

УДК 532.517.013.4:536.252

МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОКОНВЕКЦИИ В ЖИДКОСТИ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ МЕЖДУ ТЕПЛОПРОВОДНЫМИ МАССИВАМИ

О. Н. Гончарова

Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул

E-mail: gon@math.asu.ru

Моделируются нестационарные режимы конвекции жидкости в условиях слабой гравитации. Исследуется конвекция в прямоугольной области, вытянутой по направлению силы тяжести и заключенной между двумя теплопроводными массивами, в случае теплоизоляции торцов прямоугольника и периодического потока тепла через внешние границы массивов. При этом выполняется условие равенства нулю суммарного потока тепла. При описании конвективных движений в жидкости используются две математические модели: классическая модель Обербека — Буссинеска и модель микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости. Результаты численных исследований подтверждают количественные и качественные различия характеристик течений, рассчитанных в рамках двух моделей конвекции. Представлены траектории движения частиц жидкости. Изучены эффекты, обусловленные различными физическими характеристиками задачи.

Ключевые слова: конвекция, микрогравитация, математическое моделирование, небуссинесковские эффекты.

Введение. Различные вопросы математического моделирования конвекции, а также обоснование применяемых для исследования этого процесса математических моделей изложены в работах [1, 2]. В классических моделях тепловой гравитационной конвекции используются уравнения Обербека — Буссинеска, которые представляют собой результат упрощения основных уравнений гидродинамики на основе предположений о линейной зависимости плотности жидкости от температуры и о соленоидальности поля скоростей. Для исследования конвекции в условиях микрогравитации, в микромасштабах или при быстропеременном тепловом режиме применяется модель микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости, основанная на точных законах сохранения массы и импульса. Предполагается, что вклад диссипативной функции и сил давления в уравнение притока тепла пренебрежимо мал. Кроме того, считается, что кинематическая вязкость ν и температуропроводность χ постоянны. Альтернативная модель конвекции характеризуется несоленоидальностью поля скоростей \mathbf{V} . Если предположить, что удельный объем жидкости линейно зависит от температуры T , то систему уравнений микроконвекции можно записать для новых искомым функций: модифицированной скорости $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \beta\chi\nabla T$ и модифицированного давления q (β — температурный коэффициент линейного расширения жидкости). Соленоидальность поля модифицированной скорости позволяет ввести аналог функции тока для плоских задач и провести численное исследование задачи в переменных завихренности — модифицированная функция тока.

Учет несоленоидальности поля скоростей приводит к появлению небуссинесковских эффектов в течениях жидкостей. Наиболее существенные отличия результатов от ре-

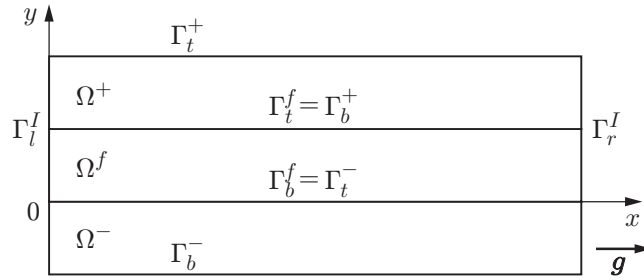


Рис. 1. Область течения и ее границы:

Ω^f — область течения; Ω^+ , Ω^- — теплопроводные массивы; $\Gamma_b^f := \{(x, y): x \in (0, x_0), y = 0\}$, $\Gamma_t^f := \{(x, y): x \in (0, x_0), y = 1\}$; $\Gamma_l^I := \{(x, y): x = 0, y \in (y_b^I, y_t^I)\}$, $\Gamma_r^I := \{(x, y): x = x_0, y \in (y_b^I, y_t^I)\}$, $y_b^f = y_t^- = 0$, $y_t^f = y_b^+ = 1$, $y_t^+ = 1 + y_0$, $y_b^- = -y_0$

зультатов, предсказываемых классической теорией конвекции, наблюдаются при изучении нестационарных задач [2–5]. Данная работа является продолжением исследования нестационарных процессов конвекции жидкости при микрогравитации [4, 5].

Рассматривается движение жидкости, заключенной между двумя прямоугольными теплопроводными массивами (рис. 1). Торцы областей предполагаются теплоизолированными. На внешних границах теплопроводных массивов задается периодический по времени тепловой поток, определяющий граничный тепловой режим для жидкости. Корректность постановок начально-краевых задач для уравнений микроконвекции в замкнутой области с твердой непроницаемой границей предполагает выполнение необходимого условия: интегральный тепловой поток через границу должен быть равен нулю [2]. Предполагается, что на границах раздела жидкой и твердых сред выполняются естественные условия непрерывности температуры и тепловых потоков, а распределение температуры в твердых массивах описывается с помощью уравнения теплопроводности. Численно решается сопряженная задача конвекции в жидкости и теплопроводности в граничных массивах. Расчеты проводятся в условиях, когда параметр микроконвекции $\eta = gl^3/(\nu\chi)$ достаточно мал (l — характерный масштаб длины; \mathbf{g} — ускорение свободного падения ($g = |\mathbf{g}|$)). Приводятся результаты расчетов, позволяющие сделать вывод о влиянии периодического температурного режима, свойств теплопроводного массива и его толщины, а также интенсивности гравитационного поля на развитие микроконвекции.

1. Постановка задачи. Уравнения Обербека — Буссинеска и уравнения микроконвекции в переменных ω – ψ (ω — завихренность; ψ — функция тока (или модифицированная функция тока)), описывающие конвекцию в области Ω^f (см. рис. 1), можно записать в виде [2]

$$\omega_t + v_1\omega_x + v_2\omega_y = \tilde{\nu} \Delta\omega + g\beta T_y + F_\omega; \tag{1}$$

$$\Delta\psi = -\omega; \tag{2}$$

$$T_t + v_1T_x + v_2T_y = \tilde{\chi} \Delta T + F_T. \tag{3}$$

Здесь $v_1 = \psi_y$; $v_2 = -\psi_x$; $\tilde{\nu}$, $\tilde{\chi}$, F_T , F_ω определяются по формулам

$$\tilde{\nu} = (1 + \beta T)\nu, \quad \tilde{\chi} = (1 + \beta T)\chi, \quad F_T = -\beta\chi|\nabla T|^2,$$

$$F_\omega = \beta(-T_x q_y + T_y q_x) + \nu\beta(\Delta v_2 T_x - \Delta v_1 T_y) + (-\beta\chi)(\omega \Delta T + \nabla T \cdot \nabla \omega) + (-\beta^2 \chi^2)(\Delta T_x T_y - \Delta T_y T_x).$$

Для модели Обербека — Буссинеска коэффициенты в (1), (3) определяются следующим образом: $\tilde{\nu} = \nu$, $\tilde{\chi} = \chi$, $F_\omega = 0$, $F_T = 0$. Здесь $q = p' - \beta\chi(\nu + \nu'/\rho_0 - \chi) \Delta T$ — модифицированное давление; $p' = p/\rho_0 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$; p — давление в жидкости; ν' — вторая вязкость; ρ_0 —

некоторое относительное значение плотности жидкости. Заметим, что система координат выбрана таким образом, чтобы выполнялось условие $\mathbf{g} = (g, 0)$.

Распределение температуры T^+ , T^- в областях Ω^+ , Ω^- описывается однородным уравнением теплопроводности вида (3), где $\tilde{\chi} = \chi^\pm$ — температуропроводность граничных массивов, а конвективные слагаемые отсутствуют.

На торцах $\Gamma_{l,r}^I$ ($\Gamma_{l,r}^I = \Gamma_{l,r}^f$ — торцы области, занятой жидкостью; $\Gamma_{l,r}^I = \Gamma_{l,r}^\pm$ — торцы верхнего (знак “+”) и нижнего (знак “-”) граничных массивов соответственно) областей (см. рис. 1) ставятся условия теплоизоляции вида

$$T_x = 0. \quad (4)$$

На границах Γ_t^+ , Γ_b^- задается периодический поток тепла:

$$T_y = A \sin \gamma t. \quad (5)$$

Отметим, что в каждый момент времени интегральный поток тепла через внешние границы равен нулю. Выполнение данного условия на границе области, занятой жидкостью, подтверждается численно.

В случае когда рассматривается модель Обербека — Буссинеска, граничные условия для уравнений (1), (2) являются следствием условий прилипания и записываются следующим образом. На границах Γ_l^f , Γ_r^f выполняются условия

$$\psi = 0, \quad \psi_x = 0, \quad (6)$$

на границах Γ_b^f , Γ_t^f — условия

$$\psi = 0, \quad \psi_y = 0. \quad (7)$$

В случае модели микроконвекции условия на границах Γ_l^f , Γ_r^f для (1), (2) следуют из соотношений

$$\psi_x = \beta \chi T_y, \quad \psi_y = 0, \quad (8)$$

условия на границах Γ_b^f , Γ_t^f — из соотношений

$$\psi_x = \beta \chi T_y, \quad \psi_y = -\beta \chi T_x. \quad (9)$$

Данные соотношения также являются следствием условий прилипания для физической скорости. Заметим, что если условия вида (5) ставятся непосредственно на границе области Ω^f , занятой жидкостью, то имеют место соотношения, представленные в [2]:

$$\Gamma_b^f, \Gamma_t^f: \quad \psi = \beta \chi A x \sin \gamma t, \quad \psi_y = -\beta \chi T_x.$$

Температурный режим (5) на внешних границах обуславливает распределение температуры и тепловой поток на границах Ω^f . Постановку задачи для системы уравнений (1)–(3) можно завершить, задав естественные условия непрерывности температуры и тепловых потоков на границах $\Gamma_{b,t}^f$:

$$\begin{aligned} \Gamma_t^f: \quad T &= T^-, & \Gamma_b^f: \quad T &= T^+, \\ \Gamma_t^f: \quad T_y &= \varkappa^- T_y^-, & \Gamma_b^f: \quad T_y &= \varkappa^+ T_y^+ \end{aligned} \quad (10)$$

(\varkappa^\pm — отношение теплопроводностей твердой и жидкой сред). При $t = 0$ начальные

условия для обеих моделей принимаются в виде

$$\omega = 0, \quad \psi = 0, \quad T^I = T_0 = \text{const},$$

что соответствует состоянию покоя однородно прогретой жидкости.

Таким образом, решается сопряженная задача нахождения неизвестных функций ω , ψ , T и T^\pm , удовлетворяющих описанным выше начальным и граничным условиям в областях Ω^f и Ω^\pm соответственно.

2. Численное решение. Запишем уравнения (1), (3) в виде

$$\Phi_t = (\tilde{\nu}\Phi_x - Bv_1\Phi)_x + (\tilde{\nu}\Phi_y - Bv_2\Phi)_y + F, \quad (11)$$

где $F = g\beta T_y + F_\omega - \beta\nu\nabla T \cdot \nabla\omega$, $B = 1$ при $\Phi = \omega$; $F = F_T - \beta\chi|\nabla T|^2$, $B = 1$ при $\Phi = T$; $F = 0$, $B = 0$ при $\Phi = T^\pm$. Для решения уравнения (2) применяется метод установления, основанный на решении уравнения типа (11) с итерационным параметром λ . В этом случае $\tilde{\nu} = \lambda$, $F = \lambda\omega$, $B = 0$ при $\Phi = \psi$.

Для численного решения (11) применяется численный метод, разработанный в [2–5] на основе [6–8] с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы (метод переменных направлений), формально имеющей второй порядок аппроксимации. Для уравнения (11) схема расчета записывается в следующем общем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{k+1/2} - \Phi^k}{\tau/2} &= [\tilde{\nu}\Phi_x^{k+1/2} - B(\psi_y)\Phi^{k+1/2}]_x + [\tilde{\nu}\Phi_y^k + B(\psi_x)\Phi^k]_y + F^k, \\ \frac{\Phi^{k+1} - \Phi^{k+1/2}}{\tau/2} &= [\tilde{\nu}\Phi_x^{k+1/2} - B(\psi_y)\Phi^{k+1/2}]_x + [\tilde{\nu}\Phi_y^{k+1} + B(\psi_x)\Phi^{k+1}]_y + F^k. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь τ — шаг по времени ($t_k = k\tau$, $k = 1, 2, \dots$); $\Phi^k = \Phi(t_k, \cdot)$. Заметим, что при $\Phi = \omega$ и $\Phi = T$ функция ψ полагается известной. Для реализации представленной схемы вводится равномерная разностная сетка (x_n, y_m) для каждой области Ω^I . Для производных в (13) используется разностная аппроксимация второго порядка. При этом конвективные слагаемые на актуальном слое аппроксимируются центральными разностями. В результате требуется решить систему линейных алгебраических уравнений.

Граничные значения для ψ и ω следуют из (6)–(9). Для задания граничных условий для вихря используются условия Тома для модели Обербека — Буссинеска (см. [6]) и выводятся аналоги этих условий для модели микроконвекции, подобно тому как это сделано в [2, 4]. Граничные значения для температуры T и T^\pm на промежуточном слое $t = t^{k+1/2}$ следуют из (4). Для определения T и T^\pm на слое $k + 1$ используются условия (5), (10) и представление решения (т. е. температуры в жидкости и твердых массивах) в таком виде, когда $T_{n,m}^\pm$ и $T_{n,m}$ выражаются через неизвестные значения температуры $T_{n,m1}$ на верхней границе раздела жидкость — твердое тело Γ_b^f и температуры $T_{n,1}$ на нижней границе раздела Γ_t^f :

$$\begin{aligned} T_{n,m}^+ &= \beta_{n,m}^+ + \gamma_{n,m}^+ T_{n,m1}, & T_{n,m}^- &= \beta_{n,m}^- + \gamma_{n,m}^- T_{n,1}, \\ T_{n,m} &= \alpha_{n,m} T_{n,m1} + \gamma_{n,m} T_{n,1} + \beta_{n,m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Представления (13) позволяют реализовать своеобразную прогонку с параметрами, которыми являются граничные значения температуры $T_{n,m1}$, $T_{n,1}$, и найти сначала эти значения, а затем распределение температуры как в жидкости, так и в твердых массивах.

Численное решение задачи включает следующие этапы. Процесс перехода на новый временной слой t^{k+1} начинается с расчета температуры, а именно функций $(T^\pm)^{k+1/2}$ и $T^{k+1/2}$ на промежуточном временном слое. Затем с помощью прогонки с параметрами

вычисляются $(T^I)^{k+1}$. С использованием найденных значений T^{k+1} завихренность ω^{k+1} рассчитывается по схеме (12). На каждом временном слое $k+1$ проводятся внутренние итерации для расчета функции ψ . Итерационный процесс считается сошедшимся, если выполнены определенные критерии сходимости, в частности $\max_{n,m} |\psi_{n,m}^{s+1} - \psi_{n,m}^s| < \varepsilon_\psi \max_{n,m} |\psi_{n,m}^{s+1}|$ (s — номер итерации; ε_ψ — заданная точность расчета ψ^{s+1}), а также критерий, позволяющий сделать вывод о выполнении граничных условий (см. [2, 4]). Последнее необходимо вследствие использования разностных граничных условий для вихря в виде их зависимости от функции тока (см. [2, 4, 6]).

3. Результаты численного исследования. Расчеты проводятся на сетках размером 200×20 , 400×40 , 800×80 с шагом по времени $\tau = 0,010$; $0,001$ с (итерационный параметр равен $\lambda = 0,5$). Основные физические параметры задачи: $\nu = 0,15$ см²/с, $\chi = 1,5$ см²/с, $\beta = 0,0006$ К⁻¹, $\chi^\pm = 1$, 10 см²/с, $g = 0,090$; $0,225$ см²/с. Область течения представляет собой прямоугольник размером 10×1 . Устойчивость численного алгоритма и экспериментально определенный порядок сходимости (близкий ко второму) были проверены в расчетах на последовательности вложенных сеток с использованием правила Рунге [2, 4, 9]. При этом контролировалась величина r_i , характеризующая для каждой сетки интенсивность движения $\max_{n,m} |\psi_{n,m}|$. Данные исследования проведены при следующих значениях параметров задачи: $\chi^\pm = 1$ см²/с, $y_0 = 1$ см, $A = 20$ К, $\gamma = 2$ с⁻¹, $T_0 = 10$ К.

На рис. 2–6 представлены траектории движения частицы жидкости, рассчитанные на промежутке времени $t = 0 \div 240$ с с использованием модели микроконвекции (ММ) и модели Обербека — Буссинеска (МОБ). Результаты расчетов подтверждают различия в поведении частицы жидкости: траектории, рассчитанные по МОБ, заполняют отрезки прямых, параллельных оси x . Траектории, рассчитанные по ММ, имеют значительно более сложный, спиралеобразный вид. Выявлены также количественные различия: абсолютные значения скоростей, вычисленные по ММ, на 3–4 порядка превышают соответствующие значения, полученные по МОБ. Это позволяет сделать вывод о наличии микроконвекции

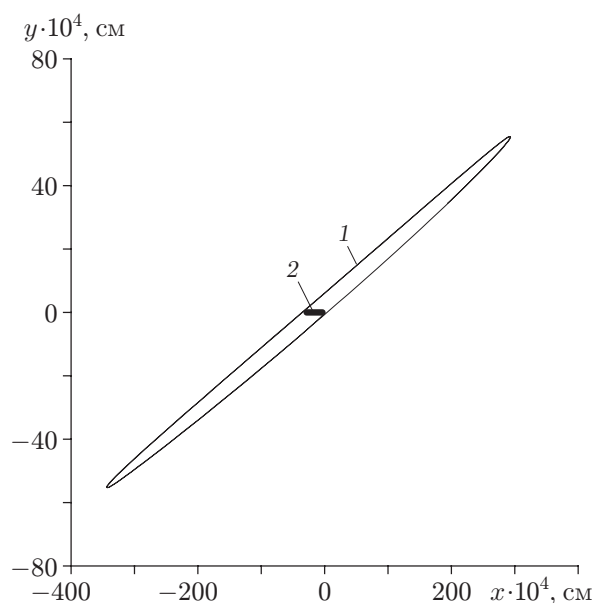


Рис. 2. Траектории движения частицы жидкости, рассчитанные с использованием двух моделей:
1 — ММ; 2 — МОБ

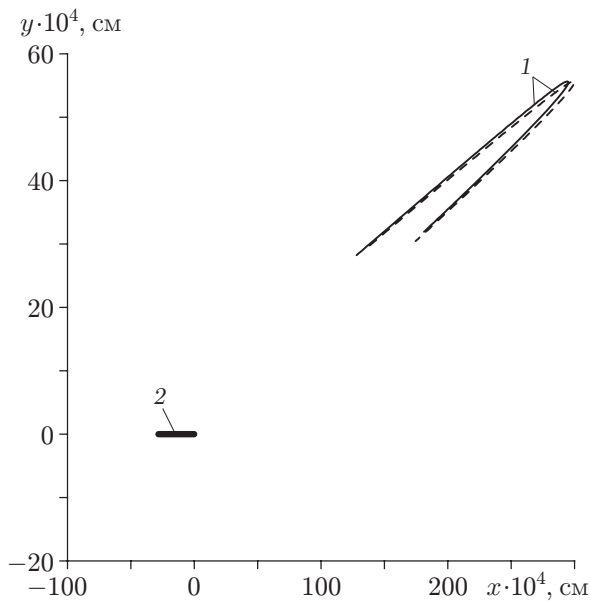


Рис. 3

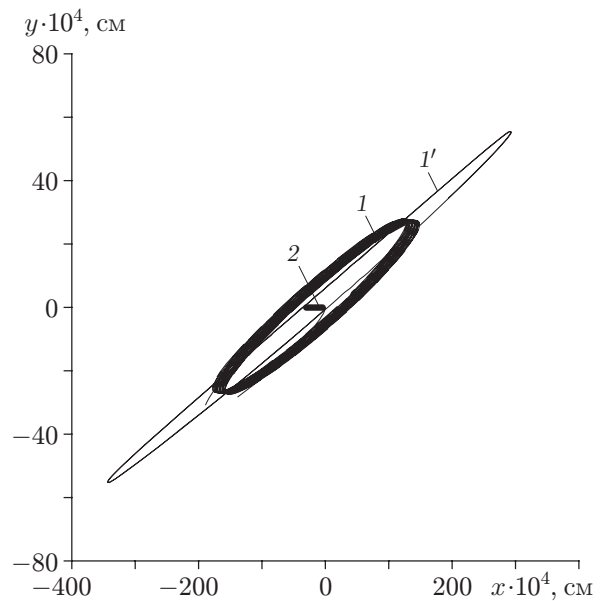


Рис. 4

Рис. 3. Траектории движения частицы жидкости ($y_0 = 0,5$ см, $\eta = 0,4$, $\gamma = 0,1$ см⁻¹, $A = 60$ К):

1 — ММ (сплошная линия — $\chi^\pm = 1$ см²/с, $t = 100 \div 120$ с; штриховая линия — $\chi^\pm = 10$ см²/с, $t = 100 \div 120$ с); 2 — МОБ ($t = 0 \div 120$ с)

Рис. 4. Траектории движения частицы жидкости ($y_0 = 1$ см, $\eta = 0,4$):

1, 1' — ММ (1 — $\gamma = 2$ см⁻¹, $t = 0 \div 120$ с; 1' — $\gamma = 0,1$ см⁻¹, $t = 0 \div 120$ с); 2 — МОБ

и отсутствии конвекции Буссинеска. На рис. 2 представлены траектории движения частицы жидкости, находящейся в начальный момент времени $t = 0$ в точке (7,5 см, 0,7 см), до момента времени $t = 120$ с, в случае когда толщина граничных массивов равна $y_0 = 1$ см, их теплопроводности одинаковы: $\chi^\pm = 1$ см²/с, а граничный температурный режим определяется значениями $A = 60$ К, $\gamma = 0,1$ с⁻¹ ($T_0 = 10$ К). Изменение теплопроводности граничных массивов χ^\pm оказывает менее существенное влияние на характер траектории движения частицы по сравнению с влиянием частоты γ в граничном условии для температуры (5). На рис. 3 представлены фрагменты траекторий на промежутке времени $t = 100 \div 120$ с, рассчитанные по ММ. Рассчитанные по МОБ траектории движения частицы, находящейся в начальный момент времени $t = 0$ в точке (7,5 см, 0,7 см), заполняют отрезок прямой (в течение промежутка времени $t = 0 \div 120$ с). Расчеты проводились при $\chi^\pm = 1, 10$ см²/с. При этом $y_0 = 0,5$ см, $\eta = 0,4$, $\gamma = 0,1$ с⁻¹, $A = 60$ К.

Траектории движения частицы, находящейся в начальный момент времени $t = 0$ в точке (7,5 см, 0,7 см), могут существенно различаться для быстрых и медленных периодических температурных режимов на границе. На рис. 4 показаны возможные траектории движения частицы жидкости на промежутке времени $t = 0 \div 120$ с, рассчитанные согласно ММ. В случае $\gamma = 2$ с⁻¹ наблюдается интенсивное перемешивание (спиралеобразная траектория с витком меньшего диаметра). При $\gamma = 0,1$ с⁻¹ имеет место менее интенсивное движение частицы, траектория которого представляет собой виток большего диаметра. Рассчитанные по МОБ траектории заполняют отрезок прямой.

Исследуются также эффекты, обусловленные изменением частоты в граничном условии для температуры (5). На рис. 5 представлены фрагменты траекторий движения частицы, в начальный момент времени $t = 0$ находящейся в точке (7,5 см, 0,7 см), при

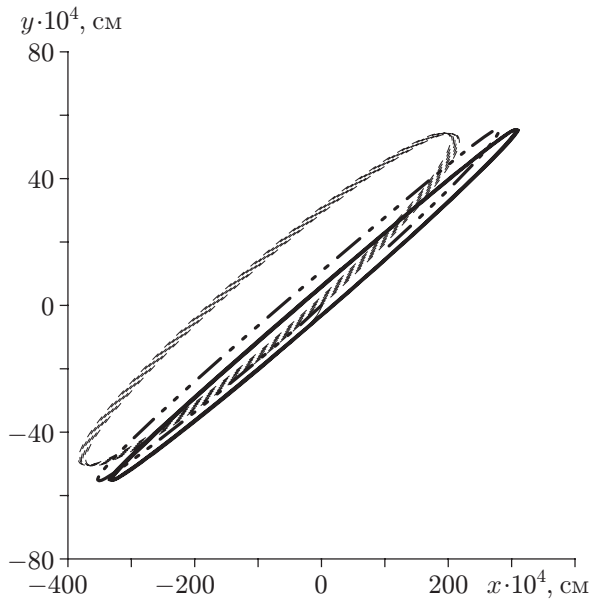


Рис. 5

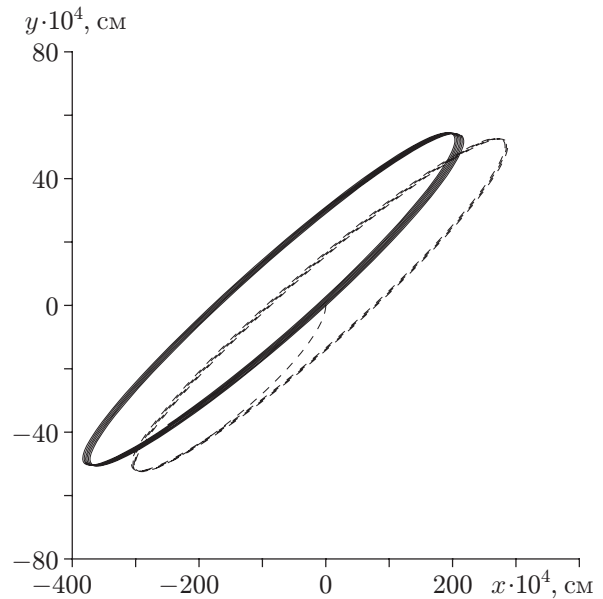


Рис. 6

Рис. 5. Траектории движения частицы жидкости, рассчитанные по ММ ($y_0 = 0,2$ см, $\eta = 0,4$):

сплошная линия — $\gamma = 0,5$ см $^{-1}$, $t = 0 \div 120$ с; штриховая — $\gamma = 2$ см $^{-1}$, $t = 100 \div 120$ с;
штрихпунктирная — $\gamma = 0,05$ см $^{-1}$, $t = 0 \div 120$ с

Рис. 6. Траектории движения частицы жидкости, рассчитанные по ММ ($y_0 = 0,2$ см, $\gamma = 2$ см $^{-1}$):

сплошная линия — $\eta = 0,4$, $t = 100 \div 120$ с; штриховая — $\eta = 1$, $t = 0 \div 120$ с

$\gamma = 2,00; 0,50; 0,05$ с $^{-1}$. Толщина граничных массивов равна $y_0 = 0,2$ см. При других значениях траектории имеют аналогичный спиралеобразный вид, причем скорость движения тем больше, чем меньше толщина границ.

В расчетах получены различные траектории движения частицы жидкости, находящейся в слабом гравитационном поле. Для представленных на рис. 2–5 результатов параметр микроконвекции равен $\eta = 0,4$. Увеличение интенсивности гравитационного поля приводит к замедлению вращательного движения частицы. На рис. 6 представлены траектории движения частицы, в начальный момент времени $t = 0$ находящейся в точке (7,5 см, 0,7 см), при $\eta = 0,4; 1,0$.

Заключение. На основе двух математических моделей конвекции: классической модели Обербека — Буссинеска и модели микроконвекции — проведено численное моделирование совместных задач конвекции в жидкости и процесса теплопроводности в твердых граничных массивах в условиях микрогравитации. Установлено, что результаты расчетов по этим моделям качественно различаются. Траектории, рассчитанные с использованием модели Обербека — Буссинеска, заполняют отрезки прямых, параллельных вектору силы тяжести. Траектории, рассчитанные по модели микроконвекции, имеют спиралеобразный вид, что свидетельствует об интенсивном перемешивании жидкости вблизи границ раздела. Численно изучено влияние теплопроводных свойств массивов, их толщины, а также интенсивности внешнего периодического температурного режима на характер траекторий движения частицы жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Джозеф Д.** Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
2. **Андреев В. К.** Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. М.: Физматлит, 2009.
3. **Гончарова О. Н.** Микроконвекция в слабых силовых полях. Сравнение двух моделей при численном исследовании // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 58–63.
4. **Гончарова О. Н.** Численное исследование микроконвекции в длинном прямоугольнике // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 5. С. 26–37.
5. **Goncharova O.** Mathematical and numerical modelling of microconvection in the long rectangular domains // Microgravity Sci. Technol. 2008. N 20. P. 213–217.
6. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
7. **Douglas J. (Jr.), Gunn J. E.** A general formulation of alternating direction methods. 1. Parabolic and hyperbolic problems // Numer. Math. 1964. V. 6. P. 428–453.
8. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.
9. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 2/XI 2009 г.
