

УДК 532.5

О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ТИПА ДУЖКИ СО СТОКОМ

Н. Б. Ильинский, Н. Д. Якимов

Научно-исследовательский институт математики и механики Казанского государственного университета, 420008 Казань

В рамках классической модели стационарного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью исследована задача максимизации подъемной силы аэродинамического профиля типа дужки при наличии на нем стока, моделирующего отбор потока. Для стока с фиксированным расходом на верхней поверхности заданной дужки найдено оптимальное положение, обеспечивающее наибольший прирост подъемной силы. Показано, что при наличии стока оптимальная форма дужки с ограниченными кривизной и длиной хорды совпадает с оптимальной формой дужки без стока, найденной М. А. Лаврентьевым (дужка окружности). Определена величина расхода, соответствующая максимальной подъемной силе, и выяснен механизм влияния отбора потока на подъемную силу.

Введение. При исследовании сложных проблем аэрогидродинамики на начальном этапе целесообразно выбрать простейшую математическую модель течения и простую форму профиля крыла. Именно так поступил М. А. Лаврентьев [1, 2], решая экстремальную задачу теории крыла, в которой рассматривался профиль типа дужки в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. При изучении влияния отсасывания пограничного слоя с поверхности крыла на подъемную силу и силу сопротивления В. В. Голубев одним из первых заменил цель точечным стоком [3, 4]. Следует также отметить работу [5] об обтекании профиля со стоком и источником. Экстремальная задача, в которой цель на профиле заменялась стоком, рассмотрена в [6].

В настоящей работе исследуется задача максимизации подъемной силы аэродинамического профиля типа дужки при наличии на нем стока, моделирующего отбор внешнего потока. Речь идет об отборе с заметным расходом, непосредственно участвующим в формировании обтекающего потока, а не об отсосе пограничного слоя, влияющем на картину обтекания только посредством изменения условий отрыва. Исследование проводится в рамках классической модели стационарного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью.

Схема течения и основные уравнения. Рассматривается плоское установившееся обтекание дужки AB потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, такое что концы дужки A и B являются точками разветвления и схода потока соответственно, т. е. обтекание является безотрывным. На верхней поверхности дужки в точке M расположен точечный сток с расходом жидкости $2\pi q$, а между точками M и B находится критическая точка N (рис. 1, a). Необходимо определить наиболее выгодное с точки зрения увеличения подъемной силы место расположения стока (точки M) на дужке заданной формы, выяснить характер влияния мощности стока на подъемную силу, а также найти форму дужки со стоком, обладающей максимальной подъемной силой при ограниченных длине хорды и кривизне.

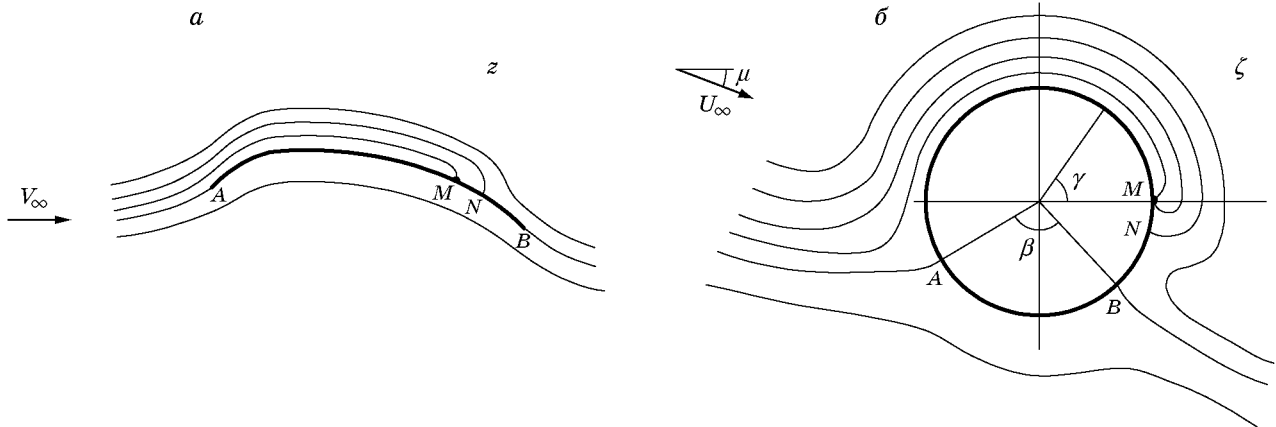


Рис. 1

Пусть z — комплексная переменная плоскости течения. Считаем, что скорость потока на бесконечности V_∞ известна и направлена горизонтально. При этом угол атаки дужки (наклон) заранее не задан и должен обеспечивать обтекание по указанной схеме.

Область течения, представленную на рис. 1,а, можно конформно отобразить на внешность единичного круга в плоскости вспомогательной переменной ζ . При отображении обтекание дужки перейдет в соответствующее обтекание окружности (рис. 1,б). Циркуляция скорости вокруг профиля останется прежней, а скорость потока на бесконечности в плоскости ζ ($z = f(\zeta)$ — функция, осуществляющая обратное отображение) принимается равной $U_\infty = V_\infty h$, где $h = |f'(\infty)|$. Направление скорости на бесконечности определяется соотношением $\mu = -\arg f'(\infty) = -\arg U_\infty$.

По теореме Жуковского величина подъемной силы произвольного профиля, в том числе при наличии стока, определяется формулой

$$Y = 2\pi\rho V_\infty \Gamma, \tag{1}$$

где Γ — циркуляция скорости, деленная на 2π .

Комплексный потенциал обтекания окружности со стоком (рис. 1,б) имеет вид (см., например, [7, с. 123])

$$w(\zeta) = U_\infty \left(\zeta e^{i\mu} + \frac{1}{\zeta e^{i\mu}} \right) + i\Gamma \ln \zeta - q \ln \frac{(\zeta - 1)^2}{\zeta} + c,$$

где c — постоянная. Тогда скорость на окружности находится по формуле

$$u(\gamma) = -2U_\infty \sin(\gamma + \mu) - \Gamma - q \operatorname{ctg}(\gamma/2), \tag{2}$$

где γ — аргумент (полярный угол) точек на окружности, причем положительным считается направление скорости u , совпадающее с направлением увеличения γ . Точка A разветвления и точка B схода потока определяются соотношениями

$$u(\gamma_A) = 0, \quad u(\gamma_B) = 0. \tag{3}$$

Обозначим $\beta = \gamma_B - \gamma_A$. При изменении параметров обтекания в плоскости z величины h и β не будут меняться, так как они определяются геометрией области течения. Следовательно, выяснение влияния положения и мощности стока на величину подъемной силы заданной дужки сводится к определению зависимости Γ от соответствующих параметров обтекания окружности с фиксированным значением $\beta = \beta_a$, известным из отображения $f(z)$. При нахождении оптимальной формы необходимо учитывать зависимость β_a и h от формы дужки. С учетом (2), (3) параметры Γ , q , μ связаны соотношением

$$\gamma_B - \gamma_A = \beta. \tag{4}$$

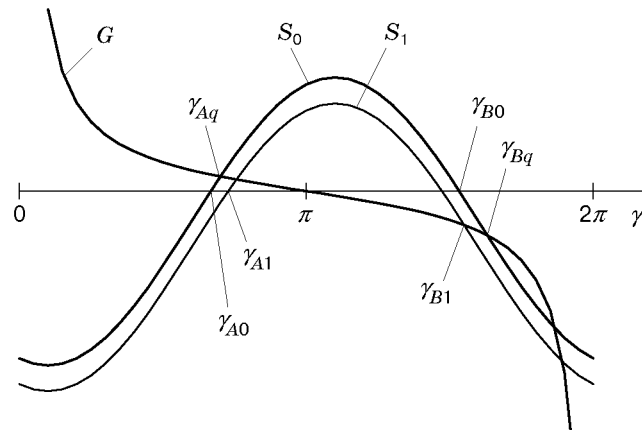


Рис. 2

Однако получить явное выражение для подъемной силы через исходные параметры, чтобы затем использовать стандартные методы исследования явных функций, не удастся. Поэтому ниже применяются качественные методы исследования.

Далее использованы следующие геометрические представления. Обозначим через S синусоиду, описываемую в координатах γ, u уравнением $u_S(\gamma) = -2U_0 \sin(\gamma + \mu) - \Gamma$, а через G — котангенсоиду $u_G(\gamma) = q \operatorname{ctg}(\gamma/2)$ (рис. 2). Отметим, что $S = S(\mu, \Gamma)$ зависит от параметров μ и Γ (и от h при изменяющейся дужке: $S = S(\mu, \Gamma, h)$), а $G = G(q)$ — только от q . Величина $u(\gamma) = u_S(\gamma) - u_G(\gamma)$ — расстояние от G до S . В частности, точкам A, B и N соответствуют точки пересечения S и G . Нижней поверхности дужки соответствует участок $\gamma_A < \gamma < \gamma_B$, где S находится над G . В этих обозначениях изменение μ можно представить как смещение кривой S по горизонтали, изменение Γ — по вертикали, а изменение q — как сжатие-растяжение G по вертикали.

Возможность увеличения подъемной силы. Покажем, что появление стока на дужке может увеличить подъемную силу. Для этого согласно (1) надо показать, что величина Γ при наличии стока может оказаться больше, чем без него.

Отсутствие стока ($q = 0$) означает, что G на интервале $0 < \gamma < 2\pi$ совпадает с горизонтальной осью координат. Выберем μ (т. е. место предполагаемого стока) так, чтобы при $q = 0$ выполнялось неравенство

$$\gamma_{B0} - \pi \geq k(\pi - \gamma_{A0}), \quad k > 1, \quad (5)$$

причем согласно (4) $\gamma_{B0} - \gamma_{A0} = \beta_a$. Здесь и далее индекс “нуль” соответствует случаю $q = 0$. В (5) допускается, что $\pi - \gamma_{A0} < 0$. Соответствующее значение Γ обозначим Γ_0 , а $S_0 = S(\mu, \Gamma_0)$.

Существует такое значение q , что $\beta_q = \gamma_{Bq} - \gamma_{Aq} > \beta_a$, где γ_{Bq}, γ_{Aq} — точки пересечения S_0 и $G(q)$ (здесь не требуем выполнения условия (4)). Действительно, по свойству котангенса $kq \operatorname{ctg}(\gamma_{Aq}/2) < |q \operatorname{ctg}(\gamma_{Bq}/2)|$, и при не слишком больших q имеем $\gamma_{Aq} - \gamma_{A0} < \gamma_{Bq} - \gamma_{B0}$, так как углы наклона касательной к S_0 в точках A_0 и B_0 равны по абсолютной величине. Поэтому можно построить кривую $S_1 = S(\mu, \Gamma_1)$, удовлетворяющую условию (4): $\gamma_{B1} - \gamma_{A1} = \beta_a$ (γ_{B1}, γ_{A1} — точки пересечения S_1 и $G(q)$) при $\Gamma_1 > \Gamma_0$ (т. е. S_1 находится ниже S_0 при том же μ). Таким образом, введением стока можно увеличить Γ и, следовательно, Y .

Оптимальное положение стока. Положение стока фиксированной мощности будем изменять. При этом исходное решение G и S_1 соответствует схеме, представленной на рис. 2 при некоторых значениях μ_1 и Γ_1 ($S_1 = S(\mu_1, \Gamma_1)$). Не меняя $\Gamma = \Gamma_1$ (и не фиксируя β), уменьшим значение μ на $\Delta\mu_m = \mu_1 - \mu_2 > 0$, т. е. сдвинем S вправо от S_1 до S_m

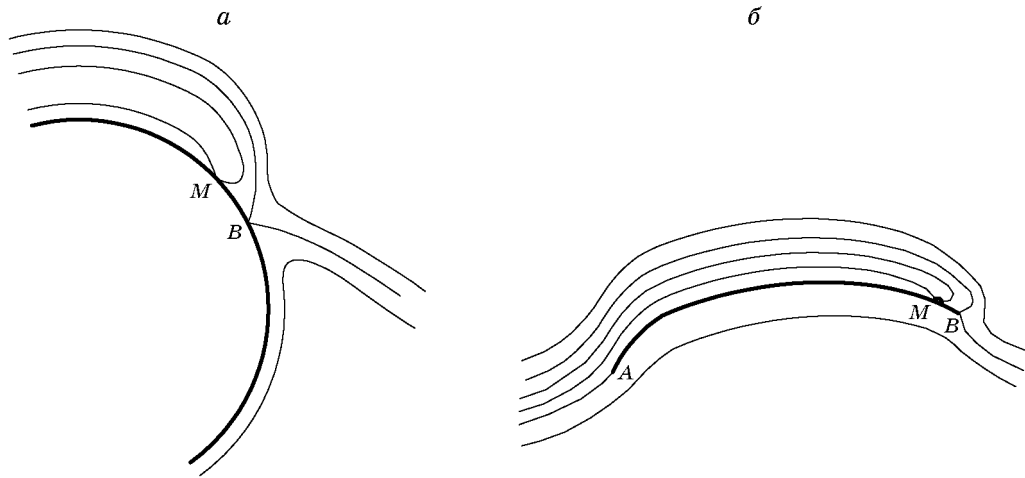


Рис. 3

(для данного решения использован индекс m). Из-за противоположного наклона касательной к S в точках A , B и в силу монотонности котангенсоиды G имеем $\gamma_{Bm} - \gamma_{B1} > \Delta\mu_m$, $\gamma_{Am} - \gamma_{A1} < \Delta\mu_m$. (Если β невелико и наклон S в точке A отрицательный, то $\gamma_{Am} < \gamma_{A1}$.) Следовательно, $\beta_m = \gamma_{Bm} - \gamma_{Am} > \gamma_{B1} - \gamma_{A1} = \beta_a$. Для получения заданного $\beta = \beta_a$ надо увеличить Γ от Γ_1 до некоторого значения Γ_2 (опуская S от S_1 до S_2) при том же значении $\mu = \mu_2$.

Если исходное решение удовлетворяет условию, аналогичному (5), то угол атаки уменьшается. При уменьшении μ циркуляция Γ увеличивается. Это возможно до тех пор, пока на интервале $\gamma_B < \gamma < 2\pi$ имеется участок, где $u < 0$. Следовательно, при заданных q , β_a максимум Γ для этой схемы достигается, когда кривые S и G касаются при $\gamma = \gamma_B$.

Таким образом, для увеличения Γ сток заданной интенсивности следует располагать на верхней поверхности как можно ближе к задней кромке, так чтобы “обратный ток” к стоку начинался от задней кромки, когда точки B и N совпадают. Из изложенного выше следует, что при приближении критической точки N к задней кромке B циркуляция Γ быстро увеличивается. В этом крайнем положении структура потока вблизи окружности показана на рис. 3, *a*, а вблизи острой задней кромки профиля — на рис. 3, *б*.

Можно считать, что введение стока вызывает увеличение искривления потока над профилем, как в случае роста циркуляции без стока. За счет увеличения модуля угла атаки (угол атаки отрицателен) поток вблизи передней части профиля искривляется вверх (сильнее, чем без стока), а вблизи задней — дополнительно вниз за счет стока. Несмотря на увеличение Γ , при стоке удается сохранить условия на острых кромках. Таким образом, подъемная сила увеличивается.

Следует отметить, что сток разгоняет поток на основной части верхней поверхности, а для нижней поверхности точка ветвления потока на задней кромке (рис. 3, *б*) выполняет функцию интерцептора, уменьшая скорость потока и увеличивая давление. Данный вывод о наиболее выгодном размещении стока как можно ближе к задней кромке согласуется с выводами работ [2–5].

Получим асимптотику приращения подъемной силы ΔY при введении стока для малых q . Для этого с учетом (1) оценим приращение $\Delta\Gamma = \Gamma_e(q) - \Gamma_0$, где $\Gamma_e(q)$ — значение Γ при “оптимальном” размещении стока q на дужке. При $q = 0$ кривая G вырождается в ось абсцисс, которую синусоида S пересекает в точках A и B на расстоянии $\gamma_B - \gamma_A = \beta_a$ под

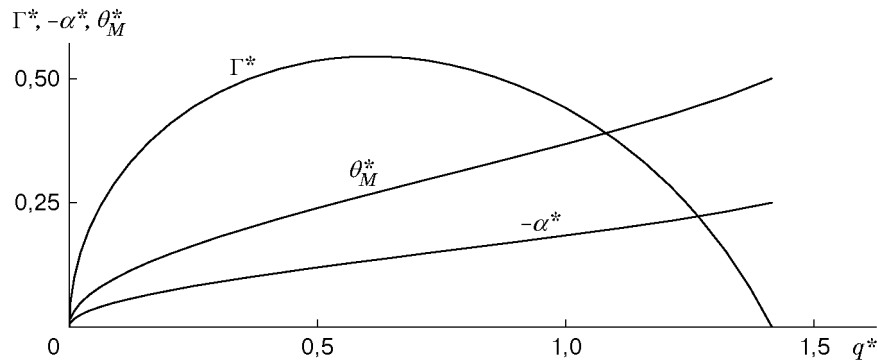


Рис. 4

одинаковыми углами

$$\left| \frac{du_S}{d\gamma} \right| = 2U_\infty \sin \frac{\beta_a}{2}.$$

При касании G и S и $q \rightarrow 0$ угол $\gamma \rightarrow 2\pi$, а ордината точки касания $u_G = u_S \rightarrow 0$. С точностью до малых высших порядков имеем

$$u_G = \frac{2q}{2\pi - \gamma}, \quad \frac{dU_G}{d\gamma} = -\frac{q}{2 \sin^2(\gamma/2)} \approx -\frac{2q}{(2\pi - \gamma)^2},$$

в точке касания G и S

$$\frac{du_S}{d\gamma} = \frac{du_G}{d\gamma} \approx -2U_\infty \sin \frac{\beta_a}{2}.$$

Отсюда $q/(2\pi - \gamma_B) = U_\infty \sin(\beta_a/2)$ и $u_G(\gamma_B) \approx 2\sqrt{qU_\infty \sin(\beta_a/2)}$. Для того чтобы точки A и B пересечения S с G по-прежнему находились на расстоянии $\gamma_B - \gamma_A = \beta_a$, при $q \neq 0$ кривая S должна располагаться ниже, чем при $q = 0$, на величину $\Delta\Gamma \approx u_G(\gamma_B)/2$. Следовательно, асимптотическое представление $\Delta\Gamma$ при малых q имеет вид

$$\Delta\Gamma \approx \sqrt{q} \sqrt{U_\infty \sin(\beta_a/2)}, \quad (6)$$

где $U_\infty = V_\infty h$.

С точностью до малых высших порядков коэффициент при \sqrt{q} не зависит от малого искривления дужки, т. е. к “классической” подъемной силе добавляется не зависящая от нее “стоковая” подъемная сила. “Классическая” подъемная сила при малых q также не зависит от q , что следует из построения S и G . Поэтому вклады в подъемную силу от искривления дужки и от стока в определенном смысле можно считать независимыми.

Нетрудно установить, что увеличение мощности стока q приводит к увеличению циркуляции Γ лишь до определенной величины, затем циркуляция уменьшается. Для каждой дужки существуют оптимальное значение q_* и положение стока μ_* , при которых Γ достигает максимума Γ_* .

Пример расчета. В качестве примера рассматривается профиль крыла в форме пластинки, позволяющий получить “чисто стоковую” подъемную силу. Для пластинки задается $\beta = \pi$, $h = L/4$ (L — длина пластинки). На рис. 4 представлены расчетные зависимости относительной циркуляции $\Gamma^* = \Gamma/U_\infty = 4\Gamma/(V_\infty L)$ и зависимости $\alpha^* = \alpha/\pi$, $\theta^* = \theta_M/\pi$ (α — угол атаки пластинки, $\theta_M = \gamma_M - \gamma_B$ — дуга на окружности от образа задней кромки до места стока) от $q^* = q/U_\infty = 4q/(V_\infty L)$. Видно, что кривая $\Gamma^*(q^*)$ соответствует асимптотике (6) вблизи начала координат и имеет максимум, после достижения которого убывает до нуля. В данном случае θ^* оказывается в два раза больше, чем $|\alpha^*|$.

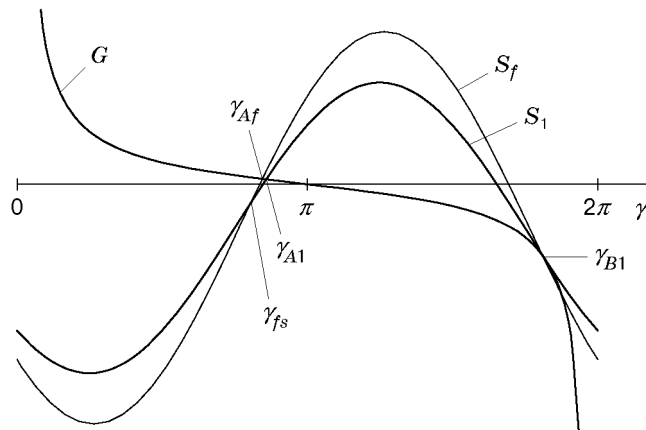


Рис. 5

Отметим, что на пластинке длиной L расстояние l от задней кромки до стока определяется формулой $l/L = (1 - \cos \theta_M)/2 = \sin^2(\theta_M/2)$, т. е. при небольших q будет мало.

Можно ожидать, что в случае дужек малого искривления величина добавочной подъемной силы за счет стока будет близка к рассчитанной для пластинки, т. е. сравнима с “классической” подъемной силой дужки. Так, для характеристик самолета ЯК-42 в предположении, что забор воздуха в двигатели осуществляется с крыла (сток по рассмотренной схеме), прирост подъемной силы соизмерим с величиной, получаемой по обычной схеме.

Об оптимальной форме дужки. Оптимальный профиль ищется в замкнутом множестве выпуклых вверх дужек с ограниченными длиной хорды L_{\max} и кривизной K_{\max} . При моделировании профилей крыла ограничимся простыми схемами, полагая, что дужки не слишком изогнуты ($K_{\max} < 2/L_{\max}$) и концы хорды (отрезка наибольшей длины, концы которого лежат на дужке) совпадают с концами дужки. Построение оптимального профиля проводится в три этапа.

Этап 1. Покажем, что профиль с максимальной подъемной силой из данного множества имеет максимально допустимую длину хорды L_{\max} . В отличие от случая отсутствия стока, где это очевидно, в данном случае необходимо доказательство.

Пусть имеется некоторая дужка l_1 с длиной хорды $L_1 < L_{\max}$, на которой при некотором значении q достигается подъемная сила Y_1 . Введем другую дужку l_2 , увеличивая дужку l_1 в L_2/L_1 раз ($L_1 < L_2 \leq L_{\max}$). Она также принадлежит данному множеству, поскольку ее кривизна уменьшилась. Так как преобразование l_1 в l_2 — преобразование подобия, то $h_2 = h_1 L_2/L_1 > h_1$ и $\beta_2 = \beta_1 < \pi$ (последнее неравенство следует из выпуклости дужек).

Покажем, что при том же значении q для стока (при правильном выборе его места) на дужке l_2 может быть получено значение Y_2 большее, чем Y_1 .

Пусть обтеканию дужки l_1 соответствуют кривые $G = G(q)$ и $S_1 = S_1(\mu_1, \Gamma_1, h_1)$ (рис. 5). Введем кривую $S_f = S(\mu_f, \Gamma_1, h_2)$, выбирая μ_f так, что S_f пересекает S_1 и G при $\gamma = \gamma_{B1}$. Вторая точка пересечения S_f и S_1 имеется при $\gamma_{fs} = \gamma_{B1} - \pi$ в силу равенства периодов и симметрии S_f и S_1 (их горизонтальные оси Γ_1 совпадают). Учитывая, что $\gamma_{A1} = \gamma_{B1} - \beta$ и $\beta < \pi$, получим $\gamma_{fs} < \gamma_{A1}$. На участке $\gamma_{fs} < \gamma < \gamma_{B1}$ кривая S_f находится над S_1 , и в соответствующей точке пересечения S_f и G будет $\gamma_{Af} < \gamma_{A1}$, откуда $\gamma_{B1} - \gamma_{Af} > \beta$.

Следовательно, можно построить кривую $S_2 = S(\mu_f, \Gamma_2, h_2)$, увеличивая Γ (т. е. опуская S_f), так чтобы для точек пересечения S_2 и G выполнялось равенство $\gamma_{B2} - \gamma_{A2} = \beta$. Так как $\Gamma_2 > \Gamma_1$, согласно (1) будет $Y_2 > Y_1$. Утверждение доказано.

ЭТАП 2. Покажем, что h растет с увеличением кривизны дужки. Пусть дужка l_2 получена из дужки l_1 увеличением кривизны на некотором участке. Так как длины хорд дужек фиксированы, а поворот и перенос дужки не влияют на величину h , можно считать, что у дужек l_1 и l_2 концы совпадают. Поскольку дужки выпуклые, при переходе от l_1 к l_2 прилегающие к концам участка (с неизменяющейся кривизной) должны повернуться “наружу”. Длина изменяемого участка должна увеличиться. Для простоты под увеличением кривизны понимается такое изменение, при котором наименьшая кривизна l_2 на данном участке больше наибольшей кривизны l_1 на нем.

Известно (см., например, [8]), что если в плоскости z рассматривается область, являющаяся внешностью некоторой замкнутой жордановой кривой, то $d = |f'(\infty)|$, где $z = f(\zeta)$ — функция, конформно отображающая внешность единичного круга в плоскости ζ на данную область, причем $f(\infty) = \infty$. Здесь d — трансфинитный диаметр этой области, определяемый соотношением

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{z_i, z_j} \frac{n(n-1)}{2} \sqrt{\prod_{i,j=1, i \neq j}^n |z_i - z_j|} \right), \quad (7)$$

z_i, z_j — произвольные точки внутри области, ограниченной кривой (или на данной кривой).

Рассматриваемый в настоящей работе случай удовлетворяет данному определению (h соответствует d), поэтому (7) также будет справедливо.

Между точками дужек l_1 и l_2 можно установить соответствие, такое что $|z_{2i} - z_{2j}| \geq |z_{1i} - z_{1j}|$. Тогда из (7) следует $d_2 \geq d_1$, т. е.

$$h_2 \geq h_1 \quad (8)$$

(видимо, можно установить строгое неравенство $h_2 > h_1$, но в данном случае это не требуется).

Последовательность приведенного доказательства предложена С. Р. Насыровым.

ЭТАП 3. Покажем, что Y растет с увеличением кривизны дужки. Известно [1], что для дужек, полученных “выдавливанием” одной из другой, в силу принципа Линделефа [9] имеет место неравенство

$$\beta_2 < \beta_1. \quad (9)$$

Это позволяет использовать тот же способ доказательства, что и на этапе 1. Из строгого неравенства в (9) (вместо равенства $\beta_2 = \beta_1$ на этапе 1) следует, что $Y_2 > Y_1$. При этом не требуется выполнения строгого неравенства в (8).

Таким образом, в рассматриваемом множестве наибольшей подъемной силой при заданном q и, следовательно, при отсутствии ограничений на q обладает дужка с максимальной длиной хорды и постоянной максимальной кривизной (т. е. дуга окружности).

Данный результат совпадает с полученным М. А. Лаврентьевым для дужки без стока [1]. Заметим, что в [1] рассмотрен и более сложный случай множества дужек ограниченной длины (а не длины хорды) и ограниченной кривизны (без требования выпуклости).

Сток на нижней поверхности. Сток на нижней поверхности характеризуется постоянным направлением (от A к B) и ограниченной величиной скорости на верхней поверхности. Используя те же подходы, что и в случае стока на верхней поверхности, нетрудно показать, что сток на нижней поверхности также может увеличить циркуляцию Γ , если его располагать вблизи носика. При этом угол атаки α увеличивается.

В данном случае действие стока можно объяснить следующим образом. Задняя часть профиля работает в основном так же, как и без стока. В этой части профиля действует

механизм образования циркуляции, обеспечивающий выполнение условия Кутты — Жуковского — Чаплыгина. Поэтому уже за счет увеличения угла атаки растет циркуляция Γ . Однако простое увеличение угла атаки нарушило бы условия натекания на переднюю кромку, где точка разветвления сместилась бы на нижнюю поверхность, но отсос корректирует натекание на переднюю кромку. При этом обеспечиваются необходимое искривление потока вверх перед профилем, разгон потока на верхней поверхности и уменьшение скорости (за стоком) на нижней. Однако попытка отыскания наилучшего расположения стока в данном случае не приводит к решению, соответствующему схеме обтекания профиля.

В заключение заметим, что при исследовании обтекания дужек с отбором потока остаются открытыми многие вопросы, в частности изучение иных схем отбора. Например, можно взять пластинку с нулевым углом атаки с двумя симметрично расположенными стоками спереди и сзади. Такая схема дает подъемную силу в $\sqrt{2}$ раз больше, чем при одиночном стоке (при одинаковой суммарной мощности стоков).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А.** Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1934.
2. **Лаврентьев М. А.** Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1990. С. 405–450.
3. **Технические записки ЦАГИ.** Жуковский, 1935. № 45: О работе крыла с отсасыванием пограничного слоя / В. В. Голубев.
4. **Голубев В. В.** Труды по аэрогидродинамике. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1957. С. 142–144.
5. **Некрасов А. И.** Отыскание профиля Жуковского при наличии на профиле источника и стока // Прикл. математика и механика. 1947. Т. 11, вып. 1. С. 41–54.
6. **Абзалилов Д. Ф., Ильинский Н. Б.** Об одной экстремальной задаче обтекания потоком идеальной несжимаемой жидкости гладкого замкнутого контура со стоком // Докл. РАН. 1997. Т. 354, № 1. С. 43–46.
7. **Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В.** Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994.
8. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
9. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 11/IX 2000 г.,
в окончательном варианте — 24/I 2001 г.*