

УДК 519.254

ВЛИЯНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ НА ОЦЕНКУ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СИГНАЛА ПРИ ПОНИЖЕНИИ ЧАСТОТЫ ЕГО ДИСКРЕТИЗАЦИИ

П. Н. Звягин

*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29
Крыловский государственный научный центр,
196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44
E-mail: p_zvyagin@bk.ru*

Исследовано влияние понижения частоты дискретизации сигнала на величину его среднего значения в случае, если в исходный стационарный стохастический сигнал добавлена гармоническая шумовая компонента. Выявлены условия, при которых понижение частоты наблюдений такого процесса приведёт к существенному изменению наблюдаемых средних значений. В связи с этим сформулирован и обоснован ряд утверждений. Рассмотрены последствия понижения частоты наблюдений сигнала динамометра для эксперимента, проведённого в ледовом бассейне с моделью корпуса танкера.

Ключевые слова: анализ сигнала, дискретизация сигнала, гармонический сигнал, ледовые нагрузки.

Постановка задачи и её актуальность. Статистический анализ сигнала ледовых нагрузок, действующих на корпуса моделей судов, в настоящее время широко используется при модельных испытаниях в ледовых бассейнах [1]. При таких испытаниях регистрируемые нагрузки представляют собой процесс $Y(t)$ сложного характера и, как правило, значительно зашумлённый.

В ходе модельных испытаний сигнал, соответствующий ледовым нагрузкам, регистрируется с высокой частотой дискретизации и сопровождается различными помехами [1, 2]. Эти помехи вызваны сложностью оборудования, обеспечивающего модельный эксперимент, и условиями эксперимента: постоянной отрицательной температурой и высокой влажностью в ледовом бассейне. Опыт показывает, что помехи подвержены значительным изменениям даже в ходе одного и того же эксперимента.

Наблюдения, полученные за определённый отрезок времени, представляются в виде выборки [1] из некоторой генеральной совокупности. Ледовое сопротивление модели судна оценивается как выборочное среднее записанных в ходе эксперимента значений $Y(t)$.

Высокая частота дискретизации сигнала, используемая при постановке экспериментов, требует большого объёма памяти и быстродействия вычислительной техники, особенно при наличии значительного числа каналов записи. В эксперименте в ледовом бассейне запись может вестись одновременно по 30 каналам. При стандартной частоте дискретизации сигнала 100 Гц каждую секунду с такой экспериментальной установки поступает 3000 наблюдений. В связи с этим понижение частоты дискретизации сигнала вдвое может существенно уменьшить как нагрузку на аппаратную часть вычислительной техники, так и объём файлов записей, применяемых для дальнейшего изучения. В условиях высокой стоимости проводимого эксперимента его повтор для верификации правильности выбранной частоты дискретизации сигнала затруднителен.

Таким образом, возникает необходимость исследовать влияние понижения частоты дискретизации сигнала на величину характеристик наблюдаемых среднего и разброса при условии наличия высокочастотной шумовой компоненты.

1. Имитационное понижение частоты дискретизации сигнала. Пусть имеется временной ряд X наблюдений некоторого сигнала $Y(t)$, выполненных с частотой дискретизации h Гц. Будем считать, что все наблюдения осуществлены в равноотстоящие моменты времени. Пусть исходный временной ряд X соответствует t секундам наблюдений и состоит из n наблюдений, $n = ht$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Пусть h кратно некоторому числу k . Обозначим $m_1 = \max(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, так что $(1 + km) < n$. В исходном временном ряду X отбросим по порядку по $(k - 1)$ последовательных наблюдений после каждого $(1 + km)$ -го наблюдения, $m = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$, а после $(1 + km_1)$ отбросим все наблюдения. Оставшийся временной ряд назовём X_1 , $X_1 = \{x_1, x_{k+1}, x_{2k+1}, \dots, x_{mk+1}, \dots, x_{m_1k+1}\}$.

Заметим, что при формировании X_1 выбраны равноотстоящие наблюдения $x_1, x_{k+1}, \dots, x_{mk+1}, \dots, x_{m_1k+1}$ исходного временного ряда X . Аналогично для формирования временного ряда X_i , $i = 2, \dots, k$, будем использовать равноотстоящие наблюдения $x_i, x_{k+i}, \dots, x_{mk+i}, \dots, x_{m_1k+i}$, $m = 0, 1, 2, \dots, (i + km) \leq n$.

Выдвинем предположение о том, что X_1, X_2, \dots, X_k можно считать временными рядами наблюдений сигнала $Y(t)$, выполненных с частотой дискретизации $h_1 = h/k$ Гц.

Составим из временных рядов X, X_1, X_2, \dots, X_k выборки $X^*, X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$, которые, в свою очередь, будем считать извлечёнными из генеральных совокупностей X, X_1, X_2, \dots, X_k . Следующая статистическая гипотеза противоречит выдвинутому предположению: «математические ожидания генеральных совокупностей X, X_1, X_2, \dots, X_k не являются одинаковыми». Обозначим эту гипотезу H_1 .

Проверить гипотезу H_1 можно, применяя статистический критерий Стьюдента проверки равенства математических ожиданий двух генеральных совокупностей [3] X_i и X_j , если объём имеющихся в распоряжении выборок X_i^* и X_j^* достаточно велик. Выдвинем гипотезу $H_{0,ij}$: « X_i и X_j имеют одинаковые математические ожидания», $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$. Критерий Стьюдента использует статистику

$$\nu_{ij} = (\bar{x}_i - \bar{x}_j) / \sqrt{s_i^2/n_i + s_j^2/n_j}. \quad (1)$$

Здесь \bar{x}_i и \bar{x}_j — выборочные средние; n_i и n_j — объём выборок; s_i^2 и s_j^2 — исправленные выборочные дисперсии для выборок X_i^* , X_j^* соответственно. В случае если гипотеза $H_{0,ij}$ верна, статистика ν распределена по нормированному нормальному закону [3].

2. Влияние гармонической компоненты на статистику ν при понижении частоты наблюдений процесса. Рассмотрим гармоническую шумовую компоненту временного ряда. Известно [4], что реальную функциональную зависимость, описывающую сигнал, можно принять за статистическую, и наоборот. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ составляют наблюдения процесса $Y(t) = A \cos(\beta t)$ в моменты времени $t = 1, 2, \dots, n$, где $A = \text{const}$, $\beta \neq \pi p$ (p — целое число). Для определённости положим n чётным. Имитационно понизим частоту наблюдения процесса $Y(t)$ вдвое согласно разд. 1. Образует два множества: $X_1^* = \{x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-1}\}$ и $X_2^* = \{x_2, x_4, x_6, \dots, x_n\}$. Будем рассматривать характеристики \bar{x}_1, \bar{x}_2 и s_1^2, s_2^2 этих множеств, аналогичные выборочным средним и исправленным выборочным дисперсиям.

Известно и легко обосновывается [5], что характеристики \bar{x}_1 для X_1^* и \bar{x}_2 для X_2^* вычисляются по формулам

$$\bar{x}_1 = A \frac{\sin(n\beta)}{n \sin \beta}; \quad \bar{x}_2 = A \frac{\sin(n+1)\beta}{n \sin \beta} - \frac{A}{n}. \quad (2)$$

Следствие 1. При $\beta \neq \pi p$ (p — целое число) справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_2 = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_1 = A \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\beta)}{n \sin \beta} = 0$, поскольку $\sin(n\beta)$ — ограниченная функция, $\sin \beta \neq 0$ при $\beta \neq \pi p$ (p — целое число). Аналогично $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_2 = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 1. При фиксированном чётном n и $\beta \rightarrow 0$ справедливо

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0. \quad (4)$$

Доказательство. Справедливо равенство $\lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{x}_1 = A \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin(n\beta)}{n \sin \beta} = A$,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{x}_2 = A \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(n+1)\beta}{n \sin \beta} - \frac{1}{n} \right] = A \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\frac{(n+1)\beta}{n\beta} - \frac{1}{n} \right] = A \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{n\beta + \beta - \beta}{n\beta} = A,$$

т. е. $\lim_{\beta \rightarrow 0} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0$, что и требовалось доказать.

Итак, если рассматривается гармонический сигнал $Y(t) = A \cos(\beta t)$ с малой частотой β , то понижение частоты дискретизации сигнала вдвое не будет значимо изменять характеристику \bar{x} .

Исследуем характеристики s_1^2 и s_2^2 выборок X_1^* и X_2^* соответственно. Пусть n чётно, как и в предыдущем случае.

Теорема 2. Если β отлично от $\pi p/2$ (p — целое число), то имеют место соотношения

$$s_1^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^2/2; \quad s_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^2/2. \quad (5)$$

Доказательство. Имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n/2} (x_{2i} - 1)^2 \right) \sin 2\beta = A^2 \frac{n \sin 2\beta}{4} + A^2 \frac{\sin 2n\beta}{4}.$$

Если β отлично от $\pi p/2$ (p — целое число), то оно отлично и от πm (m — целое число), тогда согласно (3) для характеристик \bar{x}_1, \bar{x}_2 справедливо

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_1^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A^2 \frac{1}{2} \frac{n \sin 2\beta + \sin 2n\beta}{(n-2) \sin 2\beta} - \frac{n/2}{n/2-1} (\bar{x}_1)^2 \right) = \frac{A^2}{2}.$$

Аналогично $\lim_{n \rightarrow \infty} s_2^2 = A^2/2$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. При фиксированном чётном n и $\beta \rightarrow \pi$ справедливо

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \xrightarrow{\beta \rightarrow \pi} 2A. \quad (6)$$

Доказательство. Воспользуемся отношениями (2). Тогда

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = \frac{A}{n} \left[\frac{\sin(n+1)\beta - \sin n\beta}{\sin \beta} - 1 \right].$$

Рассмотрим следующий предел, где выполним замену $\alpha = \beta - \pi$, т. е. $\alpha \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow \pi$:

$$\lim_{\beta \rightarrow \pi} \frac{\sin(n+1)\beta - \sin n\beta}{\sin \beta} = (-1)^n \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(n+1)\alpha + \sin n\alpha}{\sin \alpha} =$$

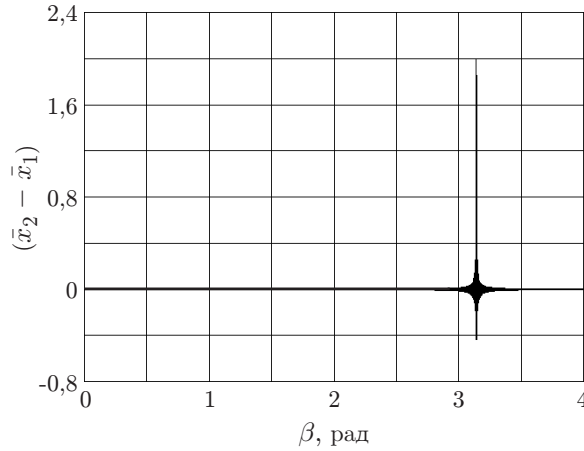


Рис. 1. Общий вид зависимости разности $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$ от величины β для процесса $Y(t) = \cos(\beta t)$ и фиксированного значения $n = 1000$

$$= (-1)^n \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(n + 1)\alpha + n\alpha}{\alpha} = (-1)^n(2n + 1).$$

Отсюда при чётном n

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = A/n[(-1)^n(2n + 1) - 1] = A/n[2n + 1 - 1] = 2A,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. Величина $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$ при $\beta \rightarrow \pi$ может испытывать колебания в зависимости от отношения α и n .

Согласно рассуждению в доказательстве к теореме 3 при $\beta \rightarrow \pi$

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = \frac{A}{n} \left[(-1)^n \frac{\sin(n + 1)\alpha + \sin n\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right],$$

где $\alpha = \beta - \pi$ (α мало). Здесь числитель дроби, взятый по абсолютной величине, увеличивается при $n\alpha \approx \pi(2p + 1)/2$ и уменьшается при $n\alpha \approx \pi p$ (p — натуральное число).

График, представленный на рис. 1, иллюстрирует результаты (4) и (6), полученные в теоремах 1 и 3, а также в следствиях 1 и 2. Зависимость носит колебательный характер, причём амплитуда колебаний возрастает при $\beta \rightarrow \pi$. Поведение разности $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$ в окрестности π представлено на рис. 2.

Таким образом, для стационарного стохастического процесса, к которому добавлена гармоническая компонента $Y(t) = A \cos \beta t$, понижение частоты наблюдений в 2 раза приводит к большим значениям статистики ν_{ij} (1), если частота β близка к $\pi(2p + 1)$, $p \in \mathbf{N}$.

Рассуждение, приведённое в теоремах 1–3, можно перенести на случай понижения частоты дискретизации сигнала не вдвое, а в k раз при условии, что n кратно k .

Разделим множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, составленное из наблюдений процесса $Y(t) = A \cos(\beta t)$ в моменты времени $t = 1, 2, \dots, n$, на k подмножеств $X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$ так, как это указано в разд. 1. При этом рассмотрим характеристики \bar{x}_q множеств $\{x_q, x_{q+k}, \dots, x_{q+mk}\}$, $q = 1, \dots, k$, аналогичные выборочным средним. С помощью соответствующих сумм из [5] для характеристики \bar{x}_q , $q = 1, \dots, k$, легко вывести зависимость

$$\bar{x}_q = A \frac{k}{2n \sin(k\beta/2)} \left[\sin \beta \left(k \left(m + \frac{1}{2} \right) + q \right) - \sin \beta \left(q - \frac{k}{2} \right) \right]. \quad (7)$$

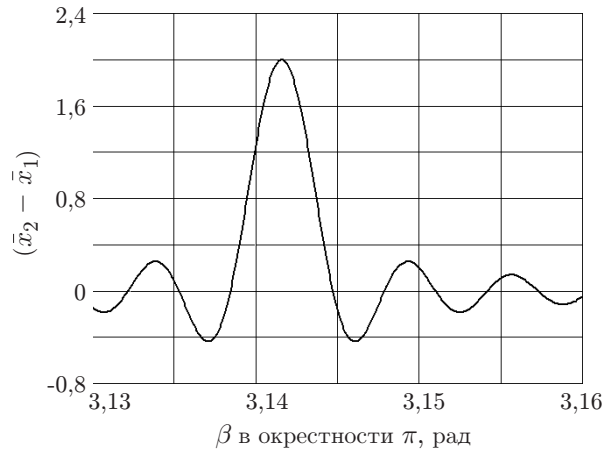


Рис. 2. Зависимость разности $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$ от величины β для процесса $Y(t) = \cos(\beta t)$ в окрестности π

При условии чётного n , $m = n/2 - 1$ и $k = 2$ при подстановке в формулу (7) значений $q = 1$ и $q = 2$ получается результат, согласующийся с (2).

Следствие 3. При фиксированном n величина $\max_{i,j} |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$, $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, принимает свои наибольшие значения в окрестностях точек $\beta = 2\pi p/k$ (p — натуральное число).

Результаты практической проверки имитационного понижения частоты наблюдений в k раз согласуются с (7) и следствием 3. Применим эти теоретические результаты к тестовому примеру.

Из наблюдений процесса $Y(t) = \cos(\beta t)$, $0 < \beta < 4$, в моменты времени $t = 1, 2, \dots, n$ было составлено пять множеств с равноотстоящими наблюдениями. На рис. 3 приведён график зависимости $f(\beta) = \max_{i,j} |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$, $i, j = 1, \dots, 5$, $i \neq j$, для фиксированного значения $n = 1000$. Из графика видно, что функция $f(\beta)$ достигает пиковых значений в точках $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$ и т. д. согласно следствию 3.

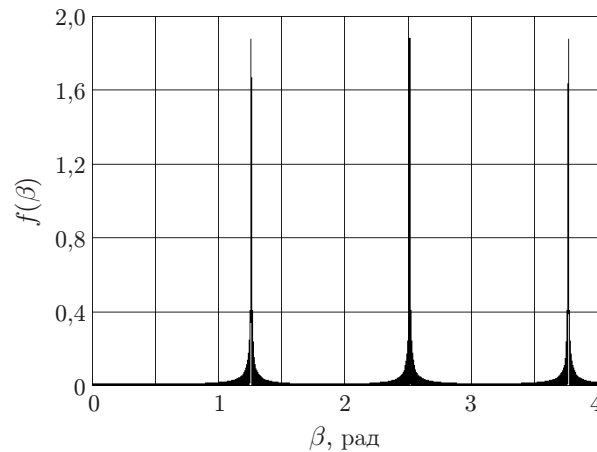


Рис. 3. Зависимость $f(\beta) = \max_{i,j} |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ для тестового примера. Понижение частоты дискретизации в 5 раз

Если в гармоническом процессе β — случайная величина и амплитуда $A = \text{const}$, то для конкретной реализации β соотношения (2)–(7) остаются справедливыми.

Рассмотрим стохастический процесс

$$Y(t) = A \cos(t\beta(t)), \quad (8)$$

где $\beta(t)$ — процесс с n независимыми, равноотстоящими по времени сечениями, равномерно распределёнными на одном и том же промежутке $\langle a, b \rangle$ для любого t . Понизим частоту наблюдений этого процесса вдвое способом, указанным в разд. 1. Тогда можно найти математические ожидания $M\bar{x}_1 = m_1(n, a, b)$ и $M\bar{x}_2(n, a, b)$:

$$m_1(n, a, b) = M\left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} A \cos((2k-1)\beta(t))\right) = \frac{2A}{n(b-a)} \sum_{k=1}^{n/2} \int_a^b \cos(2k-1)\beta d\beta,$$

$$m_1(n, a, b) = \frac{2A}{n(b-a)} \sum_{k=1}^{n/2} \frac{\sin(2k-1)b - \sin(2k-1)a}{2k-1};$$

(9)

$$m_2(n, a, b) = \frac{2A}{n(b-a)} \sum_{k=1}^{n/2} \frac{\sin 2kb - \sin 2ka}{2k}.$$

В качестве $\langle a, b \rangle$ рассмотрим интервал $(\pi p - \varepsilon, \pi p + \varepsilon)$, $p = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, и пусть ε мало. Тогда при фиксированном n величина $|m_1(n, a, b) - m_2(n, a, b)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2A$. При тех же условиях и $p = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ разность $|m_1(n, a, b) - m_2(n, a, b)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. При $\langle a, b \rangle = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq \pi p$ (p — произвольное целое число), разность $|m_1(n, a, b) - m_2(n, a, b)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \ll 2A$.

Пусть \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 — выборочные аналоги m_1 и m_2 . Можно утверждать, что при заведомо равномерном распределении $\beta \in R\langle a, b \rangle$ в (8), малом значении ε и $\langle a, b \rangle = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ крайне мала вероятность события $|\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2| \gg 0$, если только c не близко к πp , $p = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$.

Численный эксперимент указывает на то же свойство малости $|\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2|$, если β распределена нормально с математическим ожиданием c и СКО ε и если только c не близко к πp , $p = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$. В противном случае величина $|\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2|$ ощутимо возрастает.

3. Анализ сигнала ледовых нагрузок. Обратимся к результатам экспериментов по измерению ледовых нагрузок на корпуса моделей судов в ледовом бассейне Крыловского государственного научного центра (бывший ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, Санкт-Петербург). Рассмотрим фрагмент записи наблюдений динамометра при протягивании модели танкера через моделированное ледовое поле (рис. 4). Сигнал динамометра зашумлён колебательной помехой электрического происхождения.

Обозначим X этот фрагмент для 5 с наблюдения. Для X значение статистики $\bar{x} = -32,06$. Исходная частота дискретизации показаний динамометра составила 100 Гц (наблюдений в секунду). Таким образом, X состоит из 500 наблюдений. Моделируем понижение частоты наблюдений до 50, 25, 20 и 10 Гц согласно разд. 1. При этом получим 2, 4, 5, 10 различных временных рядов, состоящих из 250, 125, 100 и 50 наблюдений соответственно. Выборочные средние и значения статистики (1) для пар этих временных рядов представлены в таблице.

Согласно следствию 3 данной работы, если значение $\max |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ оказывается велико при понижении частоты наблюдений в 5 раз (со 100 до 20 Гц), то в исходном сигнале можно ожидать шумовую гармоническую компоненту с частотой, близкой к $2\pi/5$ или $4\pi/5$,

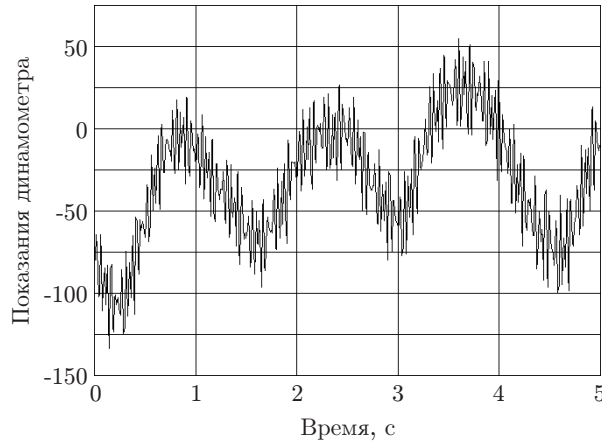


Рис. 4. Запись показаний динамометра при эксперименте в ледовом бассейне

| Испытуемая частота наблюдений, Гц | Принята ли гипотеза H_0 (по критерию Стьюдента)? | Максимальное $ \nu_{\text{эксп}} $, X_i^* против X_j^* , $i, j = 1, \dots, k, i \neq j$ | Соответствующее $\max \bar{x}_i - \bar{x}_j $ | Максимальное $ \nu_{\text{эксп}} $, X^* против X_i^* , $i = 1, \dots, k$ | Соответствующее $\max \bar{x} - \bar{x}_i $ |
|-----------------------------------|--|--|--|---|--|
| 50 | да | 0,66 | 2,18 | 0,38 | 1,09 |
| 25 | да | 0,51 | 2,40 | 0,35 | 1,28 |
| 20 | нет | 3,48 | 18,06 | 2,26 | 8,98 |
| 10 | нет | 2,71 | 19,99 | 1,9 | 10,39 |

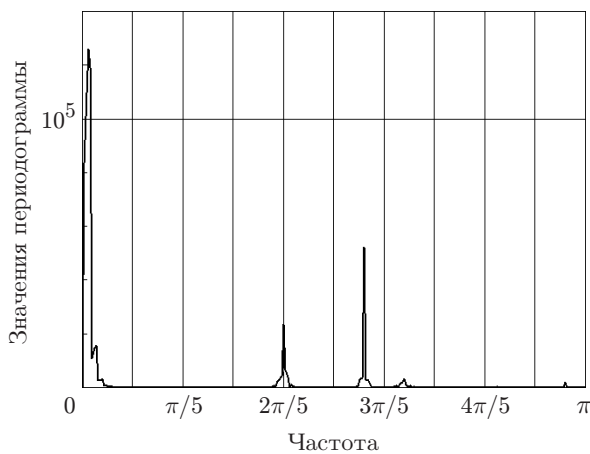


Рис. 5. Периодограмма временного ряда, приведённого на рис. 4

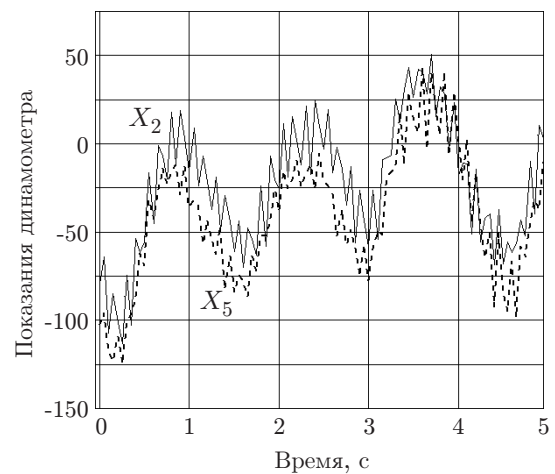


Рис. 6. Наиболее отличающиеся варианты временного ряда X (см. рис. 5), получающиеся при понижении частоты дискретизации в 5 раз

что в этом случае и наблюдается. Если $\max |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ оказывается велико при понижении частоты наблюдений в 10 раз, то в исходном сигнале можно ожидать компоненту с одной из частот: $\pi/5$, $2\pi/5$, $3\pi/5$, $4\pi/5$ или π . На рис. 5 представлена периодограмма исходного временного ряда X , вычисленная согласно [6]. На ней присутствует пиковое значение, соответствующее $2\pi/5$. На рис. 6 продемонстрированы два временных ряда, дающих $\max |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ при понижении частоты наблюдений со 100 до 20 Гц. Фактором, влияющим на величину $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$, здесь оказывается выбор точки начала наблюдений.

Заключение. В данной работе предложено решение задачи оценки влияния понижения частоты дискретизации зашумлённого сигнала на среднее наблюдаемое значение этого сигнала, а также на характеристику выборочной дисперсии. На основе проведённого теоретического анализа выдвинуто утверждение, что при определённых условиях понижение частоты дискретизации может оказать существенное влияние на наблюдаемое среднее значение. При соблюдении этих условий среднее значение, вычисленное по натурным данным, окажется зависимым от момента начала наблюдений.

Задача, решённая в рассматриваемой работе, возникла при анализе данных натуральных наблюдений в ледовом бассейне Крыловского государственного научного центра. Для многоканальных измерений в ледовом бассейне эта задача была сформулирована впервые. Представлен пример измерений сигнала, для которого выведенные свойства объясняют эффект существенного изменения наблюдаемого среднего значения при понижении частоты дискретизации.

Закономерностями, изложенными в данной работе, могут руководствоваться инженеры и научные сотрудники при проведении экспериментов по дискретной записи непрерывных сигналов, когда не удаётся избежать шумовых эффектов стационарного характера электрической или иной природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Саонов К. Е.** Теоретические основы плавания судов во льдах. С.-Пб.: Изд-во ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 2010. 274 с.
2. **Лосет С., Шхинек К., Гудместад О., Хойланд К.** Воздействие льда на морские и береговые сооружения: Учеб. пособие. С.-Пб.: Лань, 2010. 270 с.
3. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.
4. **Губарев В. В.** Случайные функции с нелинейной регрессией и их применение // Автометрия. 2011. 47, № 6. С. 39–50.
5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. **Справочник** по прикладной статистике /Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана. М.: Финансы и статистика, 1990. Т. 2. 526 с.

Поступила в редакцию 29 ноября 2012 г.