\beta$  незначительно увеличивается.

Неустойчивость на семействе возникает одновременно в четном числе точек, поскольку стационарная задача (1), (2) инвариантна относительно дискретных симметрий (5), (6). На рис. 2 для нескольких значений  $\beta$  приведены функции тока тех режимов, которые раньше других теряют устойчивость. В частности, монотонная неустойчивость наблюдается в четырех точках для контейнеров с  $1,0 < \beta < 1,8$  и в двух точках при  $1,8 \leq \beta < 2,3$ . Отметим, что монотонная неустойчивость в двух точках соответствует режимам с минимальным и максимальным тепловым потоком через вертикальное срединное сечение. Второй переход в результате колебательной неустойчивости может происходить в двух ( $3,9 \leq \beta < 4,8$ ) или в четырех точках ( $2,3 \leq \beta < 3,9$ ;  $\beta > 4,8$ ). При  $\beta < 3,3$  равновесия на семействе становятся неустойчивыми в результате монотонной и колебательной неустойчивости, а при  $\beta > 3,3$  — только в результате колебательной неустойчивости.

**Сценарии развития семейств.** На рис. 3 семейства стационарных режимов представлены в координатах  $Nu_h$  и  $Nu_v$  [6]:

$$Nu_h = \int_0^b \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=a/2} dy, \quad Nu_v = \int_0^a \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} dx$$

(звездочками (кружками) обозначены режимы, соответствующие возникновению монотонной (колебательной) неустойчивости).

Для контейнера с  $\beta = 2$  первичное семейство равновесий ответвляется при  $\lambda = 50,6$ , а вторичное — при  $\lambda = 81,6$ . С ростом  $\lambda$  первичное семейство деформируется, и при  $\lambda = \lambda_u = 112$  (рис. 3,а) на нем появляются две точки, соответствующие потере устойчивости монотонным образом. Затем на семействе образуются две дуги, соответствующие неустойчивым равновесиям, а при  $\lambda = 129$  появляются четыре режима, потерявшие устой-

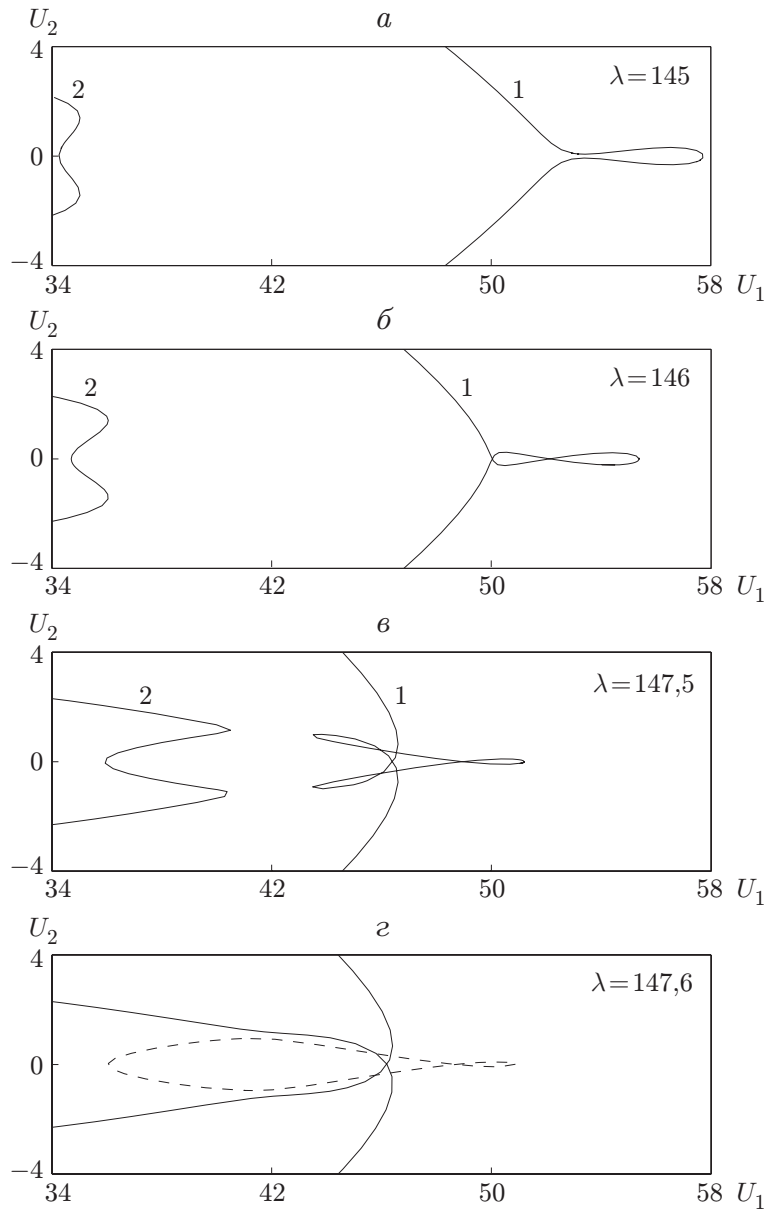


Рис. 4. Сближение (а-в) и последующее столкновение (г) семейств ( $\beta = 2$ ):  
 1 — первичное семейство, 2 — вторичное семейство, штриховая линия — малое семейство, отделившееся при столкновении

чивость колебательным образом (рис. 3,б). Расположение двух семейств перед столкновением показано на рис. 3,в, причем большая часть первичного семейства уже неустойчива (устойчивы небольшие дуги, соответствующие максимальным и минимальным значениям  $Nu_v$ ). Столкновение происходит при  $\lambda_c \approx 147,6$ , в результате образуются два малых семейства и основное семейство, которое получается объединением почти всех частей исходных семейств (рис. 3,г). В этом случае наблюдается седловая бифуркация согласно классификации [2, 12, 13]. Следует отметить, что на рис. 3 не показана ветвь вторичного семейства, принадлежащая инвариантному подпространству (отрезок на линии  $Nu_v = 0$ ).

На рис. 4 показано сближение и последующее столкновение первичного и вторичного семейств (кривые 1, 2). Кривые на рис. 4 — проекции на подмногообразии, образованное

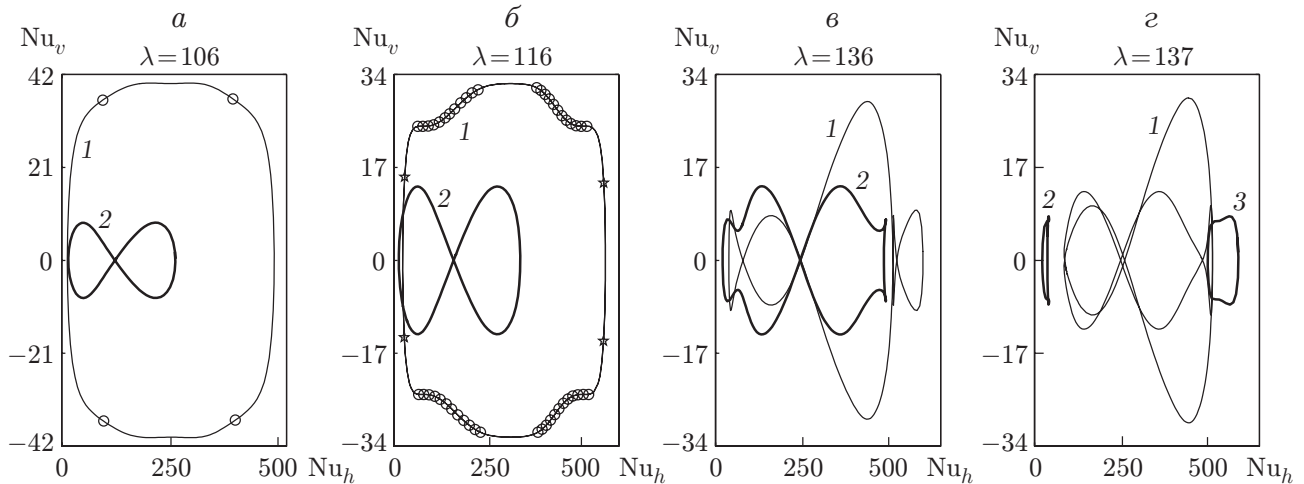


Рис. 5. Семейства стационарных режимов ( $\beta = 2,5$ ) (обозначения те же, что на рис. 3)

собственными векторами нулевого равновесия, которые соответствуют двум собственным числам с максимальной вещественной частью. При  $\lambda = 156$  объединенное семейство становится полностью неустойчивым, а при дальнейшем увеличении параметра  $\lambda$  малые семейства схлопываются и исчезают, что соответствует описанной в [2, 12, 13] бифуркации рождения цикла равновесий “из воздуха”.

На рис. 5 показано развитие семейств при  $\beta = 2,5$ . Первичное семейство равновесий ответвляется при  $\lambda = 46,9$ , а при  $\lambda = \lambda_u = 106$  на семействе возникает колебательная неустойчивость в четырех точках (рис. 5,а), из которых при дальнейшем увеличении  $\lambda$  развиваются четыре дуги неустойчивых равновесий. С увеличением  $\lambda$  появляются также дуги, состоящие из равновесий, потерявших устойчивость монотонно (рис. 5,б). При  $\lambda_o = 122$  семейство становится полностью неустойчивым, и траектории, выпущенные из окрестности семейства, притягиваются к устойчивому предельному циклу, который существует при  $\lambda > 119$ . На рис. 5,в показаны семейства до столкновения, на рис. 5,г показан результат столкновения — образование объединенного семейства (кривая 1) и двух малых семейств (кривые 2, 3).

В расчетах при  $\beta \geq 2,3$  обнаружено одновременное существование устойчивых стационарных движений на семействе и устойчивых периодических автоколебательных режимов, при  $\beta < 2,3$  обнаружены сложные стохастические режимы. Например, после того как семейство равновесий для контейнера с  $\beta = 2$  становится полностью неустойчивым, появляется хаотический режим ( $\lambda = 156$ ). При увеличении  $\lambda$  свыше  $\lambda = 164$  хаотический режим трансформируется в предельный цикл, при уменьшении параметра  $\lambda$  данный хаотический режим разрушается, и наблюдается установление к двум устойчивым режимам на семействе равновесий.

Диапазон значений фильтрационного числа Рэлея, при которых одновременно могут существовать устойчивые равновесия на семействе и устойчивые предельные циклы, увеличивается с возрастанием  $\beta$  при  $\beta \geq 2,3$ .

**Заключение.** Исследование семейств стационарных режимов в задаче фильтрационной конвекции с законом трения Дарси позволило изучить развитие ответвляющихся от нулевого равновесия первичного и вторичного семейств вплоть до их столкновения при различных отношениях высоты к ширине прямоугольного контейнера. Найдены критические значения фильтрационного числа Рэлея, при которых на первичном семействе возникает неустойчивость, т. е. происходит второй переход. Показано, каким образом от



высоты контейнера зависят характер неустойчивости (колебательная или монотонная) и число теряющих устойчивость стационарных движений.

Рассмотрено столкновение семейств стационарных режимов. Установлено, что в результате перезащмыкания ветвей сталкивающихся семейств могут быть получены новые семейства, состоящие как из устойчивых, так и из неустойчивых стационарных режимов. Для того чтобы выяснить, какие из этих режимов реализуются в эксперименте, необходимы дальнейшие исследования. (Некоторые подходы к этой проблеме вместе с аналитическими и численными результатами по конечномерной модели Дарси имеются в работе [14].)

Авторы выражают благодарность В. И. Юдовичу за полезные обсуждения и советы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Любимов Д. В.** О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
2. **Юдович В. И.** Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.
3. **Yudovich V. I.** Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5, N 2. P. 402–411.
4. **Глухов А. Ф., Любимов Д. В., Путин Г. Ф.** Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости равновесия // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 549–551.
5. **Глухов А. Ф., Путин Г. Ф.** Экспериментальное исследование конвективных структур в насыщенной жидкостью пористой среде вблизи порога неустойчивости механического равновесия // Гидродинамика. 1999. Вып. 12. С. 104–120.
6. **Говорухин В. Н.** Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 6. С. 772–774.
7. **Говорухин В. Н.** Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 5. С. 53–62.
8. **Govorukhin V.** Calculation of one-parameter families of stationary regimes in a cosymmetric case and analysis of plane filtration convection problem // Notes Numer. Fluid Mech. 2000. N 74. P. 133–144.
9. **Говорухин В. Н., Шевченко И. В.** Численное решение задачи плоской конвекции Дарси на компьютере с распределенной памятью // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 1. С. 3–12.
10. **Karasözen B., Tsybulin V. G.** Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Lett. A. 1999. V. 262. P. 321–329.
11. **Кантур О. Ю., Цибулин В. Г.** Спектрально-разностный метод расчета конвективных движений жидкости в пористой среде и сохранение косимметрии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 6. С. 913–923.
12. **Куракин Л. Г., Юдович В. И.** Бифуркации при монотонной потере устойчивости равновесия косимметричной динамической системы // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 1. С. 29–33.
13. **Kurakin L. G., Yudovich V. I.** Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // Chaos. 2000. V. 10, N 2. P. 311–330.
14. **Govorukhin V. N., Yudovich V. I.** Bifurcations and selection of equilibria in a simple cosymmetric model of filtrational convection // Chaos. 1999. V. 9, N 2. P. 403–412.

*Поступила в редакцию 10/1 2002 г.,  
в окончательном варианте — 14/VI 2002 г.*