

УДК 532; 533.7

ДИСПЕРСИЯ ОБЛАКА ЧАСТИЦ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ, УГЛА ПОВОРОТА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБЛАКА НА ДИНАМИКУ ПОТОКА И ДИСПЕРСИЮ

С. Л. Девис, Т. Б. Диттман, Дж. Б. Якобс, В. С. Дон*

Университет г. Сан-Диего, Сан-Диего, США

* Гонконгский баптистский университет, Гонконг, Китай

E-mails: gjacobs@mail.sdsu.edu, wsdon@math.hkbu.edu.hk

Исследованы распространение облака частиц в ускоряющемся потоке за фронтом нормальной ударной волны и влияние на дисперсию облаков прямоугольной и эллиптической форм отношения продольного размера облака к его поперечному размеру, а также угла атаки несущего потока. Для численного решения используется конечно-разностная монотонная схема высокого порядка, основанная на смешанной элеровой и лагранжевой формулировке задачи. Уравнения законов сохранения решаются на эйлеровой сетке, для описания движения частиц применяется лагранжева сетка. Установлено, что облака эллиптической формы имеют меньшую дисперсию, чем облака прямоугольной формы. Среднее и среднеквадратичное значения координат частиц облака свидетельствуют о том, что с уменьшением отношения его продольного и поперечного размеров увеличивается скорость конвекции облака в направлении потока. С увеличением угла поворота облака его дисперсия увеличивается, если отношение продольного и поперечного размеров облака больше единицы. Показано, что при умеренных углах поворота динамика потока, содержащего частицы, в случае облака прямоугольной формы качественно и количественно сравнима с динамикой потока в случае облака треугольной формы.

Ключевые слова: дисперсия частиц, ударная волна, конечно-разностная монотонная схема высокого порядка.

Введение. Потоки, насыщенные частицами и каплями, играют важную роль в высокоскоростных технологических процессах, таких как изготовление ракетных двигателей на твердом топливе и двигателей с высокой скоростью сгорания жидкого топлива. Ударные волны возникают в прямоочных камерах сгорания и взаимодействуют с продуктами сгорания в сверхзвуковом потоке. Знание траектории движения продуктов сгорания позволит более эффективно инициировать процесс сгорания и тем самым повысить КПД двигателя. При описании сложных физических процессов — турбулентного движения частиц, вызванного ударной волной, и соударения частиц, происходящих в разных временных и пространственных масштабах, — высокие требования предъявляются как к экспериментальному исследованию, так и к численному моделированию. Экспериментальные исследования ограничены сложностью регистрации высокоскоростных процессов, в то время как численное моделирование — дорогостоящими вычислениями и несовершенством математических моделей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Ведомства научных исследований Военно-воздушных сил США (контракт № G00008044), Аэрокосмического консорциума Калифорнии, а также Совета по грантам университета Гонконга (гранты № НКВУ 200909, НКВУ 200910).

© Девис С. Л., Диттман Т. Б., Якобс Дж. Б., Дон В. С., 2013

Значительные усилия были затрачены на улучшение определяющих соотношений, описывающих поведение частиц в ускоряющемся потоке за фронтом ударной волны. В [1] определено время торможения капли за ударной волной путем сравнения известных времен релаксации твердой сферы с их экспериментальными значениями. В [2] численно исследовано динамическое сопротивление капли за ударной волной. Перед сферической частицей наблюдалась отраженная головная волна и по мере ее движения по частице формировалась отраженная волна Маха. Эта волна продвигалась к центру тыльной стороны сферической частицы, где встречалась с волной Маха, отраженной от тыльной стороны. Это приводило к фокусировке ударной волны, в результате чего на тыльной стороне частицы формировалась область высокого давления, в которой появлялось отрицательное сопротивление. Результаты численного моделирования, приведенные в [2], отличались от экспериментальных данных не более чем на 10 %. В [3] изучено влияние сжимаемости и разрежения в случае сферической частицы. В [4] рассмотрены частицы различной формы. Сравнивая кубические и сферические частицы, авторы [4] пришли к выводу, что сопротивление в основном зависит от площади лобовой части частицы, поэтому затупленная форма частицы не оказывает существенного влияния на ее динамику.

Исследованию динамики большого числа частиц в высокоскоростном потоке посвящено небольшое количество работ. В [5] изучено затухание ударной нормальной волны в газовом потоке с равномерно распределенными частицами. В [6, 7] результаты численного моделирования, основанные на модели Бойко, сравнивались с результатами экспериментов в ударной трубе, в которых исследовалась дисперсия облака частиц из плексигласа и бронзы в ускоряющемся потоке за ударной волной. В [6, 7] не только визуально изучались динамика частиц и дисперсия, но и проводилось количественное сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными. В [8, 9] с использованием физических определяющих соотношений, предложенных в [6], разработана схема высокого порядка, основанная на подходе Эйлера — Лагранжа. Данные, полученные с помощью этой схемы, хорошо согласуются с результатами экспериментов, в которых детально исследовалась структура маломасштабной турбулентности. В [8] изучено влияние начальной геометрии облака на дисперсию частиц и показано, что аэродинамика формы существенно влияет на дисперсию частиц в поперечном направлении.

В настоящей работе продолжены исследования влияния геометрии облака на дисперсию частиц в ускоряющемся потоке за ударной волной. Изучается влияние отношения продольного и поперечного размеров облака и угла его поворота относительно набегающего потока на дисперсию частиц. Проводится детальное статистическое исследование дисперсии частиц с использованием их осредненных координат. Целью данной работы является тщательное тестирование подхода Эйлера — Лагранжа, способного заменить эксперименты с потоком в ударной трубе, содержащим частицы.

1. Физическая модель и основные уравнения. В рамках метода источника частиц в ячейке задача о течении жидкости решается на эйлеровой сетке, в то время как движение частиц исследуется на лагранжевой сетке. Ниже приводится связанная система уравнений, описывающая движение газа и кинематику частиц. Нижний индекс p соответствует параметрам частицы, f — параметрам газа в точке расположения частицы, во всех случаях, за исключением оговоренных особо, величины без индекса соответствуют параметрам газа. Подробное обсуждение модели и уравнений задачи содержится в [8].

1.1. *Уравнения Эйлера в эйлеровой системе координат.* В декартовой системе координат двумерные уравнения течения записываются в виде

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{S}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\rho, \rho u, \rho v, E)^T, & \mathbf{F} &= (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, (E + P)u)^T, \\ \mathbf{G} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, (E + P)v)^T, & P &= (\gamma - 1)(E - \rho(u^2 + v^2)/2), \quad \gamma = 1,4. \end{aligned}$$

Замыкает систему уравнение состояния

$$T = \gamma P M^2 / \rho,$$

где $M = U/\sqrt{\gamma RT}$ — число Маха; U , T — отсчетные скорость и температура соответственно. Источниковый член \mathbf{S} учитывает наличие частиц в потоке газа.

1.2. *Уравнения движения частиц в лагранжевой системе координат.* Движение каждой частицы отслеживается в лагранжевой системе координат. Запишем кинематическое уравнение движения частицы

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{v}_p,$$

где \mathbf{x}_p — радиус-вектор частицы; \mathbf{v}_p — вектор скорости.

Ускорение частиц определяется вторым законом Ньютона, правая часть которого есть сила сопротивления, действующая на частицу. В случае сферических частиц сила сопротивления представляется в виде комбинации силы сопротивления Стокса, скорректированной для больших чисел Рейнольдса и Маха, и сопротивления давления. В результате имеем

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = f_1 \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p}{\tau_p} - \frac{1}{\rho_p} \nabla P|_f, \quad (2)$$

где \mathbf{v}_f — вектор скорости газового потока в месте расположения частицы; ρ_p — плотность частицы.

В правой части уравнения (2) первый член дает вклад в ускорение вследствие различия скоростей частицы и газа, второй член — вследствие наличия градиента давления в потоке в месте расположения частицы. Константа $\tau_p = \text{Re} d_p^2 \rho_p / 18$ — время реакции частицы на изменение параметров потока газа, d_p — диаметр частицы, $\text{Re} = UL/\nu$ — число Рейнольдса, L — характерная длина, ν — динамическая вязкость.

В настоящей работе число Рейнольдса предполагается большим, поэтому в уравнении Эйлера (1) влияние вязкости не учитывается.

Эмпирический поправочный коэффициент

$$f_1 = \frac{3}{4} (24 + 0,38 \text{Re}_f + 4\sqrt{\text{Re}_f}) \left(1 + \exp\left(-\frac{0,43}{M_f^{4,67}}\right) \right)$$

позволяет определить ускорение, которое при числах Рейнольдса $\text{Re}_f = |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p| d_p / \nu$ порядка 10^4 и числах Маха $M_f = |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p| / \sqrt{T_f} = 1,2$ отличается от экспериментального не более чем на 10 %.

Из первого закона термодинамики и закона Фурье распространения тепла получаем уравнение для температуры

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{1}{3} \frac{\text{Nu}}{\text{Pr}} \frac{T_f - T_p}{\tau_p},$$

где $\text{Pr} = 1,4$ — число Прандтля, которое принимается равным его значению для воздуха; $\text{Nu} = 2 + \sqrt{\text{Re}_f} \text{Pr}^{0,33}$ — число Нуссельта, скорректированное для больших чисел Рейнольдса.

1.3. *Источниковый член \mathbf{S} в уравнении Эйлера.* Каждая частица генерирует количество движения и энергию, которые воздействуют на несущий поток. Осреднение по объему этих величин дает континуальные источники количества движения и энергии в уравнении (1):

$$\mathbf{S}_m(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} K(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}) \mathbf{W}_m, \quad S_e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} K(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}) (\mathbf{W}_m \cdot \mathbf{v}_p + W_e).$$

Здесь $K(x, y) = K(|x - y|)/V$ — нормированная весовая функция, которая распределяет по потоку воздействие на него каждой частицы; $\mathbf{W}_m = m_p f_1(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p)/\tau_p$, $W_e = m_p (\text{Nu}/(3 \text{Pr}))(T - T_p)/\tau_p$ — весовые функции, определяющие вклад в количество движения и энергию каждой частицы соответственно; m_p — масса сферической частицы, которая может быть определена по значению параметра τ_p ; N_p — число частиц в объеме V .

1.4. *Решение задачи о движении потока и частиц.* Дискретизированная система уравнений задачи решалась с помощью модифицированной конечно-разностной монотонной схемы высокого порядка (КРМСВП), основанной на схеме источника частиц в ячейке, предложенной в [8, 9].

В силу нелинейного характера гиперболических уравнений Эйлера на конечном интервале времени может появиться разрывное решение, несмотря на гладкие начальные условия. Следует отметить, что в используемом численном методе на разрывных решениях не появляются нефизические колебания (эффект Гиббса).

Среди различных схем высокого порядка, предназначенных для решения задач об ударных волнах, классическая КРМСВП [10], разработанная для решения системы уравнений, записанных в форме законов сохранения, использовалась для моделирования мелкомасштабных физических явлений, обусловленных турбулентностью в ударных волнах [11–14].

Модифицированная КРМСВП является консервативной конечно-разностной схемой [15, 16] и идеально подходит для моделирования взаимодействия ударной волны с частицами. Эта схема сохраняет высокий порядок точности при моделировании мелкомасштабных явлений, возникающих в потоке с частицами за ударной волной.

Важной характеристикой КРМСВП является использование адаптивной сетки. В рамках этого метода сетка перестраивается в той области, в которой индикатор гладкости решения указывает на потерю точности. Кроме того, для предотвращения колебаний Гиббса автоматически назначается нулевой вес, чтобы понизить порядок локальных аппроксимирующих полиномов в тех областях, где имеются высокие градиенты или ударные волны.

Для вычисления параметров потока в ячейках, в которых ударная волна отсутствует, используется центральная разность “против потока”. Однако в областях, где имеются ударные волны, такая интерполяция вызывает нежелательные осцилляции Гиббса. При существенно монотонной интерполяции такие осцилляции устраняются. Существенно монотонная интерполяция используется только в областях, идентифицируемых индикатором гладкости. Такая схема обеспечивает максимально возможный порядок точности в областях гладкости решения. Параметры потока рассчитываются на основе решения уравнений Эйлера с добавленным в точках сетки источниковым членом. Затем вычисляются параметры частицы с использованием существенно монотонной интерполяции сплайн-функциями того же порядка точности, с каким вычислялись параметры потока, чтобы избежать потери точности.

2. Результаты исследования и их обсуждение. При решении задачи о движении ударной волны через облако частиц используется модифицированная монотонная схема пятого порядка точности, основанная на алгоритме источника частиц в ячейке. Опишем

кратко этот алгоритм. Аппроксимируем гиперболическую систему уравнений Эйлера (1) в каждой точке эйлеровой сетки:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + \mathbf{S}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}). \quad (3)$$

Уравнения движения частиц записываются в лагранжевой системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} &= \mathbf{v}_p, & \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} &= f_1 \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p}{\tau_p} - \frac{1}{\rho_p} \nabla P|_f; \\ \frac{dT_p}{dt} &= \frac{1}{3} \frac{\text{Nu}}{\text{Pr}} \frac{T_f - T_p}{\tau_p}, & p &= 1, \dots, N_p. \end{aligned} \quad (4)$$

С помощью интерполяции определяются величины \mathbf{v}_f и T_f , в то время как величина $\mathbf{S}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x})$ определяется с помощью процедуры взвешивания.

В данной работе используется схема Рунге — Кутты третьего порядка с уменьшением общей вариации решения

$$\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^n + \Delta t L(\mathbf{U}^n), \quad \mathbf{U}^2 = \frac{3\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^1 + \Delta t L(\mathbf{U}^1)}{4}, \quad \mathbf{U}^{n+1} = \frac{\mathbf{U}^n + 2\mathbf{U}^2 + 2\Delta t L(\mathbf{U}^2)}{3},$$

где L — один из пространственных операторов в правых частях уравнений (3), (4). Коэффициент Куранта — Фридрихса — Леви полагается равным 0,4.

В прямоугольной области $[0; 3] \times [-0,611; 0,611]$ при $x_s = 0,175$ инициируется бегущая вправо ударная волна с числом Маха $M_s = 3$. В направлении координаты x ставятся граничные условия втекания и вытекания, в направлении координаты y — условия периодичности. В прямоугольную область $[0,175; 0,352] \times [-0,044; 0,044]$ помещается облако из бронзовых частиц. В начальный момент облако покоится. Концентрация частиц в облаке составляет 4 %. Время отклика частицы и ее плотность соответственно равны $\tau_p = 51,69$, $\rho_p = 7,42 \cdot 10^4$. Число Рейнольдса $\text{Re}_f = 3,387 \cdot 10^7$ выбрано равным числу Рейнольдса, используемому в эксперименте. При решении уравнения Эйлера число точек эйлеровой сетки составляло 1500×1500 в направлениях x , y соответственно. Облако, состоящее из $3,9 \cdot 10^9$ частиц, моделировалось $40\,000 \pm 100$ частицами в зависимости от его формы. Количество точек в облаке определялось в зависимости от его формы и отношения размеров в продольном и поперечном направлениях. Частицы распределялись по облаку равномерно. На рис. 1 показано квадратное облако, образованное 200×200 частицами.

Ниже кратко изложены результаты исследования влияния формы облака на его дисперсию в потоке газа, приведенные в работе [8]. Рассматривались облака в форме прямоугольника, круга и треугольника с одной и той же концентрацией частиц. Площади облаков различной формы были одинаковыми, в начальный момент времени облака примыкали к фронту нормальной ударной волны.

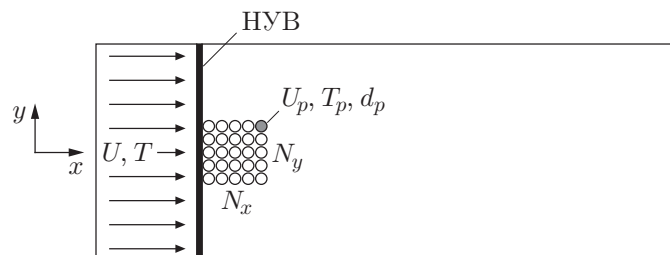


Рис. 1. Схема начального состояния потока с частицами (НУВ — нормальная ударная волна)

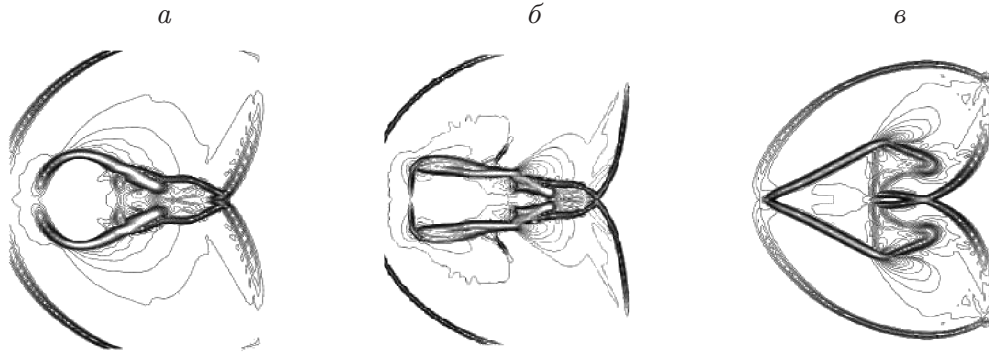


Рис. 2. Контурсы завихренности в ускоряющемся потоке газа за ударной волной при $t = 0,1$ для облаков различной формы:
a — облако в форме круга, *б* — облако в форме прямоугольника, *в* — облако в форме треугольника

На ранней стадии движения при распространении нормальной ударной волны по облаку частиц образуется отраженная волна в форме лука (рис. 2). В случае облака круглой или прямоугольной формы образуется сильная ударная волна (рис. 2, *a, б*), в то время как в случае облака треугольной формы, обладающего лучшими аэродинамическими свойствами, инициируется существенно более слабая ударная волна.

Поток газа разделяется в острых углах передней части облака прямоугольной формы и в апексе облака круглой формы. В случае облака треугольной формы поток разделяется только в углах его задней части. На рис. 3 видно, что частицы движутся по формирующимся разделенным потокам, при этом образуются четко выраженные линии из материальных частиц. Ускоряющийся поток замедляется перед облаками в форме прямоугольника и круга, что приводит к сжатию в них частиц. При этом движение передних частиц вниз по потоку приводит к увеличению плотности облака. В случае облака треугольной формы сжатие в его передней части значительно меньше, чем в случаях облаков прямоугольной и круглой форм, и большая часть частиц продвигается вправо на существенно меньшее расстояние. Влияние формы облака на движение потока более детально исследуется в работе [8].

Для количественного описания дисперсии частиц в продольном направлении введем осредненные и нормированные среднеквадратичные статистические величины. Осредненное смещение частиц x_{disp} определяется как разность между осредненными координатами частиц $\bar{x}(t)$ в момент времени t и осредненными координатами частиц $\bar{x}(0)$ в момент времени $t = 0$:

$$x_{disp}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}(0), \quad \bar{x} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i(t).$$

Для количественного описания дисперсии частиц в поперечном направлении (в направлении координаты y) введем нормированное среднеквадратичное смещение частиц относительно начального положения:

$$y_{disp} = \frac{y_{rms}(t) - y_{rms}(0)}{y_{rms}(0)}, \quad y_{rms}(t) = \sqrt{\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (y_i(t))^2}.$$

Из результатов анализа приведенных на рис. 4, *a* зависимостей $x_{disp}(t)$ следует, что для облаков прямоугольной и круглой форм дисперсия частиц в направлении x примерно

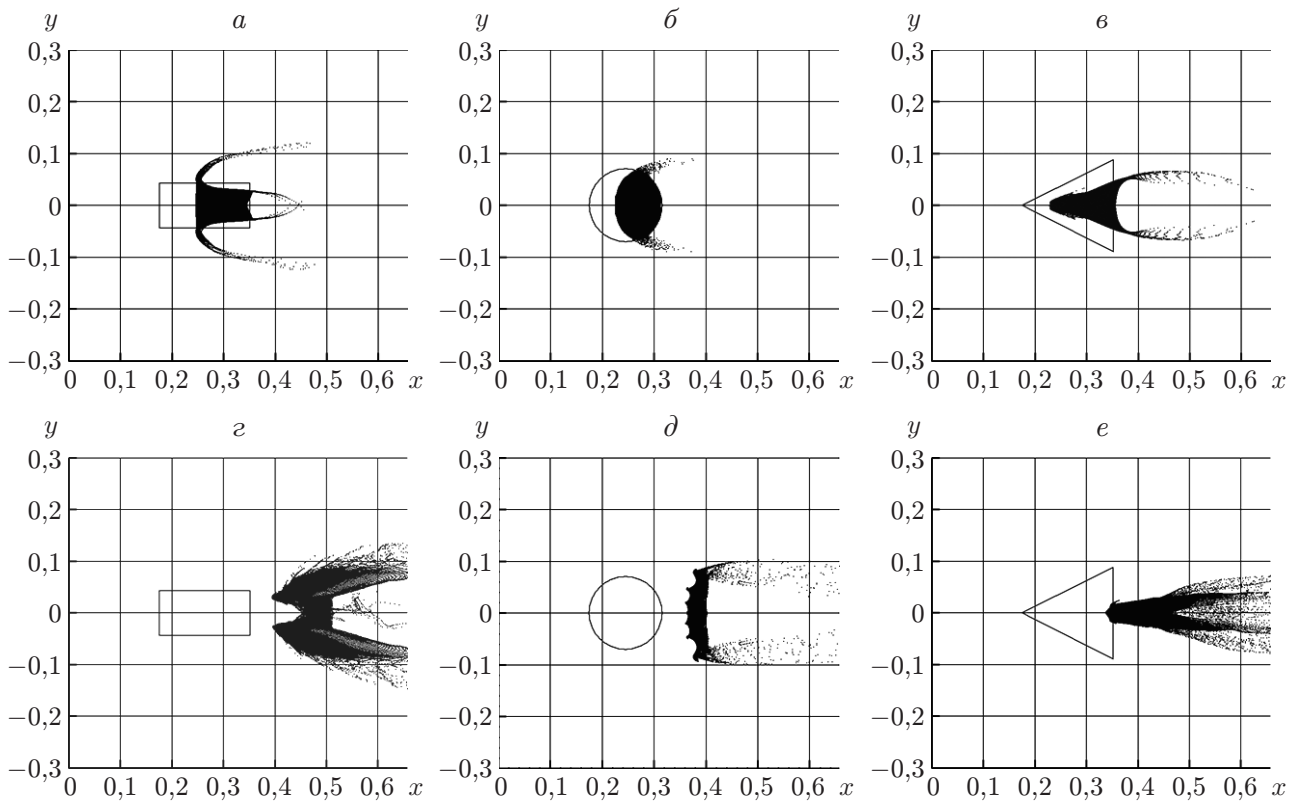


Рис. 3. Дисперсия частиц из бронзы марки 40К в ускоряющемся потоке газа за движущейся ударной волной при $t = 0,3$ (*a*-*в*) и $t = 1,0$ (*г*-*е*):
a, г — облако прямоугольной формы, *б, д* — облако круглой формы, *в, е* — облако треугольной формы

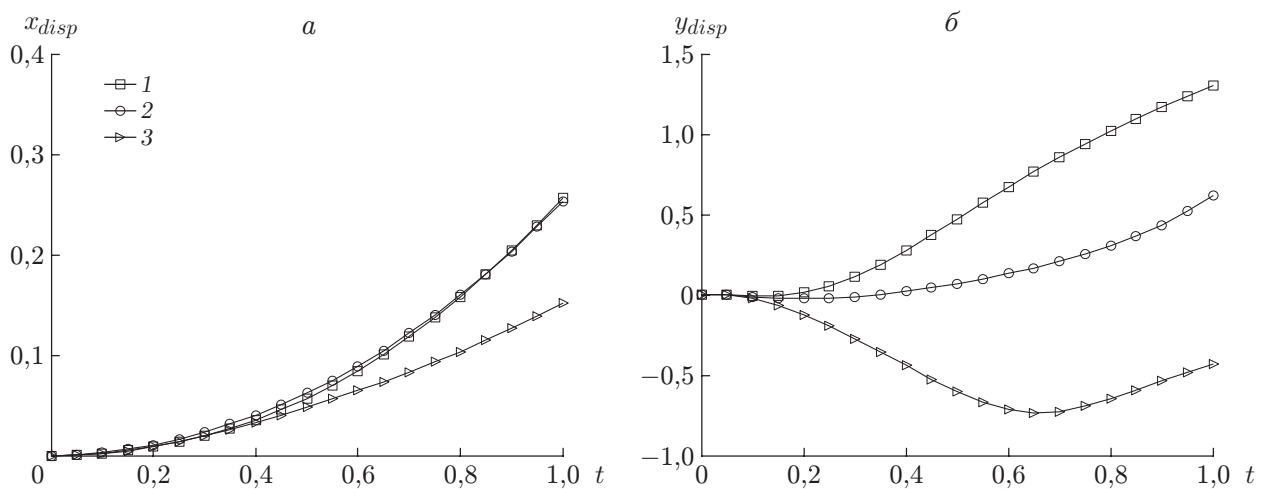


Рис. 4. Зависимости $x_{disp}(t)$ (*a*) и $y_{disp}(t)$ (*б*) для облаков частиц различной формы:
 1 — облако прямоугольной формы, 2 — облако круглой формы, 3 — облако треугольной формы

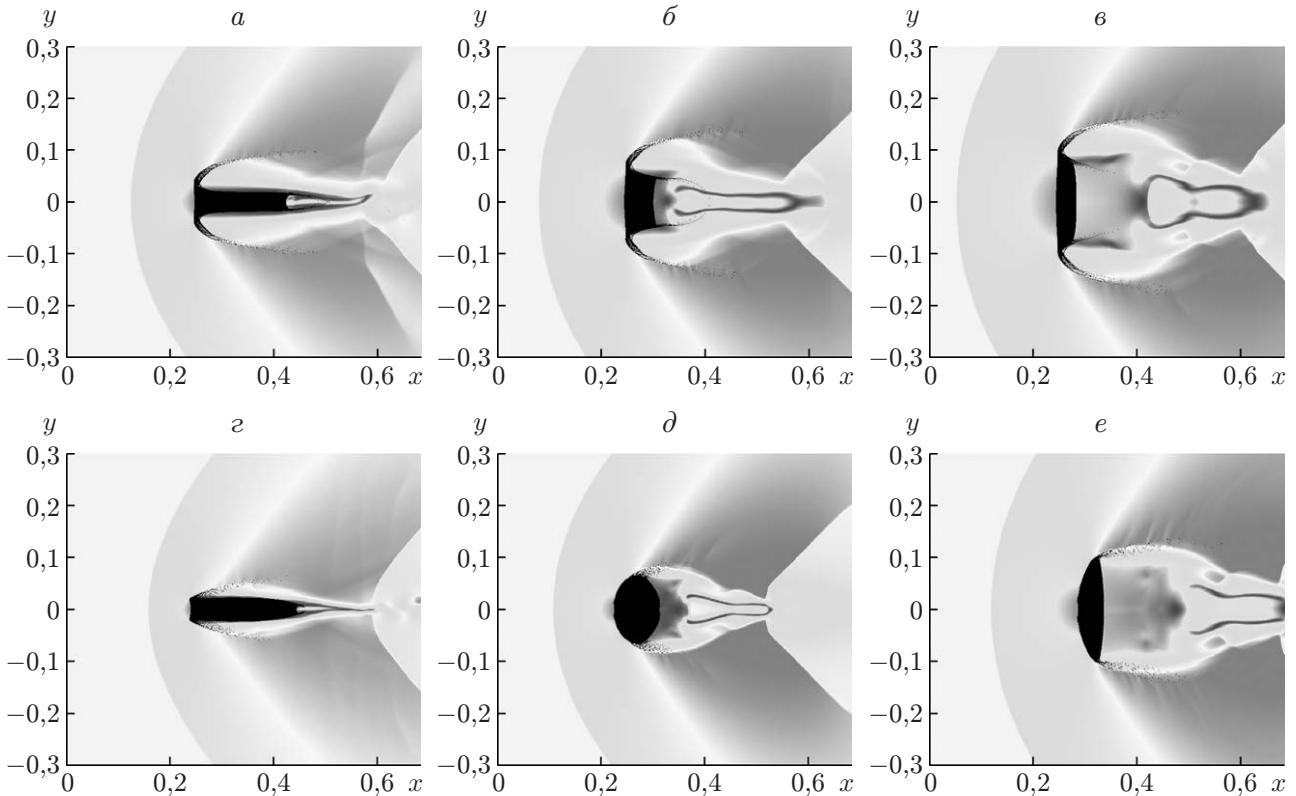


Рис. 5. Распределение скорости и дисперсия частиц на ранней стадии движения ($t = 0,3$) при $\theta = 0$:

a – $в$ — облако прямоугольной формы (a — $\eta = 4$, $б$ — $\eta = 1$, $в$ — $\eta = 0,5$), $г$ – $е$ — облако эллиптической формы ($г$ — $\eta = 4$, $д$ — $\eta = 1$, $е$ — $\eta = 0,5$)

одинакова, в то время как для облака треугольной формы она меньше (при $t = 1,0$ — на 40 %). Это обусловлено меньшей силой взаимодействия потока и частиц, что является следствием аэродинамики формы треугольного облака. В силу второго закона Ньютона меньшая сила вызывает меньшее ускорение.

Из приведенных на рис. 4,б зависимостей $y_{disp}(t)$ следует, что перенос частиц в разделенных потоках вблизи углов прямоугольного облака сопровождается большей дисперсией частиц в поперечном сечении потока по сравнению с дисперсией облаков двух других форм. Начальная дисперсия облака увеличивает интенсивность движения частиц в поперечном направлении. Для облаков прямоугольной формы в момент времени $t \approx 0,4$ у кривой зависимости $y_{disp}(t)$ выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз. По мере удаления частиц от основной массы ближнее взаимодействие частиц и потока становится доминирующей силой, и через продолжительный промежуток времени частицы начинают двигаться строго вниз по потоку. Для облаков треугольной формы время движения частиц поперек потока больше, чем для облаков прямоугольной и круглой форм. Однако со временем сжатие облака треугольной формы (см. рис. 3,в,е) приводит к тому, что значения y_{disp} становятся отрицательными, следовательно, дисперсия частиц в облаке треугольной формы существенно меньше, чем в облаках другой формы.

2.1. Влияние параметра η на дисперсию облака. Параметр η (отношение начальной длины облака в направлении x к его начальной длине в направлении y) не оказывает влияния на картину движения потока с частицами ни на ранней стадии ($t < 0,4$) ни на поздней ($t > 0,7$).

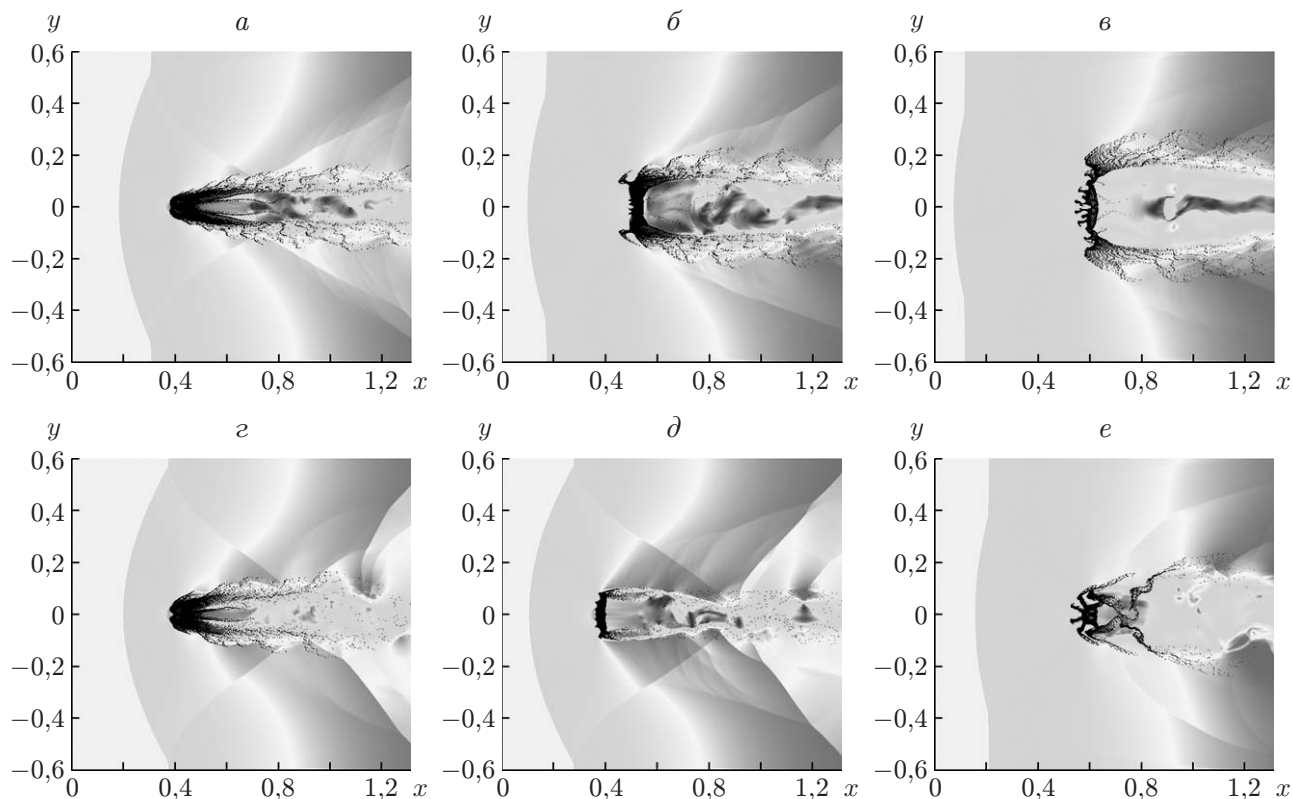


Рис. 6. Распределение скорости и дисперсия частиц на поздней стадии движения ($t = 1,0$) при $\theta = 0$:

a – $в$ — облако прямоугольной формы (a — $\eta = 4$, b — $\eta = 1$, $в$ — $\eta = 0,5$), $г$ – $е$ — облако эллиптической формы ($г$ — $\eta = 4$, $д$ — $\eta = 1$, $е$ — $\eta = 0,5$)

В облаках прямоугольной формы на ранней стадии движения частицы переносятся послойно с передних и задних углов (рис. 5, 6). В дальнейшем рукава, образовавшиеся в передних углах, защищают от потока заднюю часть облака. Вследствие этого скорость частиц в задней части облака уменьшается, что препятствует дальнейшему переносу частиц с его задних углов. В случае облака эллиптической формы точка разделения потока движется вдоль его гладкой поверхности. В случае облака прямоугольной формы частицы переносятся вдоль отдельных слоев. В отличие от облака прямоугольной формы, для которого точка разделения потока фиксирована и находится в передних углах, в случае облака эллиптической формы точка разделения потока перемещается со временем, поэтому для облака такой формы рукава, состоящие из частиц, на ранней стадии выражены менее четко. Облака в форме круга и прямоугольника с $\eta > 1$ в направлении координаты x сжимаются сильнее, чем в направлении координаты y . Облака с $\eta < 1$ сжимаются сильнее в направлении координаты y .

С увеличением параметра η ширина облака уменьшается и оно в меньшей степени препятствует потоку. Вследствие этого при больших значениях параметра η задняя часть зоны и зона потока с малой скоростью (застойная зона) перед потоком уменьшаются. При небольшой ширине облака (при больших значениях параметра η) силы взаимодействия потока и газа становятся малыми, что приводит к уменьшению скорости конвекции облака в направлении координаты x (рис. 7) в момент времени $t = 1$ в случае как прямоугольной формы облака, так и эллиптической. Результаты сравнения конвекции при наличии облаков прямоугольной и эллиптической форм показывают, что в случае облака эллиптической формы сила взаимодействия меньше, а его аэродинамические свойства лучше.

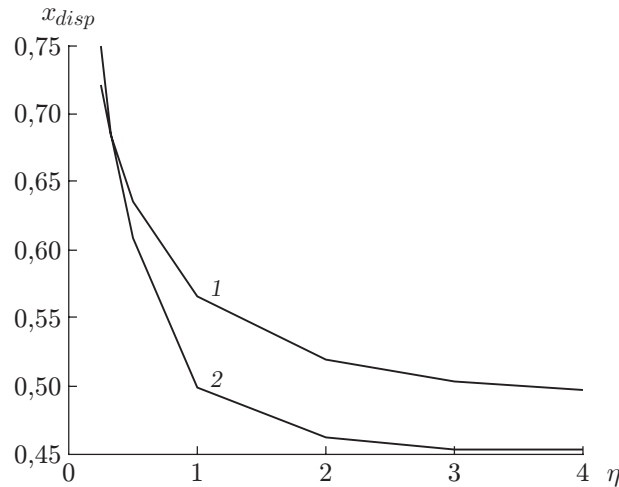


Рис. 7. Зависимость x_{disp} от параметра η для облаков, имеющих различную начальную форму:

1 — облако прямоугольной формы, 2 — облако эллиптической формы

2.2. Влияние угла поворота облака θ . Поворот облаков прямоугольной и эллиптической форм осуществляется с помощью замены переменных

$$[x_p, y_p]_{new} = R[x_p, y_p]_{old},$$

где R — матрица поворота на угол θ :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Точка, вокруг которой происходит поворот, первоначально находится справа от движущейся ударной волны ($x = 0,175$), что обеспечивает прохождение ударной волны через облако в одно и то же время при любых углах поворота.

На ранней стадии при небольших углах поворота распределение скорости в потоке и дисперсия частиц качественно согласуются с распределением скорости и дисперсией частиц при $\theta = 0$ (рис. 8, а, е). В переднем углу прямоугольника частицы разделяются на рукава, которые защищают часть облака, расположенную ниже по потоку, в большей степени, чем в случае облака эллиптической формы. Однако при повороте облака сила течения, характер разделения потока и длина рукава, образующего щит, изменяются, поскольку верхний по потоку угол облака становится точкой торможения (стагнации) потока. В этой точке начинает формироваться расширяющаяся по мере увеличения плотности область облака, которая со временем становится основным рукавом, вытекающим из него (рис. 9, а, г). При повороте верхняя граница облака, на которую набегающий поток, на ранней стадии защищает нижнюю границу, расположенную ниже по потоку, в результате чего впоследствии на ней возникают большие рукава.

При дальнейшем увеличении угла θ течение потока с частицами существенно изменяется как качественно, так и количественно. При умеренных значениях угла θ течение при наличии облака прямоугольной формы аналогично течению при наличии облака треугольной формы (рис. 8, б, рис. 10, а). В этом случае поток набегающий на один из передних углов облака и не отделяется от него. Поскольку поток примыкает к границам облака, принадлежащим этому углу, частицы, находящиеся в окрестности угла, в дальнейшем не покидают облако. На более ранних временах большинство частиц выносятся из двух углов облака, расположенных ниже по течению относительно ведущего угла. Такая динамика

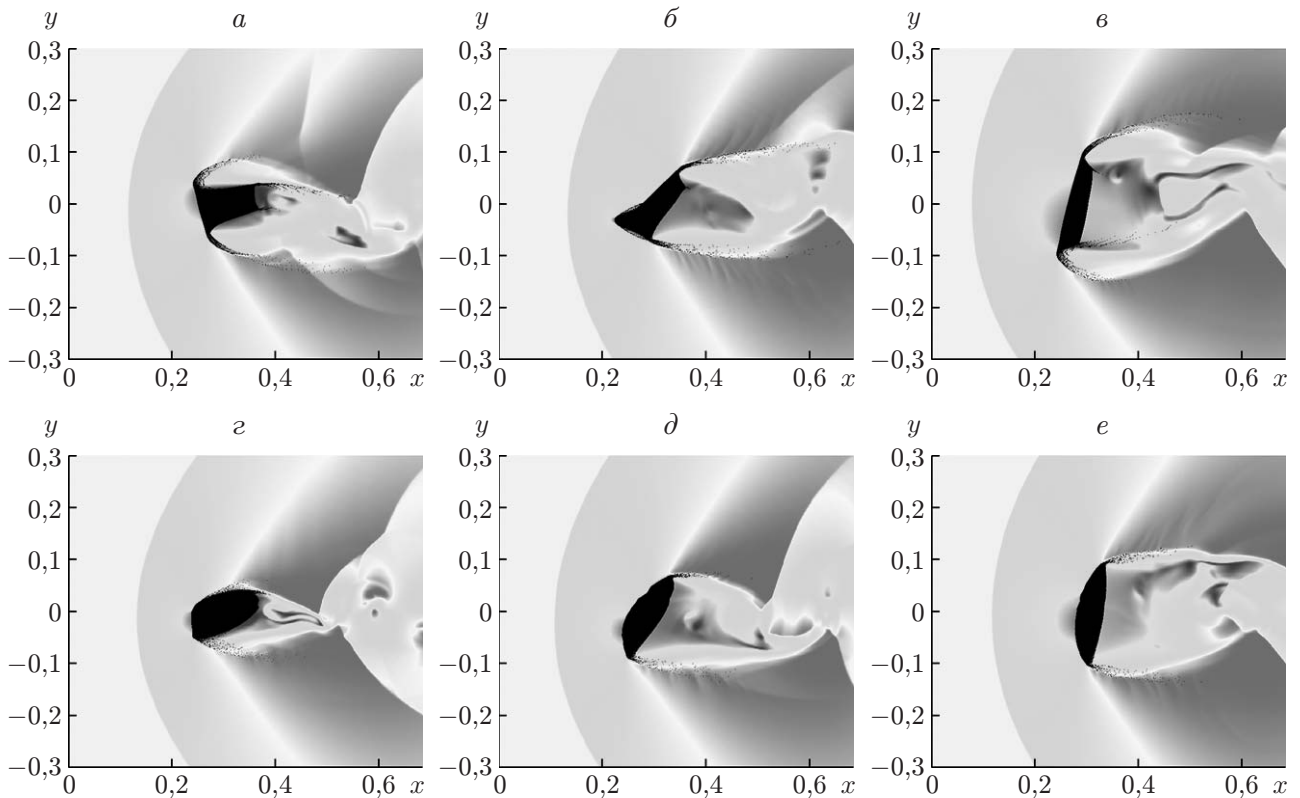


Рис. 8. Распределение скорости в потоке и дисперсия облаков прямоугольной (a – b) и эллиптической (z – e) форм при $t = 0,3$, $\eta = 2$ и различных значениях угла θ :
 a, z — $\theta = 15^\circ$, b, d — $\theta = 45^\circ$, e — $\theta = 75^\circ$

аналогична динамике в случае облака треугольной формы. На более поздней стадии облако прямоугольной формы сжимается по направлению к линии симметрии (см. рис. 9, b), что также имеет место в случае облака треугольной формы (см. рис. 10, b). При умеренных углах поворота в случае облака эллиптической формы на ранней стадии картина течения аналогична картине течения в случае облака прямоугольной формы (см. рис. 8, d), но в силу более гладкой геометрии в этом случае образование рукавов из материальных частиц и разделение потока становятся менее отчетливыми. Заметим, что с геометрической точки зрения положение облаков прямоугольной и эллиптической форм с $\eta = \eta^* > 1$ при больших углах поворота эквивалентно положению таких облаков с $\eta = 1/\eta^*$ при малых углах поворота. Как отмечено выше, течение потока, содержащего частицы, при малых углах поворота облака незначительно отличается от течения потока при нулевом угле поворота.

Покажем, что при умеренных углах поворота динамика течения в случае облака прямоугольной формы незначительно отличается от динамики течения в случае облака треугольной формы. Рассмотрим случай облака квадратной формы ($\eta = 1$) с углом поворота $\theta = 45^\circ$. Передняя часть облака представляет собой треугольник. На рис. 10 видно, что в этом случае как на ранней стадии (см. рис. 10, a, b), так и на поздней (см. рис. 10, $в, z$) динамика течения вблизи передней части облака такая же, как и в случае облака треугольной формы. На ранней стадии задняя часть облака, имеющего форму ромба, смещается незначительно. Поскольку эта часть облака защищена от потока, она практически не оказывает влияния на его динамику. В дальнейшем задняя часть облака, имеющего форму ромба, подвергается действию набегающего потока, облако расширяется и картина течения становится подобной картине течения в случае облака треугольной формы.

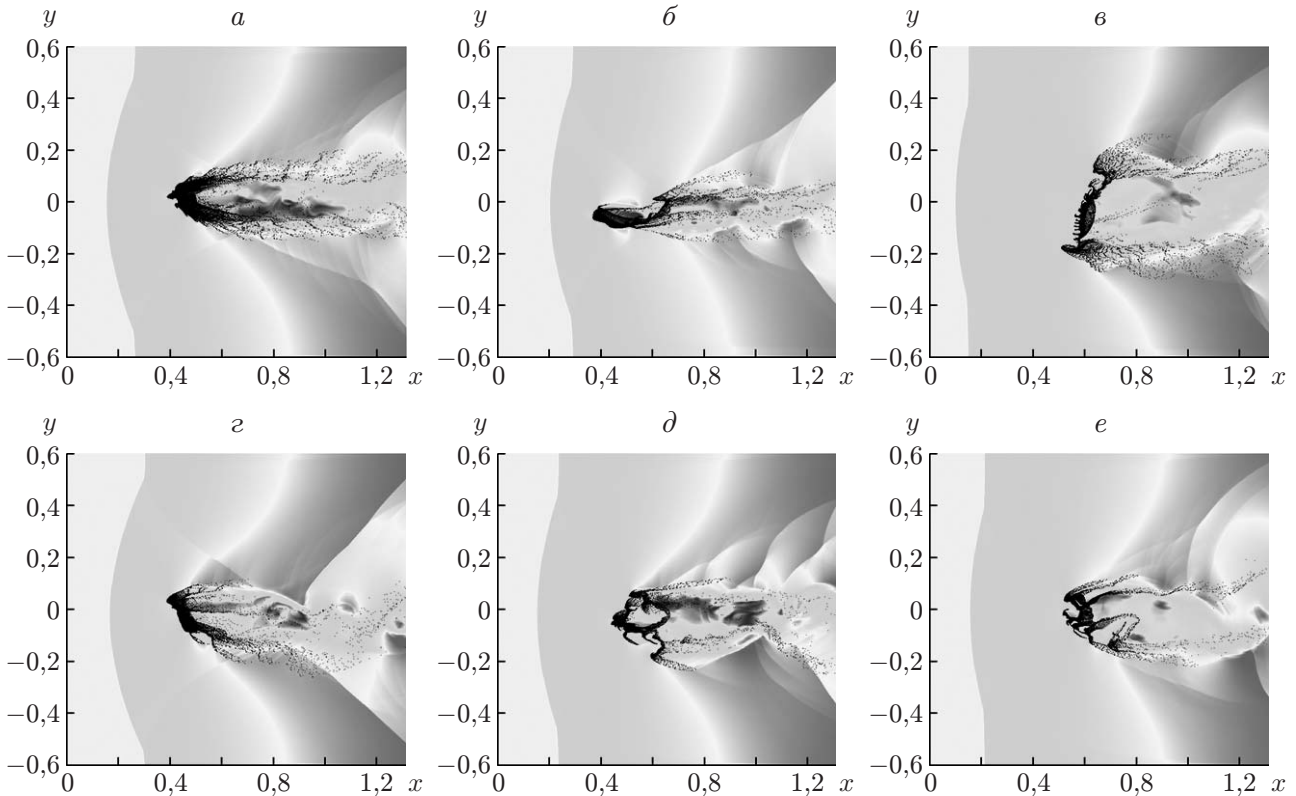


Рис. 9. Распределение скорости в потоке и дисперсия облаков прямоугольной (*a–в*) и эллиптической (*г–е*) форм при $t = 1,0$, $\eta = 2$ и различных значениях угла θ : *a, г* — $\theta = 15^\circ$, *б, д* — $\theta = 45^\circ$, *в, е* — $\theta = 75^\circ$

При угле поворота $\theta = 0$ облако квадратной формы распространяется вниз по потоку в направлении координаты x дальше, чем при $\theta = 45^\circ$. Это объясняется тем, что в случае затупленной формы передней части облака ($\theta = 0$) сила взаимодействия потока и облака больше, чем в случае острой формы передней части облака ($\theta = 45^\circ$), обладающей лучшими аэродинамическими свойствами. Поэтому при малых углах поворота координата облака x_{disp} больше, чем при умеренных (рис. 11, *a*). В силу симметрии квадрата график зависимости $x_{disp}(\theta)$ симметричен по θ . Напомним, что геометрия облака с $\eta = \eta^* > 1$ и углом поворота $\theta = 90^\circ$ та же, что и в случае $\eta = 1/\eta^*$ при $\theta = 0$. При $\eta > 1$, $\theta = 0$ значение координаты x_{disp} меньше, чем при $\theta = 90^\circ$ (см. рис. 7). На рис. 11, *a* все кривые пересекаются в одной точке, что свидетельствует о корреляции облаков прямоугольной формы при $\theta \approx 30^\circ$. При умеренных углах поворота динамика течения в случае облака прямоугольной формы подобна динамике течения в случае облака треугольной формы, поэтому зависимости $y_{disp}(\theta)$ имеют минимум при всех значениях параметра η . Наименьшее значение имеет место в случае облака квадратной формы при $\theta = 45^\circ$. С увеличением параметра η сжатие облака уменьшается.

Из зависимостей, приведенных на рис. 11, 12, следует, что динамика течения в случае облака прямоугольной формы подобна динамике течения в случае облака эллиптической формы. Кривые, приведенные на рис. 12, *a*, также пересекаются в одной точке при $\theta = 15^\circ$. Поскольку в случае круга ($\eta = 1$) геометрия облака не меняется при повороте, координата x_{disp} не зависит от угла θ .

На поздней стадии для облаков с $\eta > 1$ неустойчивость играет главную роль в развитии дисперсии частиц, что приводит к разрыву начальной поперечной дисперсии при

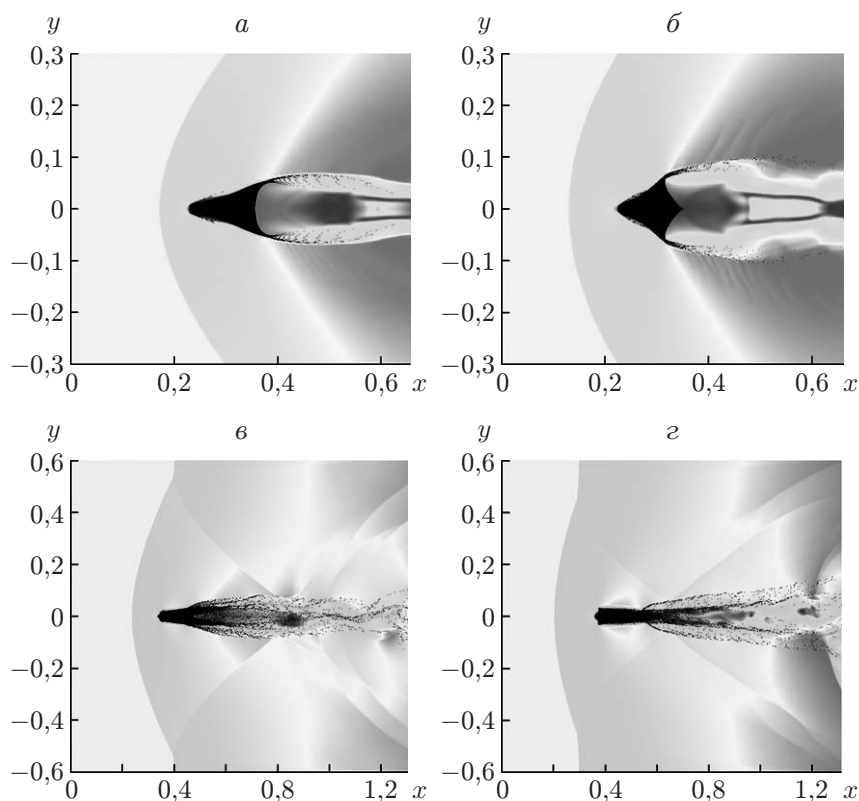


Рис. 10. Распределение скорости и дисперсия частиц в случае облаков треугольной (*а*, *в*) и квадратной (*б*, *г*) форм при $\theta = 45^\circ$:
а, *б* — $t = 0,3$, *в*, *г* — $t = 1,0$

нулевом угле поворота. При угле поворота облака, превышающем 45° , основное влияние на величину y_{disp} оказывает начальная динамика потока.

Заключение. С использованием метода Лагранжа — Эйлера высокого порядка проведено исследование влияния формы облака, отношения его продольного размера к поперечному и угла поворота на динамику потока, содержащего частицы. Показано, что динамика течения существенно зависит от формы облака. В случае облаков, первоначальная форма которых является прямоугольной, частицы в основном отделяются слоями, образующими рукава, которые вытекают из передних углов облака. Эти рукава защищают заднюю часть облака от набегающего потока. В случае гладких поверхностей положение точек, в которых частицы отделяются от облака, со временем меняется, поэтому для облаков эллиптической формы рукава из отделяющихся частиц видны менее отчетливо, чем для облаков прямоугольной формы. В случае если поток примыкает к облаку треугольной формы, аэродинамические свойства которого лучше, частицы отделяются в виде слоев, исходящих из задних углов.

При $t = 1,0$ осредненное смещение облака треугольной формы вниз по потоку на 40 % меньше смещения облаков прямоугольной и круглой форм, имеющих затупленную лицевую поверхность. Это объясняется меньшей силой взаимодействия потока и облака частиц, а следовательно, и меньшим ускорением в случае облака треугольной формы, имеющего лучшие аэродинамические свойства. Поток, примыкающий к облаку прямоугольной формы, сжимает его в направлении оси симметрии, что приводит к уменьшению среднеквадратичного значения координаты облака в поперечном направлении. Частицы, отделяющиеся от облаков прямоугольной и круглой форм послойно, удаляются от оси симметрии,

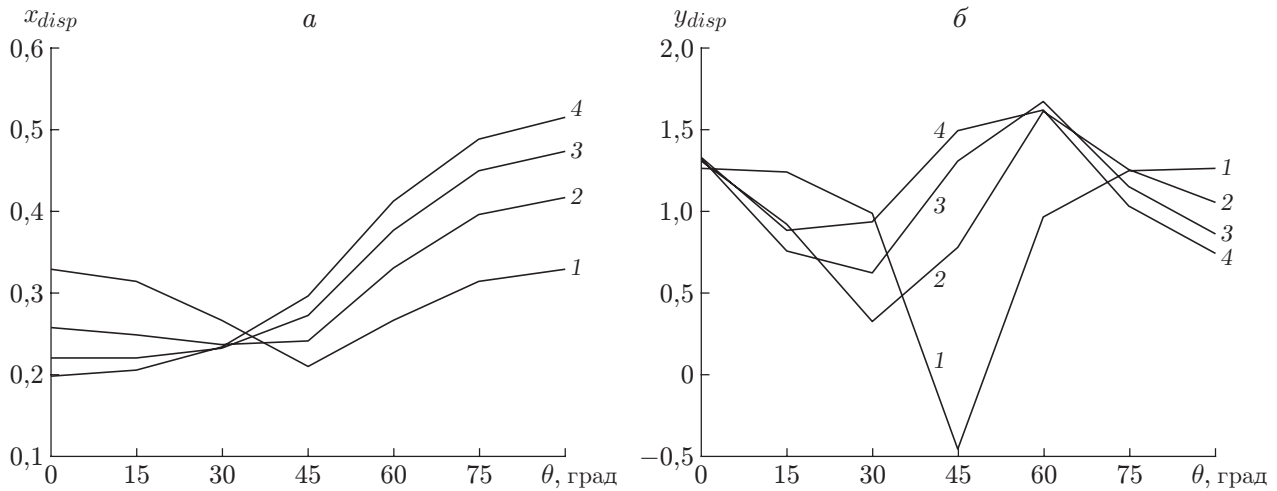


Рис. 11. Зависимости $x_{disp}(\theta)$ (а) и $y_{disp}(\theta)$ (б) для облаков, имеющих прямоугольную начальную форму:

1 — $\eta = 1$, 2 — $\eta = 2$, 3 — $\eta = 3$, 4 — $\eta = 4$

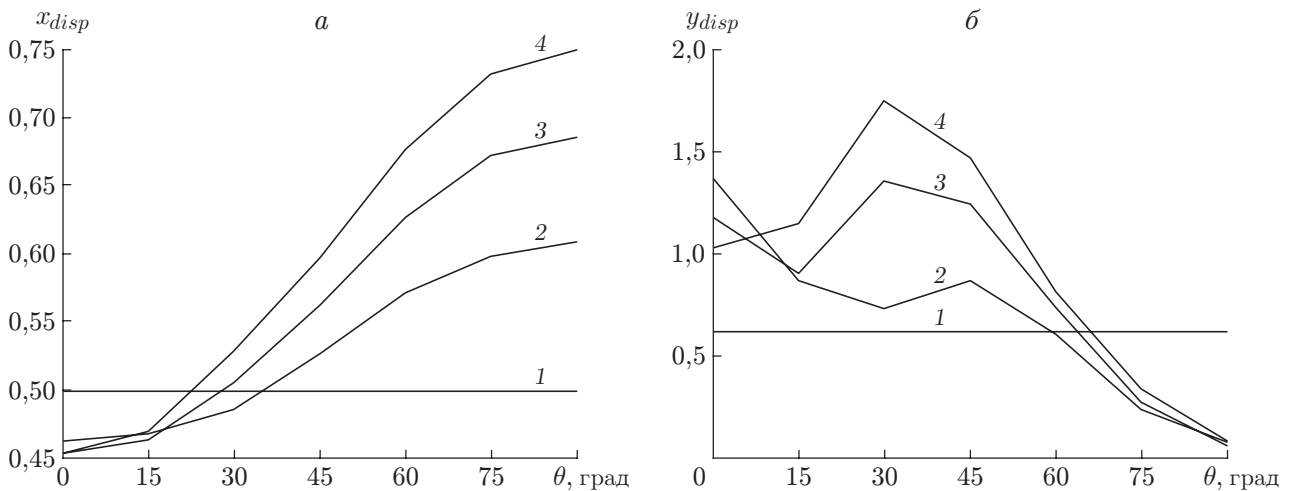


Рис. 12. Зависимости $x_{disp}(\theta)$ (а) и $y_{disp}(\theta)$ (б) для облаков, имеющих эллиптическую начальную форму:

1 — $\eta = 1$, 2 — $\eta = 2$, 3 — $\eta = 3$, 4 — $\eta = 4$

в результате чего увеличивается среднеквадратичное значение координаты облака в поперечном направлении. Изменение отношения продольного размера облака к его поперечному размеру (параметра η) не приводит к качественному изменению динамики потока, нагруженного частицами. Однако облака меньшей ширины, обладающие лучшей аэродинамикой, продвигаются вниз по потоку на меньшее расстояние. Облака с меньшим значением параметра η больше сжимаются в направлении движения потока, в то время как облака с большим значением параметра η больше сжимаются в направлении, перпендикулярном движению потока.

При небольших углах поворота течение аналогично течению при нулевом угле поворота. При умеренных углах поворота характеристики течения в случае облаков прямоугольной и эллиптической форм аналогичны характеристикам течения в случае облака, имеющего треугольную начальную форму.

Данная работа представляет собой часть широкого круга исследований, целью которых является установление адекватности результатов, полученных с помощью метода Эйлера — Лагранжа высокого порядка, экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Boiko V., Poplavsky S.** Particle and drop dynamics in the flow behind a shock wave // *Fluid Dynamics*. 2007. V. 42. P. 441–443.
2. **Sun M., Saito T., Takayama K., Tanno H.** Unsteady drag on a sphere by shock wave loading // *Shock Waves*. 2004. V. 14. P. 3–9.
3. **Loth E.** Compressibility and rarefaction effects on drag of a spherical particle // *AIAA J.* 2008. V. 46. P. 2219–2228.
4. **Boiko V., Poplavsky S.** Dynamics of irregularly shaped bodies in a flow behind a shock wave // *C. R. Mecanique*. 2004. V. 332. P. 181–187.
5. **Olim M., Ben-Dor G., Mond M., Igra O.** A general attenuation law of moderate planar waves propagating into dusty gases with relatively high loading ratios of solid particles // *Fluid Dynamics Res.* 1990. V. 6. P. 185–199.
6. **Kiselev V. P., Kiselev S. P., Fomin V. M.** Interaction of a shock wave with a cloud of particles of finite dimensions // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1994. V. 35, N 2. P. 183–192.
7. **Boiko V., Kiselev V., Kiselev S., et al.** Interaction of a shock wave with a cloud of particles // *Combust., Explos., Shock Waves*. 1996. V. 32. P. 191–203.
8. **Jacobs G., Don W. S.** A high-order WENO-Z finite difference based particle-source-in-cell method for computation of particle-laden flows with shocks // *J. Comput. Phys.* 2009. V. 228, N 5. P. 1365–1379.
9. **Jacobs G., Don W. S., Dittmann T.** High-order resolution Eulerian-Lagrangian simulations of particle dispersion in the accelerated flow behind a moving shock // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*. 2010. V. 26, iss. 1–4. P. 37–50.
10. **Shu C. W.** High order weighted essentially non-oscillatory schemes for convection dominated problems // *SIAM Rev.* 2009. V. 51. P. 82–126.
11. **Balsara D., Shu C. W.** Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // *J. Comput. Phys.* 2000. V. 160. P. 405–452.
12. **Latini M., Schilling O., Don W. S.** Effects of order of WENO flux reconstruction and spatial resolution on reshocked two-dimensional Richtmyer — Meshkov instability // *J. Comput. Phys.* 2007. V. 221. P. 805–836.
13. **Gao Z., Don W. S., Li Z.** High order weighted essentially non-oscillation schemes for one-dimensional detonation wave simulations // *J. Comput. Math.* 2011. V. 29. P. 623–638.
14. **Gao Z., Don W. S., Li Z.** High order weighted essentially non-oscillation schemes for two-dimensional detonation wave simulations // *J. Sci. Comput.* 2012. V. 53, iss. 1. P. 80–101.
15. **Borges R., Carmona M., Costa B., Don W. S.** An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 2008. N 6. P. 3101–3211.
16. **Castro M., Costa B., Don W. S.** High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 2011. V. 230. P. 1766–1792.

Поступила в редакцию 9/VII 2012 г.