

УДК 539.25

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН С РЕБРОМ КЛИНА ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ РАСТВОРА

Х. Б. Толипов

Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск

E-mail: thb@susu.ac.ru

С использованием классических методов получено решение задачи о взаимодействии рэлеевских волн с ребром клина при малых углах раствора. Это решение описывает поверхностные волны, характеристики которых согласуются с известными экспериментальными данными, а также объемные волны, оказывающие существенное влияние на распределение энергии. Выявлены новые особенности распространения поверхностных волн в клиновидных телах.

Ключевые слова: неоднородная волна, дифракция, клиновидная среда, волновое поле, теория упругости.

**Введение.** Трудности решения задачи о взаимодействии рэлеевских волн с ребром клина при малых углах раствора обусловлены сложностью акустических процессов, происходящих вблизи кромки клина. В исследованиях [1–3], продолжением которых является настоящая работа, установлено, что в волне Рэлея направления волновой нормали сдвиговой и продольной составляющих не совпадают с направлением движения волны. Это свидетельствует об акустической анизотропии на границе сред и является причиной необычных явлений, имеющих место при отражении волны от граней клина.

Волновое поле в клине представляет собой совокупность четырех волн: поверхностных падающей, отраженной от ребра клина, прошедшей на вторую грань клина и трансформированных объемных. Структура волны Рэлея характеризуется наличием смещений, локализованных вблизи поверхности. При приближении к ребру смещения достигают противоположной грани клина, вызывая возмущения поверхности этой грани, которые можно рассматривать в качестве источника вторичных волн. В силу неоднородности данных возмущений возникают как поверхностные, так и объемные волны, уносящие энергию в направлении, противоположном ребру клина. Поэтому в случае  $\theta < 90^\circ$ , когда смещения достигают второй грани клина, происходит изменение параметров и пространственной структуры набегающего на его ребро акустического поля.

Эволюция структуры падающей волны Рэлея при движении из бесконечности к ребру клина исследована в работе [3], в которой классическими методами получено приближенное решение данной волновой задачи. Чтобы удовлетворить условию отсутствия напряжений на гранях клина, волновой вектор  $k$  должен принимать комплексные значения, где действительная часть определяет скорость волны, а мнимая — затухание, обусловленное оттоком энергии при трансформации в объемные волны.

Расчеты показывают, что при приближении к ребру волна разделяется на две моды — антисимметричную и симметричную, спектральные характеристики которых становятся близки к характеристикам объемных волн (рис. 1). При уменьшении угла клина изменения фазовой скорости проявляются в некотором увеличении крутизны волны с приращением локальной толщины клина в точке нахождения этой волны.

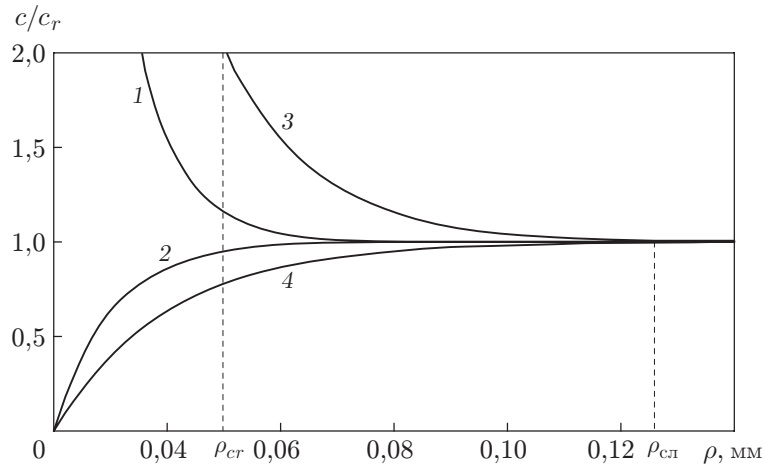


Рис. 1. Зависимость скорости рэлеевской волны от расстояния до точки излома при различных углах клина:  
 1, 2 —  $\theta = 20^\circ$ , 3, 4 —  $\theta = 10^\circ$ ; 1, 3 — симметричная мода, 2, 4 — антисимметричная мода

Заметим, что если при распространении в упругих средах скорость ультразвуковой волны остается постоянной, то в клиновидной пластине при приближении к ребру она монотонно изменяется: скорость симметричной моды увеличивается и стремится к скорости продольной волны, а скорость антисимметричной моды уменьшается до нуля.

Характер распространения волн в клиновидной пластине отличается от характера распространения волн в плоскопараллельной пластине: волны, смещения частиц в которых антисимметричны относительно плоскости симметрии клина, доходят до его ребра. Симметричные волны доходят только до определенной критической точки  $\rho_{cr}$ , не достигая кромки клина. Размеры области (“пробки”), в которую продольные колебания не проникают, существенно зависят от величины угла клина. Верхняя граница этой области  $\rho_{sl}$  устанавливается по условию кратности корней дисперсионного уравнения. В этой точке происходит слияние ветвей антисимметричной и симметричной мод.

Изменение амплитуд смещений отраженной от угла клина волны обусловлено действием интерференционных факторов. При изменении угла клина наложение фаз антисимметричной и симметричной компонент является причиной осцилляций коэффициентов отражения при малых его углах.

В точке слияния ветвей антисимметричной и симметричной мод  $\rho_{sl}$  при отражении от ребра формируется рэлеевская волна, представляющая собой совокупность продольной и поперечной составляющих [4]:

$$U_r = U_t + U_l.$$

Следует отметить, что составляющие рэлеевской волны связаны между собой и сдвинуты по фазе на  $90^\circ$  (рис. 2). Продольная составляющая распространяется вдоль поверхности, а поперечная — по нормали к ней. По мере движения происходит последовательное перераспределение энергии от одной составляющей к другой, поэтому они являются двумя неотъемлемыми составляющими рэлеевской волны, подобно тому как электрическое и магнитное поля являются компонентами единого электромагнитного поля.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим теоретическую модель распространения акустической волны из бесконечности к ребру клина. Гармоническая поверхностная падающая рэлеевская волна  $U_1$ , распространяясь по верхней грани клина до точки излома  $O$ , вызывает неоднородное возмущение части поверхности на нижней грани (рис. 3).

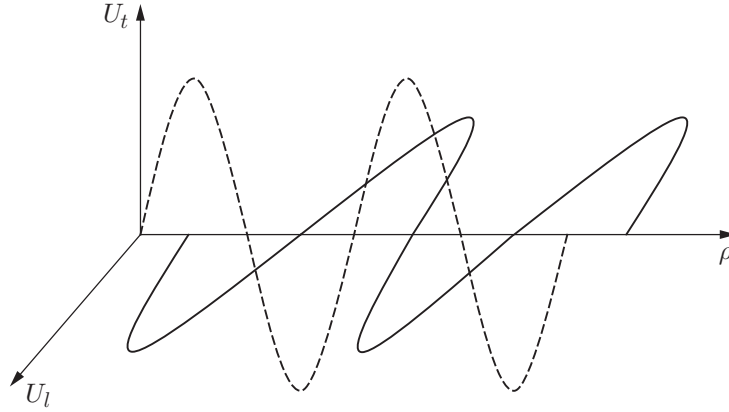


Рис. 2. Смещения в рэлеевской волне:  
сплошные линии — продольные волны, штриховые — сдвиговые волны

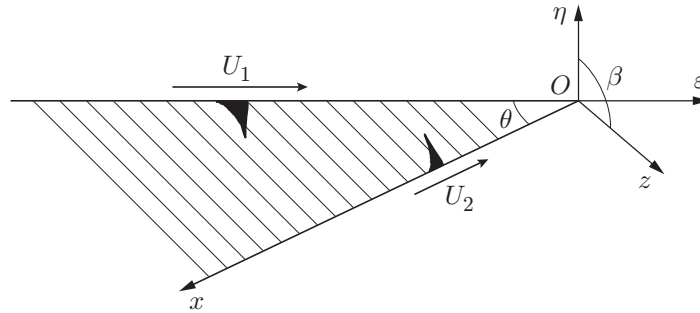


Рис. 3. Схема взаимодействия рэлеевской волны с клином

Динамическая модель распространения рэлеевской волны в клиновидной среде строится на основе уравнения движения и граничных условий, в которых напряжения на поверхностях клина считаются равными нулю.

Волновое поле исходной волны записывается в системе координат  $(\varepsilon, \eta)$ , а исследование волнового поля за изломом проводится в системе координат  $(x, z)$ , которая может быть получена путем поворота исходной системы координат на угол  $\beta$ . Требуется определить поля смещений и скоростей в области за изломом поверхности в различные моменты времени.

Величину смещений  $U_l, U_t$  в продольных и поперечных волнах можно определить из стандартных уравнений акустики для изотропного твердого тела:

$$\Delta U_l + k_l^2 U_l = 0, \quad \Delta U_t + k_t^2 U_t = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями при  $z = 0$ :

$$\mu \left( \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) + \sigma_{xz}^0 = 0, \quad 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) + \sigma_{zz}^0 = 0. \tag{2}$$

Здесь  $k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$  и  $c_l, c_t$  — соответственно волновые числа и скорости распространения продольных и поперечных волн;  $\omega$  — круговая частота;  $\sigma_{xz}^0, \sigma_{zz}^0$  — напряжения, вызываемые смещениями исходной рэлеевской волны на поверхности за изломом;  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе;  $U_z, U_x$  — проекции смещений  $u_t, u_l$  на оси  $z$  и  $x$ .

Введя продольный и поперечный потенциалы, связанные со смещениями соотношениями  $\mathbf{U}_l = \text{grad } \Phi$ ,  $\mathbf{U}_t = \text{rot } \Psi$ , систему уравнений (1), (2) можно записать в следующем виде:

$$\Delta \Phi + k_l^2 \Phi = 0, \quad \Delta \Psi + k_t^2 \Psi = 0; \quad (3)$$

$$\mu \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\sigma_{xz}^0, \quad 2\mu \left( -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{k_t^2}{2} \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right) = -\sigma_{zz}^0. \quad (4)$$

Колебания на наклонной плоскости возбуждаются падающей плоской рэлеевской волной, пространственная структура которой описывается формулами

$$\Phi_r = \exp(ik_r \varepsilon - i\omega t + q_r \eta), \quad \Psi_r = p \exp(ik_r \varepsilon - i\omega t + s_r \eta), \quad (5)$$

где

$$q_r = \sqrt{k_r^2 - k_l^2}, \quad s_r = \sqrt{k_r^2 - k_t^2}, \quad p = -i\sqrt{q_r/s_r}.$$

(Далее зависимость от времени опускается.)

С использованием соотношений (5) и стандартных методов акустики для тензора напряжений в исходной рэлеевской волне получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon\eta} &= [P(k_r) \exp(q\eta) + Q(k_r) \exp(s\eta)] \exp(ik_r \varepsilon), \\ \sigma_{\eta\eta} &= [R(k_r) \exp(q\eta) + S(k_r) \exp(s\eta)] \exp(ik_r \varepsilon), \end{aligned}$$

где  $P(k_r) = 2k_r q_r$ ;  $Q(k_r) = k_r^2 + s_r^2$ ;  $S(k_r) = -2k_r s_r$ ;  $R(k_r) = 2k_r^2 - k_t^2$ . Используя формулы перехода от системы координат  $(\varepsilon, \eta)$  к системе  $(x, z)$

$$x = \eta \cos \beta - \varepsilon \sin \beta, \quad z = \eta \sin \beta + \varepsilon \cos \beta,$$

выражения для компонент тензора напряжений в исходной рэлеевской волне в системе координат  $(x, z)$  запишем в виде [5]

$$\sigma_{xz}^0 = \sigma_{xz}^x \sin \beta + \sigma_{zz}^z \cos \beta, \quad \sigma_{zz}^0 = \sigma_{xz}^z \sin \beta + \sigma_{zz}^x \cos \beta, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^x &= P(k_{1x}) \exp(ik_{1x}x) + pQ(k_{2x}) \exp(ik_{2x}x), \\ \sigma_{zz}^x &= R(k_{1x}) \exp(ik_{1x}x) + pS(k_{2x}) \exp(ik_{2x}x), \\ \sigma_{xz}^z &= P(k_{1z}) \exp(ik_{1z}x) + pQ(k_{2z}) \exp(ik_{2z}x), \\ \sigma_{zz}^z &= R(k_{1z}) \exp(ik_{1z}x) + pS(k_{2z}) \exp(ik_{2z}x). \end{aligned}$$

В выражениях (6) проекции продольной и сдвиговой составляющих волнового вектора исходной рэлеевской волны на оси координат  $x, z$  представлены в комплексном виде

$$\begin{aligned} k_{1x} &= k_r \cos \beta + iq_r \sin \beta, & k_{1z} &= k_r \cos \beta + is_r \sin \beta, \\ k_{2x} &= k_r \sin \beta + iq_r \cos \beta, & k_{2z} &= k_r \sin \beta + is_r \cos \beta. \end{aligned}$$

**2. Построение решения.** Решение волновых уравнений для потенциалов (3) можно записать в виде спектрального разложения

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(k) e^{-ikx} dk, \quad \Psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(k) e^{-ikx} dk.$$

В данной задаче выражения для волновых возмущений на нижней грани клина

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xz}^0 e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{P(k_{1x})}{k - k_{1x}} + p \frac{Q(k_{2x})}{k - k_{2x}} \right) \cos \beta + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{R(k_{1z})}{k - k_{1z}} + p \frac{S(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) \sin \beta, \\ \sigma_{zz}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{zz}^0 e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{R(k_{1x})}{k - k_{1x}} + p \frac{S(k_{2x})}{k - k_{2x}} \right) \cos \beta + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{P(k_{1z})}{k - k_{1z}} + p \frac{Q(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) \sin \beta\end{aligned}$$

принимают вид пространственных гармоник. Из решений (3) и граничных условий (4) следует система однородных алгебраических уравнений для определения волновых потенциалов.

Используя обратное преобразование Фурье, получаем соотношения, связывающие комплексные амплитуды потенциалов с углом клина:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2qs - (k^2 + s^2)^2} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[ \left( \frac{P(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{Q(k_{1x})}{k - k_{2x}} \right) S(k_r) + \left( \frac{R(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{S(k_{2x})}{k - k_{2x}} \right) Q(k_r) \right] \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{P(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{Q(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) S(k_r) + \left( \frac{R(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{S(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) Q(k_r) \right] \sin \beta \right\} \exp(qz) dk, \\ \Psi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2qs - (k^2 + s^2)^2} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[ \left( \frac{P(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{Q(k_{1x})}{k - k_{2x}} \right) R(k_r) + \left( \frac{R(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{S(k_{2x})}{k - k_{2x}} \right) P(k_r) \right] \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{P(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{Q(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) R(k_r) + \left( \frac{R(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{S(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) P(k_r) \right] \sin \beta \right\} \exp(sz) dk.\end{aligned}\tag{7}$$

Представление (7) дает точную волновую картину в пространстве, описывая как объемные волны, так и поверхностные.

Используя метод перевала к интегральному представлению решения (7), получаем

$$\begin{aligned}U_l &= \sqrt{\frac{2\pi}{k_l \rho}} \frac{\cos^2 \gamma}{k_l^3 D_l} \left[ \left( p \frac{2k_{2x}^2 - k_t^2}{k_l \sin \gamma - k_{2x}} - \frac{2k_{1x} \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2}}{k_l \sin \gamma - k_{1x}} \right) 2k \sqrt{k^2 - k_t^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( p \frac{2k_{2x} \sqrt{k_t^2 - k_{2x}^2}}{k_l \sin \gamma - k_{2x}} + \frac{2k_{1x}^2 - k_t^2}{k_l \sin \gamma - k_{1x}} \right) (2k_r^2 - k_t^2) \right] \exp \left( ik_l \rho - i \frac{\pi}{4} \right), \\ U_t &= \sqrt{\frac{2\pi}{k_t \rho}} \frac{\cos^2 \gamma}{k_t^3 D_t} \left[ \left( p \frac{2k_{2x}^2 - k_t^2}{k_t \sin \gamma - k_{2x}} - \frac{2k_{1x} \sqrt{k_t^2 - k_{1x}^2}}{k_t \sin \gamma - k_{1x}} \right) 2k \sqrt{k^2 - k_t^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( p \frac{2k_{2x} \sqrt{k_t^2 - k_{2x}^2} - k_{2x}^2}{k_t \sin \gamma - k_{2x}} + \frac{2k_{1x}^2 - k_t^2}{k_t \sin \gamma - k_{1x}} \right) (2k_r^2 - k_t^2) \right] \exp \left( ik_t \rho - i \frac{\pi}{4} \right),\end{aligned}\tag{8}$$

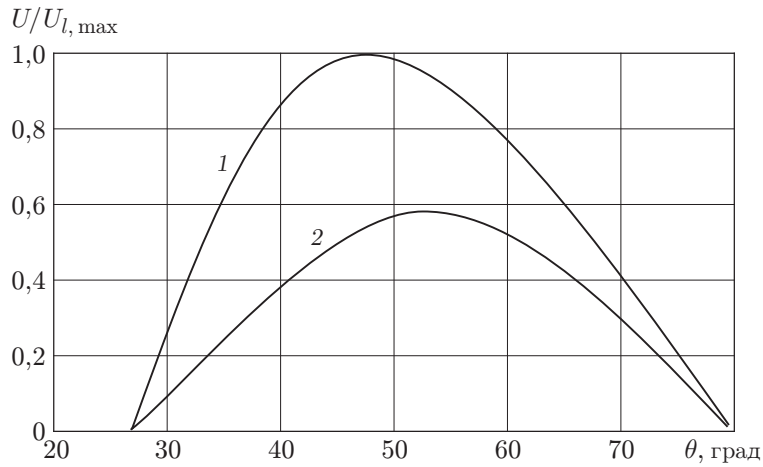


Рис. 4. Зависимости амплитуд смещений (нормированных к максимальному смещению продольной волны) в объемных волнах от угла клина:  
1 — продольные волны, 2 — сдвиговые волны

где  $\gamma$  — азимутальный угол, отсчитываемый от оси  $z$ ;  $D_l = 4 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma \sqrt{\sin^2 \gamma - \varepsilon^2} - (2 \sin^2 \gamma - 1)^2$ ;  $\varepsilon = k_t/k_l$ ;  $D_t = 4 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma \sqrt{\sin^2 \gamma - \varepsilon^2} - (2 \sin^2 \gamma - \varepsilon^2)^2$ .

Заметим, что соотношения (8) описывают амплитуды смещений в объемных волнах, возникающих на нижней грани клина при однократном отражении.

Анализ решения (7) показывает, что амплитуда объемных волн определяется продольными и сдвиговыми составляющими падающей волны и зависит от структуры профиля волновых возмущений на нижней грани клина. Это подтверждается немонотонным характером преобразования поверхностных волн в объемные (рис. 4), которые возникают в случае, когда проекция волнового вектора рэлеевской волны на поверхность противоположной грани клина меньше проекции вектора сдвиговой волны:

$$\theta_0 \geq \arccos(k_t/k_r).$$

Следует также отметить, что результаты проведенного исследования совпадают с результатами решения, полученными в работе [1]. Действительно, в постановке задачи изменяются только проекции векторов, однако как для больших, так и для малых углов клина проекции векторов принимают одни и те же значения. В частности, проекция на ось  $x$  вектора  $k_{1x}(\theta) = k_r \cos \beta + iq_r \sin \beta$  при больших углах ( $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) для действительной части выражения меняется от максимальных значений до минимальных, а в решении, полученном для малых углов ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ), данная проекция принимает те же значения, но в обратном направлении.

Вычеты в полюсах подынтегрального выражения (7) определяют параметры поверхностных рэлеевских волн, распространяющихся вдоль границы.

На рис. 5 для образца из алюминия представлена зависимость нормированной амплитуды смещений в рэлеевской волне на нижней грани от угла клина, вычисленная по формуле

$$U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (9)$$

Анализ полученных результатов показывает, что при малых углах клина ( $\theta < \theta_0$ ) амплитуда смещений в волне сначала остается постоянной, а затем меняется, что обусловлено влиянием нормальных и сдвиговых составляющих волновых возмущений, вызываемых

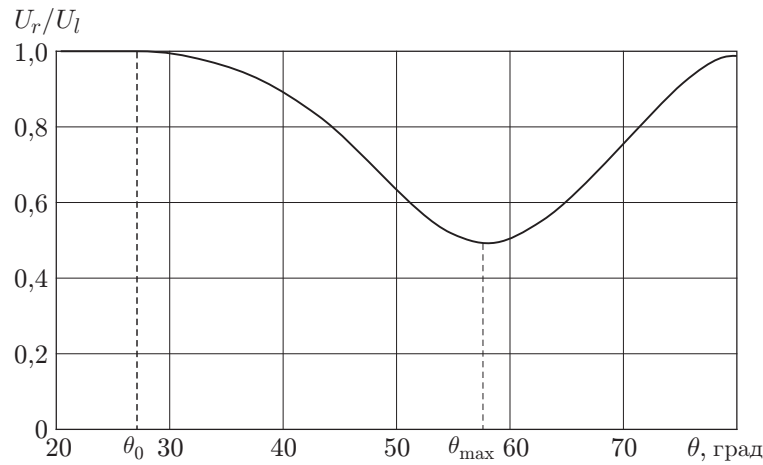


Рис. 5. Зависимость нормированной амплитуды смещений в рэлеевской волне на нижней грани от величины угла клина

падающей волной. При малых углах клина существенное влияние на рассеянное акустическое поле оказывают касательные составляющие возмущающих сил, при увеличении угла клина определяющим становится влияние нормальной составляющей этих сил. При угле клина  $\theta_{max}$  амплитуда смещений рэлеевской волны принимает минимальное значение, что свидетельствует о максимальной трансформации поверхностной волны в объемную. Следует также отметить, что при  $\theta < \theta_0$  проекция на нижнюю грань клина волнового вектора  $k$  волны, падающей на ребро, больше проекций векторов сдвиговой  $k_t$  и продольной  $k_l$  волн, но меньше проекций векторов рэлеевской волны:  $k_l < k_t < k \leq k_r$ . При этом скорости волновых возмущений на поверхности меньше фазовых скоростей сдвиговой и продольных волн в среде, но больше скорости поверхностной волны Рэлея. Возбуждаемые неоднородные волны являются неустойчивыми, со временем их пространственная структура изменяется.

Уменьшение скоростей возбуждаемых неоднородных волн до скорости рэлеевской волны обусловлено двумя факторами. Во-первых, в твердых телах на границе сред происходит взаимная трансформация продольных и сдвиговых волн, вследствие чего скорость распространения поверхностной волны, состоящей из сдвиговых и продольных составляющих, постепенно снижается, так как сдвиговая волна движется медленнее продольной. Во-вторых, с уменьшением скорости волны толщина пограничного волнового слоя увеличивается, при этом происходит перестройка его пространственной структуры. Это приводит к тому, что плотность энергии волны уменьшается, рассредоточиваясь по большему объему. Скорость поверхностной волны также монотонно уменьшается, до тех пор пока скорости продольной и сдвиговой составляющих не станут равными скорости волны Рэлея. Данный эффект наблюдается в твердых телах и не имеет аналогов в других средах.

Следует отметить, что направление волновой нормали продольной составляющей, определяемое по формуле

$$\alpha_0 = \arccos(k_l/k_r),$$

совпадает с направлением нормали к поверхности грани клина при угле, равном углу клина  $\theta$ . Следовательно, при данном угле возмущения на нижней грани принимают максимальные значения, что приводит к переходу падающей рэлеевской волны на эту грань.

Таким образом, можно выделить две характерные области. При углах  $0 < \theta < \theta_0$  пространственная структура волны Рэлея, наведенной на нижнюю грань клина, остается неизменной. При  $\theta > \theta_0$  происходит расщепление волны на поверхностную и объемную

компоненты, последняя из которых оказывает существенное влияние на распределение энергии.

Полученный результат является приближенным. При описанном выше подходе параметры падающей волны Рэлея перед ребром полагаются постоянными, что справедливо только для больших углов клина [1]. При этом энергия волны расходуется на возбуждение вторичных волн. В рассматриваемом случае при приближении к ребру падающая волна Рэлея, взаимодействуя с противоположной гранью, меняет свою структуру вследствие оттока энергии при трансформации объемных волн. Волна Рэлея, возбужденная на любой грани клина, вызывает вторичные (объемные и рэлеевские) волны на противоположной грани. При этом в силу пространственной симметрии форма профиля волновых возмущений не меняется. Данные процессы продолжают до тех пор, пока амплитуды волновых возмущений не станут равными нулю, так как при каждом отражении наведенные объемные волны уносят энергию. Таким образом, по каждой грани в направлении ребра клина движется рэлеевская волна, параметры которой зависят от величины угла клина и от местонахождения волны. В силу пространственной симметрии можно считать, что на этих гранях клина энергия падающей волны распределится поровну между волнами. Следовательно, структура и параметры поверхностных и объемных волн на нижней и верхней гранях клина будут идентичными, а амплитуды смещений в волнах — равными половине значения амплитуды, полученного в (9).

Наведенная волна Рэлея на нижней грани, сталкиваясь с ребром клина, отражается от него. Симметричная мода этой волны отражается на критическом расстоянии от ребра и, складываясь с отраженной от ребра антисимметричной модой, определяет акустическое поле на этой грани клина.

Поскольку при отражении антисимметричная и симметричная моды волны Рэлея вблизи ребра проходят различные расстояния (см. рис. 1), при слиянии этих мод в точке  $\rho_{сл}$  амплитуда рэлеевской волны определяется наложением их фаз:

$$U_r = \sqrt{U_s^2 + U_a^2 + 2U_s U_a \cos(\delta\varphi)}. \quad (10)$$

При вариации угла клина амплитуды смещений в соотношении (10) меняются. Наведенная рэлеевская волна сохраняет свою структуру до точки  $\rho_{сл}$ , однако характеризуется уменьшением амплитуды, обусловленным возникновением объемных волн (см. рис. 5). По той же причине перестройка в бимодальную структуру при постоянной величине угла клина также происходит при уменьшении амплитуды. Однако, вследствие того что моды проходят разные расстояния и имеют разные коэффициенты затухания, амплитуда смещений в антисимметричной моде в точке формирования волны Рэлея ниже, чем в симметричной моде. Это приводит к изменению максимальных и минимальных значений амплитуд осцилляций в волне Рэлея при отражении от ребра клина.

Для удобства дальнейших расчетов теоретически полученные кривые скорости симметричной  $V_s(\rho)$  и антисимметричной  $V_a(\rho)$  мод аппроксимируем зависимостями

$$V_a(\rho) = 1 - \exp(-2\rho), \quad V_s(\rho) = \exp(\rho - 0,76)^{-2,5}.$$

Тогда с учетом прямого и обратного направлений движения наложение фаз интерферирующих волн определяется в виде

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{T} \left( 2 \int \frac{d\rho}{V_a(\rho)} + 2 \int \frac{d\rho}{V_s(\rho)} \right).$$

Для антисимметричной моды интегрирование по  $\rho$  производится от нуля до критического расстояния  $\rho_{сл}$ , для симметричной — от характерного расстояния  $\rho_{cr}$  до  $\rho_{сл}$  (см. рис. 1).

На рис. 6,а приведена зависимость нормированной амплитуды смещений в отраженной рэлеевской волне на нижней грани клина. Видно, что при уменьшении угла клина



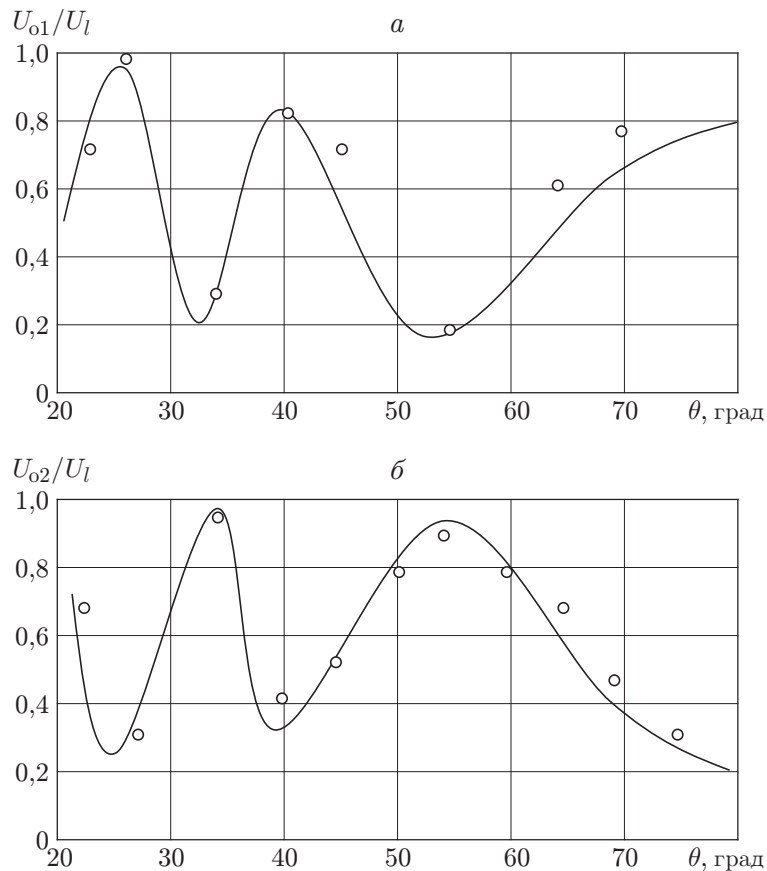


Рис. 6. Зависимость нормированной амплитуды смещений в отраженной рэле-евской волне, возникающих на нижней (а) и верхней (б) гранях клина, от величины угла клина:

линии — расчет, точки — экспериментальные данные [4]

происходит уменьшение периода осцилляций, обусловленное более быстрым изменением разности фаз между двумя модами при их отражении. Амплитуда осцилляций, наоборот, возрастает, что обусловлено, как сказано выше, ослаблением объемных волн при малых углах клина.

Падающая волна Рэлея на верхней грани клина при взаимодействии с ребром клина также отражается. Симметричная мода этой волны отражается на критическом расстоянии от ребра и, складываясь с антисимметричной модой, отраженной от ребра, определяет акустическое поле на данной грани клина. Заметим, что колебания в точке формирования волны Рэлея происходят в противофазе. Следовательно, можно представить отраженную волну Рэлея, сформированную на верхней грани клина, как результат суперпозиции колебаний:

$$U_{rp} = \sqrt{U_l^2 + U_t^2 - 2U_l U_t \cos(\delta\varphi)}$$

и согласно предложенной методике расчета определить акустическое поле на этой грани клина.

Следует отметить, что максимумы амплитуд смещений в волнах на верхней грани клина (рис. 6, б) соответствуют минимумам на нижней грани (см. рис. 6, а), и наоборот. С учетом того что с движением волн сопряжены потоки энергий, для выполнения закона сохранения энергии необходимо соблюдать баланс потоков, связанных как с поверхностны-

ми, так и с объемными волнами на верхней и нижней гранях. Следовательно, уменьшение амплитуд смещений волн Рэлея на одной грани приводит к увеличению их на другой, а уменьшение максимальной амплитуды смещений при уменьшении угла клина свидетельствует об ослаблении возбуждаемых объемных волн.

**Заключение.** Построено решение задачи дифракции рэлеевской волны, падающей на наклонную плоскость под малым углом. Анализ полученных решений показывает, что предложенная теоретическая модель, описывающая изменения амплитуд колебаний отраженной рэлеевской волны при малых углах клина, согласуется с экспериментально наблюдаемой динамикой волны. Проанализированы физические аспекты возникновения отраженного поля поверхностных волн, вызываемых падением на наклонную плоскость неоднородной волны. Установлено, что трансформация рэлеевской волны в объемную является основным механизмом, определяющим потери энергии колебаний при переходах поверхностной волны на наклонную плоскость.

Исследование дифракции поверхностных волн при малых углах клина выявило ряд интересных эффектов и позволило лучше изучить свойства неоднородных рэлеевских волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Гуревич С. Ю., Толипов Х. Б.** Особенности дифракции поверхностных волн на ребре клина // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 5. С. 162–167.
2. **Бучельников В. Д., Гуревич С. Ю., Толипов Х. Б.** Особенности рассеяния неоднородной волны на наклонной поверхности // Сб. тр. 18-й сессии Рос. акуст. о-ва. М.: Геос, 2006. Т. 1. С. 171–173.
3. **Толипов Х. Б.** Двумерная задача распространения акустических колебаний в клине // Мат. моделирование. 2003. Т. 15, № 10. С. 105–108.
4. **Викторов И. А.** Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966.
5. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

*Поступила в редакцию 11/III 2009 г.*

---