

УДК 532.5:517.928.7

МЕТОД ОТОБРАЖЕНИЙ ПУАНКАРЕ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ЖИДКОМ СЛОЕ МЕЖДУ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

А. Г. Петров

Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

Исследование плоскопараллельного движения частиц несжимаемой среды сводится к исследованию гамильтоновой системы. Функцией Гамильтона является функция тока. Функция Гамильтона, периодически зависящая от времени, описывает периодический во времени процесс перемешивания несжимаемой среды в области. Перемешивание среды связывается с динамическим хаосом. Переход к динамическому хаосу изучается на основе анализа положения лагранжевых частиц в моменты времени, кратные периоду, — точек последования Пуанкаре. Множество точек последования Пуанкаре исследуется с помощью отображения Пуанкаре на фазовом потоке. Предлагается конструктивный метод построения отображений в параметрическом виде. Отображение строится в виде ряда по малому параметру. Показан ряд преимуществ параметрического метода по сравнению с методом производящих функций. Развитый метод применяется при исследовании движения частиц несжимаемой вязкой жидкости в слое между двумя круговыми цилиндрами. Внешний цилиндр неподвижен, а внутренний вращается относительно точки, не совпадающей с центрами обоих цилиндров. Найден оптимальный режим движения, при котором площадь области хаотизации максимальна.

Ключевые слова: гидродинамические системы, задача Коши, малый параметр, динамический хаос.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача Коши для уравнений Гамильтона системы с n степенями свободы:

$$\dot{\mathbf{X}} = H_{\mathbf{Y}}, \quad \dot{\mathbf{Y}} = -H_{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0, \quad H_{\mathbf{X}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}, \quad H_{\mathbf{Y}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Y}}, \quad (1.1)$$

где $H(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = H(t + T, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — произвольная достаточно гладкая T -периодическая функция; \mathbf{X}, \mathbf{Y} — n -мерные векторы.

В настоящее время общепринятого определения хаотических движений не существует. Для систем с одной степенью свободы можно дать геометрически простое определение хаоса, хотя и математически нестрогое. В этом случае гамильтониан системы можно трактовать как функцию тока течения несжимаемой среды. Гамильтонова система (1.1) определяет движение лагранжевых частиц среды. Введем несколько понятий, необходимых для определения хаоса лагранжевых частиц.

На траектории $\mathbf{X}(t, t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$, $\mathbf{Y}(t, t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$, определяемой из решения системы (1.1), рассмотрим положения точек $\mathbf{X}(t_n, t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$, $\mathbf{Y}(t_n, t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$, $t_n = t_0 + Tn$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в моменты времени, кратные периоду. Такие точки называются точками последования Пуанкаре (ТПП).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00567).

Для плоскопараллельного течения несжимаемой среды существует функция тока, которая и будет гамильтонианом системы. Траектория лагранжевой частицы среды найдется из решения задачи (1.1), а ТПП представляет собой след частицы при кино съемке с частотой кадров, соответствующей периоду T . ТПП образуют счетное множество точек на плоскости, которое зависит, вообще говоря, от $t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0$. Если множество ТПП принадлежит одномерной линии, то такая линия называется инвариантной кривой. При упорядоченном движении все множества ТПП образуют семейство инвариантных кривых. Движение, в котором множество ТПП заполняет двумерную область, будем называть хаотическим движением ТПП.

При периодической зависимости гамильтониана от времени множество ТПП может быть вычислено по рекуррентным формулам $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = P_{t_0}^T(\mathbf{X}_{n-1}, \mathbf{Y}_{n-1}) (P_{t_0}^{\Delta t} (\Delta t = t - t_0) —$ отображение на фазовом потоке системы (1.1), т. е. решение задачи (1.1)). Отображение за период $P_{t_0}^T$ называется отображением Пуанкаре.

Следует отметить, что приведенное выше определение хаотического движения не зависит от t_0 . Действительно, при изменении t_0 на $t_0 + \Delta t$, $0 < \Delta t < T$ множество ТПП преобразуется с помощью непрерывного отображения $P_{t_0}^{\Delta t}$. При этом одномерная линия или двумерная область переходит соответственно в одномерную линию или двумерную область. Если $\Delta t = kT$ кратно периоду, то отображение $P_{t_0}^{\Delta t} = P_{t_0}^{kT}$ переводит ТПП в себя. В противном случае Δt можно представить в виде $\Delta t = kT + \Delta t'$, $0 < \Delta t' < T$. Отображение $P_{t_0}^{\Delta t}$ тождественно отображению $P_{t_0}^{\Delta t'}$ и не меняет топологической структуры ТПП.

Для определенности выберем $t_0 = 0$, а при обозначении отображения Пуанкаре верхний и нижний индексы будем опускать: $P_0^T = P$.

Исследование хаотичности движения с помощью отображений Пуанкаре называют методом сечений Пуанкаре [1–4]. Так как определение отображения Пуанкаре является сложной вычислительной задачей, обычно ТПП находят численно, а аналитические методы применяются лишь для очень простых систем.

При исследовании систем с одной степенью свободы с гамильтонианом стандартной формы

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots, \quad (1.2)$$

где ε — малый параметр, используются следующие теоретические результаты. Известно, что автономная гамильтонова система (гамильтониан явно не зависит от времени) является интегрируемой. Лагранжевы частицы лежат на одномерных линиях тока $H(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = \text{const}$, и движение упорядоченное. Для неавтономной системы стандартного вида асимптотическая процедура метода усреднения [5, 6] позволяет построить для любого целого $k > 0$ близкую к тождественной каноническую замену переменных $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ так, что с точностью до малых порядка ε^{k+1} уравнения для новых переменных будут иметь вид автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $\bar{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Следует учесть принципиальную невозможность точного определения усредненного гамильтониана для любой гамильтоновой системы (1.1). Согласно теореме Нейштадта [7] последовательностью канонических замен гамильтониан системы можно привести к почти автономному виду $\bar{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + R(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $|R| < C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. Точное определение усредненного автономного гамильтониана возможно только для интегрируемых гамильтоновых систем. В общем случае улучшить оценку остаточного члена R нельзя.

При отсутствии экспоненциально малой добавки ($R = 0$) система имеет интеграл, и в случае одной степени свободы хаоса не наблюдается. Хаос вызывает экспоненциально малая величина $R(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$, которую методами усреднения определить невозможно. Поэтому

применение метода усреднения при исследовании перехода к хаотическим движениям в системах с одной степенью свободы не имеет смысла.

В соответствии с описанными результатами асимптотических методов имеет место следующая типичная картина нарастания хаоса в неинтегрируемых динамических системах при увеличении параметра ε . При достаточно малом ε множества ТПП лежат на инвариантных кривых $\dot{H}(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = \text{const}$, определяемых методами усреднения с точностью до $R = C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. В этом случае в силу малости R хаос практически незаметен. При некотором увеличении ε экспоненциальная добавка начинает проявляться, хаос становится заметным и площадь хаотизации достаточно быстро увеличивается с ростом ε .

Обычно появление хаоса связывают с существованием неустойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре [1–4, 8]. Неподвижной точке $P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ соответствует периодическое решение с периодом T , неподвижной точке $P^k(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — периодическое решение с периодом kT . Задача устойчивости по Ляпунову периодического решения сводится к решению задачи устойчивости неподвижной точки отображения с использованием метода показателей Ляпунова [3]. Поскольку аналитический вид отображения P неизвестен, показатели Ляпунова определяются численно. Ниже аналитически найдены отображение P и показатели Ляпунова в виде разложений по ε .

Доказательство хаотичности исходя из какого-либо строгого определения хаоса даже для системы с одной степенью свободы является чрезвычайно трудной задачей. Примеры доказательства хаотичности для некоторых простых отображений приведены в [9]. Для гамильтоновых систем для доказательства хаотичности используется теорема Мельникова [3], применение которой связано с вычислением достаточно сложного интеграла. Аналитическим методом Мельникова можно доказать хаотичность движений математического маятника с вибрирующей точкой подвеса. В этой системе с гамильтонианом, периодически зависящим от времени, имеется сепаратриса, представимая в простом аналитическом виде, что позволяет использовать теорему Мельникова. Обычно проверка хаотичности с помощью теоремы Мельникова или другим способом осуществляется достаточно громоздкими численными методами.

Некоторые достаточно простые гидродинамические системы исследованы в [8] с помощью численного определения ТПП. Практически не изучено движение вязкой жидкости в области, граница которой меняется со временем. В работе [10] исследуется движение частиц несжимаемых сред с различной реологией в тонком деформирующемся слое. На границах слоя принимаются условия отсутствия касательной скорости. Численные расчеты показали, что в такой системе при малых числах Рейнольдса хаос практически отсутствует.

В настоящей работе предложен конструктивный параметрический метод построения отображений на фазовом потоке гамильтоновой системы. Показаны преимущества параметрического метода по сравнению с известным методом производящих функций. Основными из них являются простота и высокая точность вычисления точек последования Пуанкаре в большом диапазоне параметров.

Развитая асимптотическая теория описания перехода к хаотическому движению использована при исследовании сильновязкой жидкости в тонком слое между двумя эксцентрически вращающимися цилиндрами.

2. Уравнения, определяющие отображение Пуанкаре. *Метод производящих функций.* Метод производящих функций используется для канонических преобразований [11, 12]. Этот метод можно применить и для построения отображения Пуанкаре. Для простоты рассмотрим задачу Коши (1.1) для системы с одной степенью свободы (хотя все результаты нетрудно обобщить на общий случай системы с n степенями свободы). Отображение $\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0 \rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}$, сохраняющее фазовый объем, представляется через дифферен-

пируемую функцию смешанных переменных $\mathbf{X}_0\mathbf{Y} + S(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y})$ (производящая функция) в виде соотношения

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}_0}. \quad (2.1)$$

При выполнении условия

$$1 + \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{X}_0 \partial \mathbf{Y}} > 0 \quad (2.2)$$

систему можно разрешить относительно \mathbf{X}, \mathbf{Y} . Результатом разрешения является отображение с якобианом, равным единице при любой функции S . Если производящую функцию S определить из уравнения Гамильтона — Якоби

$$S_t(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}) = H(t, \mathbf{X}_0 + S_{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}), \mathbf{Y}), \quad (2.3)$$

то отображение (2.1) будет решением гамильтоновой системы (1.1).

Для системы стандартного вида функция S представляется в виде ряда по степеням ε . Любое конечное число членов разложения определяет отображение, при котором фазовый объем сохраняется. В этом состоит преимущество метода производящих функций. Однако этот метод имеет также ряд существенных недостатков:

1. Отображения вида (2.1) не являются универсальными. (Например, поворот на 90° в виде (2.1) не представим. Для такого отображения нужно в производящей функции выбрать другую пару переменных, но в этих переменных нельзя представить тождественное преобразование [11].)

2. Условие разрешимости существенно сужает диапазон значений параметра ε . Кроме того, это условие неинвариантно по отношению к преобразованию поворота декартовых координат на фазовой плоскости.

Ниже предложена схема параметрического представления отображения, свободная от указанных недостатков.

Параметрический метод. Будем искать отображение $\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}$ с якобианом, равным единице, в параметрической форме $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}$ — двумерные векторы; $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ — начальная точка траектории; \mathbf{X} — точка траектории в момент времени t ; \mathbf{x} — некоторый вектор-параметр. Любое такое отображение можно представить в виде

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{x} - \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} + \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где $\Psi(t, \mathbf{x})$ — произвольная функция вектор-параметра и времени; I — симплектическая матрица;

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Якобианы обоих отображений (2.4) равны одной и той же функции:

$$J(t, \mathbf{x}) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{x}} \right) = 1 + \frac{1}{4} \det \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right), \quad (2.6)$$

поэтому якобиан суперпозиции отображений $\mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$ тождественно равен единице. Отображение (2.4) является аналогом (2.1), а условие (2.2) заменяется условием $J > 0$.

Для того чтобы отображение (2.5) являлось решением задачи Коши для уравнений Гамильтона, функция Ψ должна удовлетворять аналогу уравнения Гамильтона — Якоби (2.3)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \left(t, \mathbf{x} + \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad \Psi(t_0, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.7)$$

В координатной форме отображение (2.4) на плоскости имеет вид

$$X_0 = x - \Psi_y/2, \quad Y_0 = y + \Psi_x/2, \quad X = x + \Psi_y/2, \quad Y = y - \Psi_x/2. \quad (2.8)$$

Такая параметрическая форма отображения с якобианом, равным единице, получена в [13].

В соответствии с (2.8) уравнение (2.7) для функции $\Psi(t, x, y)$ записывается в виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\left(t, x + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, y - \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right), \quad \Psi(0, x, y) = 0.$$

Приведенные результаты лежат в основе асимптотического метода получения отображения Пуанкаре. Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема 1. *Отображение (2.4) является решением задачи (1.1) тогда и только тогда, когда функция Ψ является решением задачи (2.7).*

Теорема 1 является частным случаем более общей теоремы о параметризации канонических преобразований, которая доказывается ниже.

3. Параметрическая форма канонических преобразований. Общий результат параметризации канонической замены переменных в гамильтоновых системах сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть преобразование переменных $q, p \rightarrow Q, P$ записано в параметрической форме*

$$q = x - \Psi_y/2, \quad p = y + \Psi_x/2, \quad Q = x + \Psi_y/2, \quad P = y - \Psi_x/2. \quad (3.1)$$

Тогда:

1) *якобианы двух преобразований $q = q(t, x, y)$, $p = p(t, x, y)$ и $Q = Q(t, x, y)$, $P = P(t, x, y)$ тождественно равны:*

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(x, y)} = J(t, x, y);$$

2) *при $J > 0$ преобразование (3.1) переменных $q, p \rightarrow Q, P$ является каноническим, переводящим гамильтонову систему $\dot{H} = \tilde{H}(t, q, p)$ в гамильтонову систему $H = H(t, Q, P)$, если функция Ψ является решением уравнения*

$$\Psi_t(t, x, y) + \tilde{H}(t, q, p) = H(t, Q, P), \quad (3.2)$$

где аргументы q, p и Q, P в гамильтонианах H и \tilde{H} выражены через параметры x, y по (3.1).

Доказательство утверждения 2 проведем с помощью критерия каноничности, согласно которому дифференциальная форма $\delta F = P\delta Q - p\delta q - (\tilde{H} - H)\delta t$ является полным дифференциалом некоторой функции $\delta F(t, x, y) = F_t\delta t + F_x\delta x + F_y\delta y$ [11].

Подставляя в дифференциальную форму δF вместо q, p, Q, P их выражения (3.1) через параметры x, y и заменяя $H - \tilde{H}$ на Ψ_t согласно (3.2), после очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta F &= (y - \Psi_x/2)(\delta x + \Psi_{yt}\delta t/2 + \Psi_{yx}\delta x/2 + \Psi_{yy}\delta y/2) - \\ &\quad - (y + \Psi_x/2)(\delta x - \Psi_{yt}\delta t/2 - \Psi_{yx}\delta x/2 - \Psi_{yy}\delta y/2) - \Psi_t\delta t = \\ &= y(\Psi_{yt}\delta t + \Psi_{yx}\delta x + \Psi_{yy}\delta y) - \Psi_x\delta x - \Psi_t\delta t = \delta(y\Psi_y - \Psi), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 1 следует из того, что для канонической замены якобиан $\partial(Q, P)/\partial(q, p) = 1$. Здесь q, p, Q, P, x, y — n -мерные векторы. Поэтому описанный способ канонических замен справедлив для гамильтоновых систем произвольного порядка n .

В частном случае $\tilde{H} = 0$ переменные q, p являются начальной точкой $q = X_0, p = Y_0$ траектории $Q = X(t), P = Y(t)$ системы с гамильтонианом $H(t, X, Y)$. Таким образом, теорема 1 также доказана.

4. Асимптотический метод построения отображения Пуанкаре. Пусть гамильтониан имеет малый множитель ε (система стандартного вида) и представляется в виде степенного ряда (1.2). Тогда решение уравнения (2.7) с нулевым начальным условием представляется в виде ряда по степеням ε

$$\Psi = \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 + \varepsilon^3\Psi_3 + \dots \quad (4.1)$$

Для вычисления коэффициентов ряда подставим разложение (4.1) в правую часть уравнения (2.7). Разложим правую часть в ряд по степеням ε :

$$\begin{aligned} H(t, x + \Psi_{y,y}/2 - \Psi_x/2, \varepsilon) = & \varepsilon H_1 + \varepsilon^2(H_2 + H_{1x}\Psi_{1y}/2 - H_{1y}\Psi_{1x}/2) + \\ & + \varepsilon^3[H_3 + (H_{2x}\Psi_{1y} - H_{2y}\Psi_{1x} + H_{1x}\Psi_{2y} - H_{1y}\Psi_{2x})/2 + \\ & + (H_{1xx}\Psi_{1y}^2 - 2H_{1xy}\Psi_{1x}\Psi_{1y} + H_{1yy}\Psi_{1x}^2)/8] + \dots \end{aligned}$$

Для производных Ψ_n получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = H_1, \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = H_2 + \frac{1}{2}(H_{1x}\Psi_{1y} - H_{1y}\Psi_{1x}), \\ \frac{\partial\Psi_3}{\partial t} = H_3 + \frac{1}{2}(H_{2x}\Psi_{1y} - H_{2y}\Psi_{1x} + H_{1x}\Psi_{2y} - H_{1y}\Psi_{2x}) + \\ + \frac{1}{8}(H_{1xx}\Psi_{1y}^2 - 2H_{1xy}\Psi_{1x}\Psi_{1y} + H_{1yy}\Psi_{1x}^2), \dots \end{aligned}$$

Отсюда интегрированием по t с учетом условий $\Psi_n = 0$ при $t = 0$ коэффициенты ряда (4.1) выражаются через заданные коэффициенты ряда (1.2). Для отображения Пуанкаре за период T с точностью до малых третьего порядка получим

$$\Psi = \int_0^T \left[\varepsilon H_1(t, x, y) + \varepsilon^2 \left(H_2(t, x, y) - \frac{1}{2} \left\{ H_1(t, x, y), \int_0^t H_1(t', x, y) dt' \right\} \right) \right] dt, \quad (4.2)$$

где $\{f, h\} = f_y h_x - f_x h_y$ — скобка Пуассона.

Сходимость ряда (4.2) доказывается методом мажорант так же, как для общей системы дифференциальных уравнений стандартного вида [14]. Таким образом, отображение Пуанкаре является аналитической функцией по параметру ε , что согласуется с известной теоремой об аналитичности решения дифференциального уравнения по параметру.

Автономные гамильтоновы системы. Для автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(X, Y)$ процедура разложения в степенной ряд функции Ψ существенно упрощается. Решение уравнения (2.7) $\Psi(t, x, y)$ является нечетной функцией по аргументу t [15]. Это свойство можно использовать для упрощения вычисления ряда функции Ψ в случае гамильтониана стандартного вида $H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots$. Запишем формально гамильтониан в виде $H = \varepsilon \tilde{H}(X, Y, \varepsilon_1)$, $\tilde{H} = H_1 + \varepsilon_1 H_2 + \varepsilon_1^2 H_3 + \dots$. При $\varepsilon_1 = \varepsilon$ этот гамильтониан совпадает с исходным. В силу указанного свойства при $\varepsilon_1 = \text{const}$ решение (2.7) представляется в виде ряда по нечетным степеням εt

$$\Psi = (\varepsilon t)\tilde{\Psi}_1 + (\varepsilon t)^3\tilde{\Psi}_3 + (\varepsilon t)^5\tilde{\Psi}_5 + \dots$$

Коэффициенты этого ряда $\tilde{\Psi}_n(x, y, \varepsilon_1)$ вычисляются из уравнения (2.7) значительно проще, чем в общем случае. Так, для получения разложения с точностью до малых порядка $(\varepsilon t)^5$ нужно вычислить только два коэффициента, а не четыре, как в общем случае:

$$\Psi = (\varepsilon t)\tilde{H}(x, y, \varepsilon_1) + (\varepsilon t)^3[\tilde{H}_{xx}\tilde{H}_y^2 - 2\tilde{H}_{xy}\tilde{H}_x\tilde{H}_y + \tilde{H}_{yy}\tilde{H}_x^2]/8 + O(\varepsilon t)^5. \quad (4.3)$$

Чтобы получить окончательное разложение по степеням ε , нужно положить $\varepsilon = \varepsilon_1$ и подставить в (4.3) ряд $\tilde{H}(X, Y, \varepsilon) = H_1 + \varepsilon H_2 + \varepsilon^2 H_3 + \dots$

Поскольку неавтономную гамильтонову систему можно привести к автономной с повышением числа степеней свободы на единицу, процедуру получения отображения Пуанкаре для общей неавтономной системы можно свести к описанной процедуре для автономной системы. Существенные упрощения для автономной системы можно использовать, чтобы получить степенной ряд с бóльшим числом членов с менее громоздкими выкладками. Так, используя аналог формулы (4.3), получим отображение, на два порядка (по ε) точнее формулы (4.2).

Процедура усреднения. Процедура усреднения с помощью производящих функций описана в [5]. Использование параметрического метода для периодического по времени гамильтониана позволяет построить усредненный гамильтониан не менее эффективно. Примеры таких расчетов с точностью до ε^3 приведены в [10, 15, 16].

С точностью до ε^3 усредненный гамильтониан, умноженный на период T , и отображающая функция совпадают:

$$T\bar{H}(X, Y, \varepsilon) = \Psi(T, X, Y, \varepsilon). \quad (4.4)$$

(Для производящей функции такое простое соотношение в этом приближении не имеет места.) С учетом (4.2) из (4.4) получим известную формулу для усредненного гамильтониана в этом приближении [5]

$$\bar{H} = \frac{1}{T} \bar{\Psi} = \left\langle H - \frac{1}{2} \left\{ H, \int_0^t H dt \right\} \right\rangle + O(\varepsilon^3),$$

где выражение в угловых скобках означает среднее по периоду.

Аналогичные упрощения могут быть выполнены и в более высоких приближениях.

Таким образом, для вычисления коэффициентов асимптотических разложений усредненного гамильтониана параметрический метод эффективнее метода производящих функций [5].

5. Отображение малой области. Будем предполагать, что гамильтониан $H(t, X, Y, \varepsilon)$ является аналитической функцией координат X, Y , времени t и параметра ε . Как функция времени гамильтониан имеет период T . Координаты $X(t)$ и $Y(t)$ меняются в некоторой компактной области.

Согласно теории конечных деформаций [17] отображение малой окрестности точки \mathbf{X}_0 определяет матрица $A = \partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{X}_0$ (\mathbf{X} — радиус-вектор с координатами X, Y). Используя отображение (2.7), матрицу A можно выразить через производные отображающей функции $\Psi = \Psi(T, x, y, \varepsilon)$.

Согласно представлению (2.4) матрица A равна произведению обратной матрицы отображения $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}_0$ и матрицы отображения $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$:

$$A = \left(E - \frac{1}{2} I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{X}^2} \right)^{-1} \left(E + \frac{1}{2} I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{X}^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{X}^2} = \begin{pmatrix} \Psi_{xx} & \Psi_{xy} \\ \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \end{pmatrix}, \quad I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{X}^2} = \begin{pmatrix} \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{pmatrix}.$$

Используя тождество

$$\left(E - \frac{1}{2} I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{X}^2} \right)^{-1} = \frac{1}{J} \left(E + \frac{1}{2} I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{X}^2} \right),$$

матрицу A можно представить в виде

$$A = \frac{1}{J} \left[(2 - J) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{pmatrix} \right], \quad (5.1)$$

где J — якобиан, определяемый по (2.6).

Выразим компоненты матрицы локального отображения через вторые производные функции Ψ и для сравнения через вторые производные производящей функции, представив это отображение в виде (2.1):

$$A_{11} = \frac{2 - J}{J} + \frac{\Psi_{xy}}{J} = \frac{(1 + S_{XY})^2 - S_{XX}S_{YY}}{1 + S_{XY}}, \quad (5.2)$$

$$A_{12} = \frac{\Psi_{yy}}{J} = \frac{S_{YY}}{1 + S_{XY}}, \quad A_{21} = -\frac{\Psi_{xx}}{J} = -\frac{S_{XX}}{1 + S_{XY}}, \quad A_{22} = \frac{2 - J}{J} - \frac{\Psi_{xy}}{J} = \frac{1}{1 + S_{XY}}.$$

Отображение малой окрестности $(\delta X_0, \delta Y_0) \rightarrow (\delta X, \delta Y)$ с матрицей A имеет два независимых инварианта относительно поворотов системы координат:

$$I_1 = A_{11} + A_{22}, \quad I_2 = A_{12} - A_{21}.$$

Для параметрического отображения J и $\Delta\Psi = \Psi_{xx} + \Psi_{yy}$ также являются инвариантами, так как они выражаются через инварианты I_1 и I_2 :

$$J = 4/(I_1 + 2), \quad \Delta\Psi = 4I_2/(I_1 + 2).$$

Поэтому условие $J > 0$ существования параметрического отображения инвариантно и его можно представить в виде $I_1 + 2 > 0$. Напротив, условие существования отображения (2.2) с производящей функцией неинвариантно. С учетом последнего соотношения (5.2) условие $J > 0$ можно представить в виде $A_{22} > 0$. Выполнение неравенства $A_{22} > 0$ зависит от выбора системы координат.

Если параметрическое отображение и отображение (2.1) вычислены с одинаковой асимптотической точностью, то область существования параметрического отображения существенно шире области существования отображения (2.1). Более детальное сравнение этих отображений проведено ниже.

При исследовании перехода к хаотическому режиму для двумерных отображений инвариант I_1 и зависящий от него $J(I_1)$ выполняют основную роль. Характеристический множитель m является корнем характеристического многочлена $m^2 - I_1 m + 1 = 0$ и зависит только от I_1 или J .

Следует отметить, что в вырожденном случае при вычислении отображения до третьего порядка точности по (4.2) инвариант J определяется по формуле (2.6) с точностью до пятого порядка по ε . Это позволяет достаточно точно исследовать устойчивость неподвижной точки отображения и описать переход к хаотическому режиму.

По известной в аналитической геометрии теореме о полярном разложении матрица A представляется в виде произведения матрицы поворота и симметричной матрицы. В свою очередь поворотом системы координат симметричная матрица может быть приведена к главным осям. Таким образом, получим

$$A = C(\varphi)C(\varphi_0) \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} C(-\varphi_0), \quad l_1 l_2 = 1, \quad C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Отображение $\delta\mathbf{X} = A\delta\mathbf{X}_0$ преобразует единичный круг в эллипс той же площади с осями l_1, l_2 . Угол φ_0 определяет направление волокна в круге $|\delta\mathbf{X}_0| = 1$, которое при отображении максимально удлиняется. Угол φ определяет поворот этого волокна. С использованием (5.1) и (5.3) все перечисленные характеристики отображения можно выразить через элементы матрицы гессиана $\Psi_{xx}, \Psi_{xy}, \Psi_{yy}$.

Наибольшее и наименьшее удлинения волокон равны

$$l_1 = R + \sqrt{R^2 - 1}, \quad l_2 = R - \sqrt{R^2 - 1}, \quad R^2 = ((2 - J)^2 + (\Psi_{xx} + \Psi_{yy})^2)/(4J^2) + 1/2.$$

Приведем выражения для углов φ и φ_0 :

$$\operatorname{tg} \varphi = (A_{21} - A_{12})/(A_{11} + A_{22}), \quad \operatorname{tg} (\varphi + 2\varphi_0) = (A_{12} + A_{21})/(A_{11} - A_{22}).$$

Указанные выше характеристики $l_1, \varphi, m_1, \lambda_1$ также являются инвариантами и выражаются через два основных инварианта. Угол φ_0 не является инвариантом и зависит от выбора осей координат $\delta X, \delta Y$.

6. Преимущества метода параметрического отображения. В параметрическом методе функция $\Psi(t, x, y)$ играет роль производящей функции. Так же как в методе производящих функций, $\Psi(t, x, y)$ определяется из уравнения типа уравнения Гамильтона — Якоби.

Однако, как отмечено выше, параметрический метод имеет ряд преимуществ по сравнению с методом производящих функций:

1. Через производящую функцию нельзя выразить отображения простого вида. Например, через $S(X_0, Y)$ нельзя выразить поворот на 90° (отображение $X = Y_0, Y = -X_0$). С помощью функции $\Psi = x^2 + y^2$ и формул (2.8) это отображение параметризуется следующим образом:

$$X_0 = x - y, \quad Y_0 = y + x, \quad X = x + y, \quad Y = y - x.$$

Параметрическое представление является в этом смысле более предпочтительным.

2. Условие разрешимости (2.2), вообще говоря, зависит от выбора декартовой системы координат X, Y , тогда как в параметрическом методе условие $J > 0$ инвариантно по отношению к повороту координат X, Y .

3. В приближениях одинаковой точности по малому параметру ε диапазон значений параметра ε , при которых выполняется условие $J > 0$, существенно шире по сравнению с диапазоном значений ε , при которых выполняется условие $1 + \partial^2 S/\partial X_0 \partial Y > 0$.

4. Коэффициенты Ψ_n ряда $\Psi = \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \dots$ существенно меньше коэффициентов ряда S_n для производящей функции.

5. Для автономной системы функция Ψ представляется в виде ряда по нечетным степеням ε .

6. С точностью до ε^3 отображение за время t и усредненный гамильтониан связаны простым соотношением $\Psi = t\bar{H}(x, y)$.

Преимущества параметрического метода покажем на примере, в котором отображение находится точно.

Гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = \varepsilon[(X^2 + Y^2)/2 + Xb \sin(t_0 + t)].$$

Система уравнений точно интегрируется, и координаты X_n, Y_n точек последования в моменты времени $t_n = 2\pi n$ равны

$$\begin{aligned} X_n - X_c &= (X_{n-1} - X_c) \cos(2\pi\varepsilon) + (Y_{n-1} - Y_c) \sin(2\pi\varepsilon), \\ Y_n - Y_c &= -(X_{n-1} - X_c) \sin(2\pi\varepsilon) + (Y_{n-1} - Y_c) \cos(2\pi\varepsilon), \\ X_c &= [b\varepsilon^2/(1 - \varepsilon^2)] \sin t_0, \quad Y_c = [b\varepsilon/(1 - \varepsilon^2)] \cos t_0. \end{aligned}$$

Точки последования лежат на окружности с центром X_c, Y_c , угловое расстояние между ними равно $2\pi\varepsilon$.

В параметрическом методе

$$\Psi(x, y) = \operatorname{tg}(\pi\varepsilon)[(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2], \quad J = 1/\cos^2(\pi\varepsilon) > 0.$$

В методе производящих функций

$$\begin{aligned} S(X_0, Y) &= [(1 - \cos(2\pi\varepsilon))/\cos(2\pi\varepsilon)](X_0 - X_c)(Y - Y_c) + \operatorname{tg}(2\pi\varepsilon)[(X_0 - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2]/2, \\ 1 + S_{XY} &= 1/\cos(2\pi\varepsilon) > 0. \end{aligned}$$

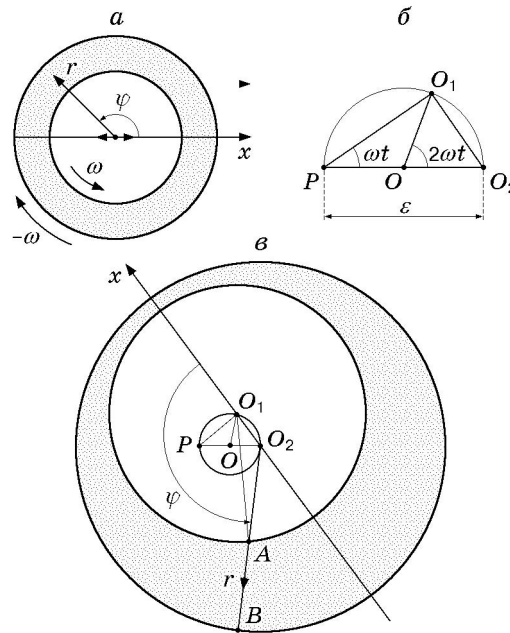


Рис. 1. Схема движения внутреннего цилиндра

Рассмотренный пример позволяет сделать следующие выводы:

а) радиусы сходимости рядов по степеням ε для Ψ , равные $1/\pi$, в два раза длиннее радиусов сходимости рядов для S (в параметрическом методе допускаются повороты, не превышающие 180° , а в методе производящих функций — не превышающие 90°);

б) коэффициент ряда Ψ_n примерно в 2^n раз меньше коэффициента S_n , соответственно для остаточных членов этих рядов r_n и R_n имеет место равенство $r_n = 2^{-n}R_n$.

Утверждения 1–6 легко проверяются.

Пример, рассматриваемый ниже, представляет собой достаточно сложную неинтегрируемую гидродинамическую систему уравнений, в которой параметрическим методом удастся описать переход к динамическому хаосу для достаточно больших значений параметра ε .

7. Нестационарное течение вязкой жидкости в слое между эксцентрически вращающимися цилиндрами. *Кинематика движения круговых цилиндров.* Рассматривается движение кругового цилиндра, расположенного внутри другого неподвижного кругового цилиндра. Оси обоих цилиндров расположены вертикально. На рис. 1 показано поперечное сечение цилиндров, представляющее собой область между двумя окружностями. Внешний круг и его центр O_2 неподвижны. Внутренний круг вращается с угловой скоростью 2ω , так что центр внутренней окружности O_1 описывает окружность с неподвижным центром O и радиусом $\varepsilon/2$. Угол $\angle O_1OO_2$ меняется со временем по закону $\angle O_1OO_2 = 2\omega t$. В прямоугольном треугольнике O_2O_1P $\angle O_1PO_2 = \omega t$, и, следовательно, расстояние между центрами меняется по гармоническому закону $|O_1O_2| = \varepsilon \sin(\omega t)$ (рис. 1, б). Линия центров (ось x) перпендикулярна катету O_1P и вращается с угловой скоростью ω . При движении цилиндров в системе координат с неподвижной линией центров (рис. 1, а) внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью ω , а его центр колеблется по закону $x = |O_1O_2| = \varepsilon \sin(\omega t)$. Внешний цилиндр в этой системе координат вращается в направлении, противоположном направлению вращения внутреннего цилиндра, со скоростью $-\omega$.

Пусть радиус внутреннего круга равен R , а радиус внешнего — $R + 1$. Вычислим расстояние AB между двумя окружностями при большом значении R . Для этого применим

теорему косинусов к треугольнику O_1O_2A (рис. 1, в):

$$|O_1O_2|^2 + |O_2A|^2 - 2|O_1O_2||O_2A|\cos\varphi = |O_1A|^2.$$

Подставляя $|O_1O_2| = \varepsilon \sin(\omega t)$, $|O_1A| = R$, $|O_2A| = R + 1 - |AB|$, получим уравнение относительно $|AB|$

$$\varepsilon^2 \sin^2(\omega t) + (R + 1 - |AB|)^2 - 2\varepsilon \sin(\omega t)(R + 1 - |AB|)\cos\varphi = R^2,$$

откуда

$$|AB| = 1 - \varepsilon \sin(\omega t)\cos\varphi + O(1/R). \quad (7.1)$$

Функция тока. Перейдем к решению задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в слое между двумя цилиндрами. Эта задача решена точно Н. Н. Петровым для случая осевого вращения. В приближении тонкого слоя ($R \gg 1$) А. Зоммерфельд (1904 г.) получил решение в случае, когда внутренний цилиндр вращается относительно своего центра, не совпадающего с центром внешнего цилиндра. Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин решили эту задачу, не предполагая слой тонким, в безынерционном приближении Стокса. Результаты опубликованы в 1887 и 1906 гг. [18]. Во всех рассмотренных случаях область течения не меняется со временем, течение стационарное, функция тока не зависит от времени. В этих случаях система уравнений движения частиц жидкости представляет собой интегрируемую систему. Частицы жидкости движутся по линиям тока, на которых функция тока постоянна. Динамический хаос в таких системах отсутствует.

В данном случае область течения меняется со временем, задача существенно нестационарна, функция тока (гамильтониан H) зависит от времени. Для решения этой задачи будем использовать асимптотическое приближение $R \gg 1$ теории смазочного слоя. Такой подход описан в работе [19, с. 534–542].

Функцию тока будем искать в виде зависимости $RH(t, \varphi, Y)$, $Y = R + 1 - r$, а компоненты скорости — в виде

$$v_\varphi = R\dot{\varphi} = R \frac{\partial H}{\partial Y}, \quad v_Y = \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad (7.2)$$

где r, φ — полярные координаты с началом в точке O_2 . В переменных φ, Y область течения есть $\varphi \in (0, 2\pi)$, $Y \in (0, Y_{\max})$, верхняя граница ее определяется уравнением (7.1):

$$Y_{\max} = |AB| = 1 - \varepsilon \sin(\omega t)\cos\varphi.$$

Уравнения движения жидкости при $R \gg 1$ имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial p}{R\partial \varphi} = \mu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial Y^2}.$$

Отсюда следует, что давление p зависит только от угла φ . Подставляя вместо составляющей v_φ ее выражение через функцию тока, получим уравнение

$$\frac{dp(\varphi)}{Rd\varphi} = \mu R \frac{\partial^3 v_\varphi}{\partial Y^3}. \quad (7.3)$$

На границах цилиндров выполняются условия прилипания

$$Y = 0: \quad H = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = -\omega; \quad (7.4)$$

$$Y = Y_{\max}: \quad -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial Y_{\max}}{\partial t} + \omega \frac{\partial Y_{\max}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = \omega. \quad (7.5)$$

Кроме того, необходимо потребовать однозначности функции давления $p(0) = p(2\pi)$. В силу (7.3) это условие запишется в виде

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 H}{\partial Y^3} d\varphi = 0. \quad (7.6)$$

Краевая задача (7.3)–(7.6) решается следующим образом. Вводя функцию расхода $Q(t, \varphi) = H(t, \varphi, Y_{\max})$, решение представим в виде

$$H = Q(t, \varphi)(3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) + \omega Y_{\max}[-\tilde{Y}(1 - \tilde{Y})^2 + \tilde{Y}^2(-1 + \tilde{Y})], \quad \tilde{Y} = Y/Y_{\max}.$$

В этом представлении функция тока удовлетворяет уравнению (7.3), краевым условиям (7.4) и второму условию (7.5). Подставляя в первое условие (7.5) выражение для H , получим уравнение сохранения массы в слое

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{\partial Y_{\max}}{\partial t} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим $Q = \varepsilon \omega \cos(\omega t) \sin \varphi + c(t)$. Из условия однозначности давления найдем $c(t) = 0$.

Таким образом, гамильтониан системы в приближении тонкого слоя имеет вид

$$H(t, \varphi, Y) = \omega \varepsilon \cos(\omega t) \sin \varphi (3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) + \omega(\tilde{Y} - \tilde{Y}^2)Y_{\max}. \quad (7.7)$$

8. Движение частиц вязкой жидкости в слое между эксцентрически вращающимися цилиндрами. Положения точек последования Пуанкаре φ_n, Y_n в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega$ находятся из решения задачи Коши для уравнений Гамильтона (7.2)

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad Y(0) = Y_0. \quad (8.1)$$

В эти моменты времени оси O_1 и O_2 внутреннего и внешнего цилиндров совпадают, а в переменных φ, Y область течения есть прямоугольник $\varphi \in [0, 2\pi)$, $Y \in (0, 1)$. На рис. 2 показаны точки последования Пуанкаре при различных значениях параметра ε , найденные численным решением уравнений (8.1) методом Рунге — Кутты. Точки соответствуют моментам времени $t_n = 2\pi n/\omega$, $n = 0, 1, \dots, 400$, когда центры окружностей O_1 и O_2 совпадают. На рис. 2 начальные точки последования Пуанкаре обозначены темными точками, неподвижные точки — кружками. При $\varepsilon = 0$ течение жидкости представляет собой простое сдвиговое течение Куэтта, точки движутся по прямым $Y = \text{const}$ (в полярных координатах это концентрические окружности). Уже при малых значениях ε фазовая картина осложняется и наблюдается переход к хаосу, который генерируется в точке $\varphi = \pi$, $Y = 1/2$. Следует отметить, что наибольшая площадь хаотизации достигается при $\varepsilon = 0,5$. При $\varepsilon > 0,5$ с увеличением ε в центре области течения растут две подобласти с инвариантными кривыми точек последования. Попадая в эти подобласти, точки последования из нее не выходят. Таким образом, наилучшее перемешивание достигается при $\varepsilon = 0,5$.

9. Отображение Пуанкаре. Для приведения гамильтониана (7.7) к стандартной форме сделаем две канонические замены, используя аппарат производящих функций.

Первой замене $\varphi, Y \rightarrow \tilde{q}, \tilde{p}$, отображающей область течения с криволинейными границами $\varphi \in [0, 2\pi)$, $Y \in (0, Y_{\max})$ на прямоугольник $\tilde{q} \in [0, 2\pi)$, $\tilde{p} \in (-1/2, 1/2)$, соответствует производящая функция

$$S_1(\varphi, \tilde{p}) = \left(\frac{1}{2} + \tilde{p}\right) \int_0^\varphi Y_{\max} d\varphi = \left(\frac{1}{2} + \tilde{p}\right)(\varphi - \varepsilon \sin(\omega t) \sin \varphi).$$

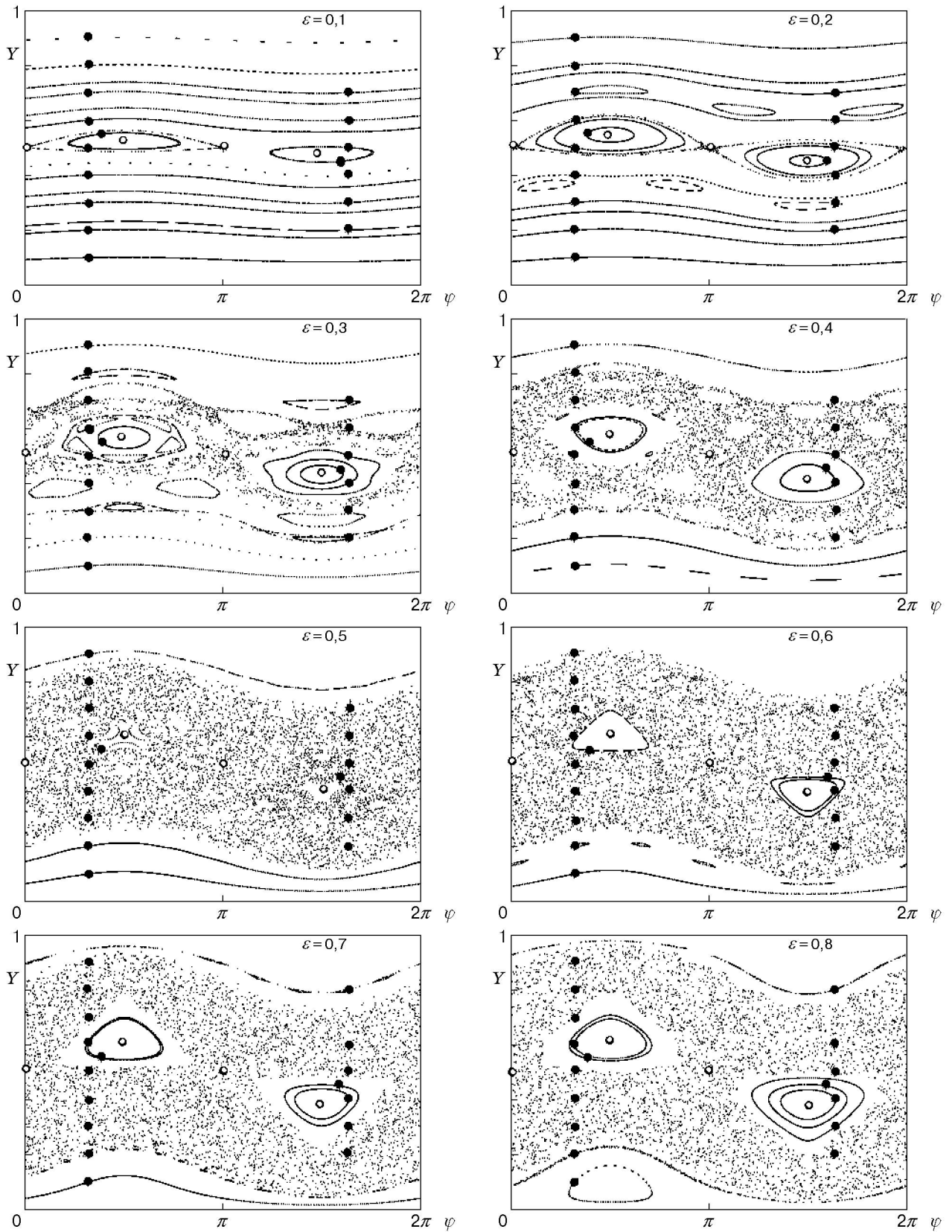


Рис. 2. Схема течения вязкой жидкости между эксцентрически вращающимися цилиндрами (численный расчет по уравнениям (8.1) методом Рунге — Кутты): темные точки — начальные точки последования Пуанкаре; кружки — неподвижные точки

По известным формулам [11] находим

$$\tilde{q} = \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = \varphi - \varepsilon \sin(\omega t) \sin \varphi, \quad Y = \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = \left(\frac{1}{2} + \tilde{p}\right) Y_{\max} \quad (9.1)$$

и гамильтониан в новых переменных

$$\tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p}) = \frac{\partial S_1}{\partial t} + H = -\omega \tilde{p}^2 + \varepsilon \omega \left(\tilde{p}^2 - \frac{1}{4}\right) (\sin(\omega t) \cos \varphi - 2\tilde{p} \cos(\omega t) \sin \varphi),$$

где зависимость $\varphi(t, \tilde{q})$ определяется первым уравнением (9.1).

Второй канонической замене $\tilde{q}, \tilde{p} \rightarrow q, p$, приводящей систему к стандартному виду, соответствует производящая функция $S_2(t, q, \tilde{p}) = \omega t \tilde{p}^2 - q \tilde{p}$. Формулы замены переменных и преобразованный гамильтониан имеют вид

$$\tilde{q} = -\frac{\partial S_2}{\partial \tilde{p}} = q - 2p\omega t, \quad p = -\frac{\partial S_2}{\partial q} = \tilde{p}, \quad (9.2)$$

$$\tilde{H}(t, q, p) = \varepsilon \omega F(t, \varphi, p), \quad F = (p^2 - 1/4)(\sin(\omega t) \cos \varphi - 2p \cos(\omega t) \sin \varphi).$$

Здесь φ как функция t, q, p определяется неявно из уравнения

$$\varphi - \varepsilon \sin(\omega t) \sin \varphi = q - 2p\omega t. \quad (9.3)$$

Уравнения движения частицы в переменных q, p имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \varepsilon \omega \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{2\omega t}{Y_{\max}} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \quad \dot{p} = -\frac{\varepsilon \omega}{Y_{\max}} \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \quad (9.4)$$

Из (9.3) можно найти частные производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{-2p\omega + \varepsilon \omega \cos(\omega t) \sin \varphi}{Y_{\max}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{1}{Y_{\max}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = -\frac{2\omega t}{Y_{\max}}$$

и полную производную

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Используя полученные формулы для производных, можно записать уравнения движения частицы (9.4) в исходных переменных φ, Y :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\omega t} &= -2p - 6 \frac{\varepsilon}{Y_{\max}} \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) \cos(\omega t) \sin \varphi, \\ \frac{dp}{d\omega t} &= \frac{\varepsilon}{Y_{\max}} \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) (\sin(\omega t) \sin \varphi + 2p \cos(\omega t) \cos \varphi), \\ Y &= (1/2 + p) Y_{\max}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Полученная система уравнений эквивалентна исходной (8.1). Из этой системы можно численно найти ТПП. При этом результат тождествен полученному выше.

Отображение Пуанкаре позволяет вычислять ТПП из рекуррентных соотношений. Используя описанный выше параметрический метод, построим отображение Пуанкаре с точностью до ε^3 . Для этого запишем разложение гамильтониана (9.2)

$$\tilde{H}(\tau, q, p) = \varepsilon \omega H_1 + \varepsilon^2 \omega H_2 + O(\varepsilon^3),$$

$$H_1 = (p^2 - 1/4)(\sin \tau \cos(q - 2p\tau) - 2p \cos \tau \sin(q - 2p\tau)),$$

$$H_2 = -(p^2 - 1/4)[\sin^2 \tau \sin^2(q - 2p\tau) + (1/2)p \sin 2\tau \sin(2(q - 2p\tau))], \quad \tau = \omega t$$

и применим формулу (4.2).

Для упрощения выкладок введем функцию

$$g(\tau, q, p) = \cos q - \cos \tau \cos (q - 2p\tau).$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} H_1 d\tau = \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)g(\tau, q, p).$$

Для первого приближения найдем

$$\begin{aligned}\Psi_1(q, p) &= (p^2 - 1/4)g(2\pi, q, p) = -2f(p) \sin Q, \\ f(p) &= (p^2 - 1/4) \sin (2\pi p), \quad Q = q - 2\pi p.\end{aligned}$$

Для второго приближения

$$\begin{aligned}\Psi_2(q, p) &= \Psi_{21}(q, p) + \Psi_{22}(q, p), \\ \Psi_{21}(q, p) &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ H_1, \int_0^\tau H_1 d\tau' \right\} d\tau, \quad \Psi_{22}(q, p) = \int_0^{2\pi} H_2 d\tau.\end{aligned}\tag{9.6}$$

С помощью тождеств

$$\begin{aligned}-\left\{ H_1, \int_0^\tau H_1 d\tau' \right\} &= \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2 (g_{\tau q} g_p - g_{\tau p} g_q) + 2p \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) (g_{\tau q} g - g_{\tau} g_q), \\ g_{\tau q} g_p - g_{\tau p} g_q &= -2 \sin q \frac{d}{d\tau} (\tau \cos \tau \sin Q) + 2(\cos \tau \sin Q)^2, \\ \int_0^{2\pi} (g_{\tau q} g_p - g_{\tau p} g_q) d\tau &= \pi(1 - 2 \cos (4\pi p)) + \left(2\pi - \frac{\sin(4\pi p)}{4p} \frac{8p^2 - 1}{4p^2 - 1}\right) \cos 2Q, \\ \int_0^{2\pi} (g_{\tau q} g - g_{\tau} g_q) d\tau &= 2\pi p - \sin (4\pi p)\end{aligned}$$

находим интегралы в (9.6) и функцию Ψ для отображения Пуанкаре:

$$\begin{aligned}\Psi(q, p) &= \varepsilon \Psi_1(Q, p) + \varepsilon^2 \Psi_2(Q, p) + O(\varepsilon^3), \quad \Psi_2(Q, p) = u(p) + v(p) \cos 2Q, \\ u(p) &= \pi(p^2 - 1/4)^2 (5/2 - \cos (4\pi p)) - p(p^2 - 1/4) \sin (4\pi p), \\ v(p) &= \pi(p^2 - 1/4)^2 - (p^2 - 1/4)(p^2 - 5/8) \sin (4\pi p)/(4p).\end{aligned}$$

С помощью (2.4) находим отображение Пуанкаре

$$q_0 = x - \Psi_y/2, \quad p_0 = y + \Psi_x/2, \quad q_1 = x + \psi_y/2, \quad p_1 = y - \psi_x/2,\tag{9.7}$$

которое позволяет вычислять координаты следующей точки последования Пуанкаре q_1, p_1 по координатам предыдущей точки q_0, p_0 . Исходные координаты ТПП находятся по формулам $\varphi_0 = q_0, \varphi_1 = q_1 - 4\pi p_1$.

Отображение (9.7) можно упростить, перейдя к новым переменным $Q_0 = q_0 - 2\pi p_0, Q_1 = q_1 - 2\pi p_1, x' = x - 2\pi y$:

$$Q_0 = x' - \Psi_y/2, \quad p_0 = y + \Psi_{x'}/2, \quad Q_1 = x' + \Psi_y/2, \quad p_1 = y - \Psi_{x'}/2.\tag{9.8}$$

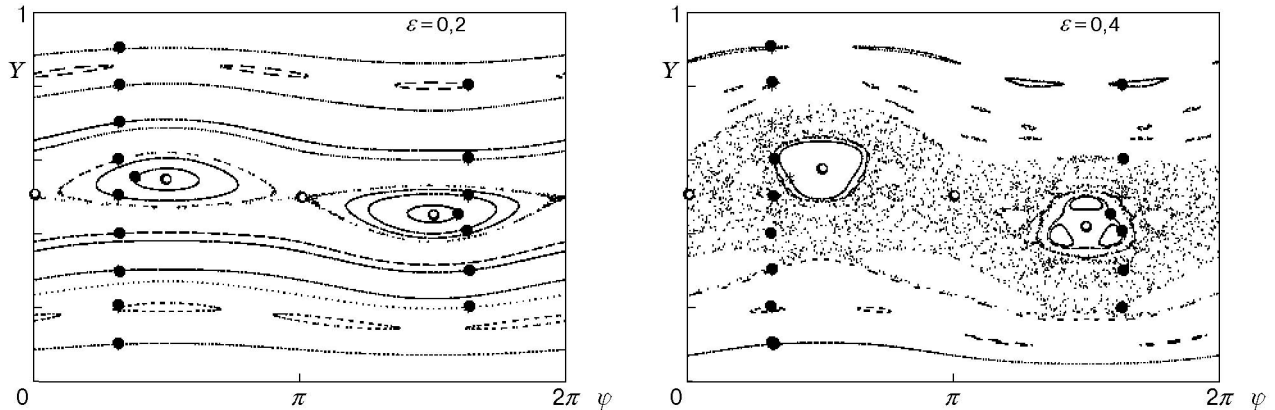


Рис. 3. Схема течения вязкой жидкости между эксцентрически вращающимися цилиндрами (асимптотическое решение по уравнениям (9.8)–(9.11)) (обозначения те же, что на рис. 2)

Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(x', y) &= \varepsilon \Psi_1(x', y) + \varepsilon^2 \Psi_2(x', y) + O(\varepsilon^3), \\ \Psi_1(x', y) &= -2f(y) \sin x', \quad \Psi_2(x', y) = u(y) + v(y) \cos 2x'. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Таким образом, искомое отображение Пуанкаре $\varphi_0, Y_0 \rightarrow \varphi_1, Y_1$ представляется в виде суперпозиции трех отображений.

Первое отображение $\varphi_0, Y_0 \rightarrow Q_0, p_0$ находится по формулам

$$p_0 = Y_0 - 1/2, \quad Q_0 = \varphi_0 - 2\pi p_0. \quad (9.10)$$

Второе отображение $Q_0, p_0 \rightarrow Q_1, p_1$ определяется в параметрическом виде по формулам (9.8) и (9.9). Третье отображение $Q_1, p_1 \rightarrow \varphi_1, Y_1$ определяется следующим образом:

$$Y_1 = p_1 + 1/2, \quad \varphi_1 = Q_1 - 2\pi p_1. \quad (9.11)$$

На рис. 3 приведены фазовые портреты ТПП при $\varepsilon = 0,2; 0,4$, найденные из решения алгебраических уравнений (9.8)–(9.11). Сравнение с соответствующими фазовыми портретами на рис. 2 показывает, что качественно они совпадают. Более того, положения неподвижных точек, обозначенных кружками, а также эллиптических (устойчивых неподвижных) и гиперболических (неустойчивых неподвижных) точек практически совпадают. Области хаотизации точек и их упорядоченного движения на рис. 2, 3 мало различаются. Таким образом, при $\varepsilon < 0,5$ точность функции (9.9) и полученного с помощью нее параметрического отображения достаточна для определения фазовых траекторий ТПП и описания перехода к хаосу.

10. Неподвижные точки отображения Пуанкаре. Фазовый портрет ТПП можно качественно описать, если найти неподвижные точки отображения и исследовать их устойчивость. В окрестности точек эллиптического типа ТПП лежат на замкнутых инвариантных кривых, близких к эллипсам. Такое движение является упорядоченным.

В окрестности точек гиперболического типа ТПП могут быть расположены хаотично.

Неподвижные точки можно найти аналитически с помощью отображения (9.8)–(9.11). Основные неподвижные точки определяются из системы уравнений $Y_0 = Y_1, \varphi_0 = \varphi_1$. Отсюда с помощью (9.8)–(9.11) получим

$$p_0 = p_1 = y, \quad Y_0 = Y_1 = 1/2 + y, \quad \varphi_0 = \varphi_1 = x'; \quad (10.1)$$

$$\Psi_{x'} = -2\varepsilon \cos x' (f(y) + 2\varepsilon v(y) \sin x') = 0, \quad (10.2)$$

$$\Psi_y - 4\pi y = \varepsilon^2 (u'(y) + v'(y) \cos 2x') - 2\varepsilon f'(y) \sin x' - 4\pi y = 0.$$

Система (10.2) эквивалентна двум системам уравнений

$$\cos x' = 0, \quad \varepsilon^2(u'(y) - v'(y)) - 2\varepsilon f'(y) \sin x' - 4\pi y = 0; \quad (10.3)$$

$$f(y) + 2\varepsilon v(y) \sin x' = 0, \quad \varepsilon^2(u'(y) + v'(y) \cos 2x') - 2\varepsilon f'(y) \sin x' - 4\pi y = 0. \quad (10.4)$$

Система (10.3) имеет два корня, которые можно получить с помощью асимптотических разложений по степеням y . Точки, соответствующие корням

$$\begin{aligned} x' = \pi/2, \quad \varepsilon = 4y + 104y^3, \quad y \in (0, 0,1), \\ x' = 3\pi/2, \quad \varepsilon = -4y - 104y^3, \quad y \in (-0,1, 0), \end{aligned} \quad (10.5)$$

обозначим через M_1 и M_2 . Из (10.5) с помощью (10.1) находим координаты φ, Y точек M_1 и M_2 . Система (10.4) при любых значениях ε имеет два решения:

$$x' = 0, \quad y = 0, \quad x' = \pi, \quad y = 0. \quad (10.6)$$

Точки, соответствующие этим решениям, обозначим через M_3 и M_4 . Кроме того, при $\varepsilon > 0,587$ система (10.4) имеет решения $\sin x' = -4,54y - 32,2y^3 + \dots$, определяемые асимптотическими разложениями $\varepsilon = 0,587 + 17,7y^2 + \dots$. Однако при $\varepsilon > 0,5$ найденное отображение неприменимо, поэтому последние решения не рассматриваются. Таким образом, решение (10.6) определяет еще две неподвижные точки M_3 и M_4 . Координаты φ, Y этих точек, как следует из (10.1) и (10.6), соответственно равны $(0, 1/2)$, $(\pi, 1/2)$ и не зависят от ε .

Найденные неподвижные точки соответствуют периодическим решениям уравнений Гамильтона с периодом $\omega t = 2\pi$. Существуют также серии неподвижных точек, соответствующих периоду $2\pi n$. Эти точки определяются из уравнений $\varphi_n = \pi_0 + 2\pi k$, $y_n = p_n - p_0$, их также можно найти аналитически. Ограничимся рассмотрением устойчивости найденных неподвижных точек (10.5) и (10.6).

В окрестности неподвижной точки имеем

$$\begin{aligned} dQ_1 &= A_{11}dQ_0 + A_{12}dp_0, & dp_1 &= A_{21}dQ_0 + A_{22}dp_0, \\ dQ_0 &= d\varphi_0 - 2\pi dp_0, & d\varphi_1 &= dQ_1 - 2\pi dp_1, \end{aligned}$$

где коэффициенты A_{ij} (см. (5.2)) выражаются через вторые производные параметрической функции $\Psi(x', y)$, определяемой по формуле (9.9). Вторая группа равенств следует из (9.10) и (9.11). Из этих линейных соотношений найдем

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= \tilde{A}_{11}d\varphi_0 + \tilde{A}_{12}dp_0, & dp_1 &= \tilde{A}_{21}d\varphi_0 + \tilde{A}_{22}dp_0, \\ \tilde{A}_{11} &= A_{11} - 2\pi A_{21}, & \tilde{A}_{12} &= A_{12} - 2\pi(A_{11} + A_{22}) + 4\pi^2 A_{21}, \\ \tilde{A}_{21} &= A_{21}, & \tilde{A}_{22} &= A_{22} - 2\pi A_{21}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Первый инвариант отображения (10.7) имеет вид

$$I = \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} = A_{11} + A_{22} - 4\pi A_{21}.$$

Коэффициенты матрицы выразим через найденную в (9.9) функцию Ψ с помощью формул (5.2):

$$I = 2(2 - J)/J + 4\pi\Psi_{xx}/J. \quad (10.8)$$

Характеристическое уравнение $m^2 - Im + 1 = 0$ при $|I| \leq 2$ имеет комплексные корни, модуль которых равен единице. В этом случае неподвижные точки устойчивы (точки эллиптического типа). С учетом (10.8) условие устойчивости имеет вид

$$\begin{aligned}
 -1 \leq \pi \Psi_{x'x'} = 2\pi \varepsilon f(y) \sin x' - 4\pi \varepsilon^2 v(y) \cos 2x' \leq J - 1, \\
 J - 1 = (\Psi_{xx} \Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2) / 4.
 \end{aligned}
 \tag{10.9}$$

Исследуем устойчивость неподвижных точек M_1 и M_2 (см. (10.5)). С использованием разложений $f(y) = -(\pi/2)y + (2\pi + \pi^3/3)y^3 + \dots$, $v(y) = -(3/32)\pi + ((3/8)\pi + (5/12)\pi^3)y^2 + \dots$ условие (10.9) принимает вид $-1 \leq -10(\pi y)^2$. Отсюда следует, что при $0 \leq y \leq y_0 \approx 1/(\pi\sqrt{10}) \approx 0,1$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \approx 0,505$ точка $M_1(\pi/2, 1/2 + \varepsilon/4 + O(\varepsilon^3))$ устойчива. Вторая симметрично расположенная неподвижная точка $M_2(3\pi/2, 1/2 - \varepsilon/4 + O(\varepsilon^3))$ устойчива при тех же значениях параметра ε . Эти неподвижные точки, полученные в численных экспериментах, на рис. 2 обозначены кружками. При $\varepsilon = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ точки являются точками эллиптического типа. В их окрестности ТПП расположены на замкнутых инвариантных кривых. При $\varepsilon = 0,5$ неподвижные точки M_1 и M_2 теряют устойчивость, ТПП хаотично заполняют почти всю область течения.

Устойчивость неподвижных точек M_3 и M_4 (см. (10.6)) исследуется аналогично. Вычисляем вторые производные Ψ в этих точках:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{xx} = -4\varepsilon^2 v(0) = 3\pi \varepsilon^2 / 8, \quad \Psi_{yy} = \varepsilon^2 (u''(0) + v''(0)) = \varepsilon^2 (5\pi/4 + 11\pi^3/6) = 60,8\varepsilon^2, \\
 \Psi_{xy} = 2\varepsilon f'(0) = -\varepsilon\pi, \quad J - 1 = -2,467\varepsilon^2 + 17,9\varepsilon^4.
 \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в условие устойчивости, получим $-1 \leq 3,7\varepsilon^2 < -2,47\varepsilon^2 + 17,9\varepsilon^4$. Отсюда следует, что неподвижные точки $M_3(0, 1/2)$ и $M_4(\pi, 1/2)$ неустойчивы при $\varepsilon < 0,587$, т. е. являются точками гиперболического типа. При $\varepsilon > 0,587$ эти точки устойчивы, однако отображение (9.8)–(9.11) при $\varepsilon > 0,5$ неприменимо.

Численные расчеты соответствуют полученным теоретическим выводам. На рис. 2 неподвижные точки M_3 и M_4 , обозначенные кружками, являются точками гиперболического типа. При малых ε хаос появляется в малых окрестностях этих точек. Области хаотизации увеличиваются с увеличением ε . При $\varepsilon \approx 0,5$ площадь хаотизации максимальна. В этом случае все неподвижные точки M_1, M_2, M_3, M_4 неустойчивы.

Заключение. Движение частиц вязкой жидкости в слое между эксцентрически вращающимися цилиндрами (см. рис. 1) описывается уравнениями Гамильтона (9.5). При малом эксцентриситете ($\varepsilon \leq 0,2$) ТПП расположены на инвариантных кривых (см. рис. 2) и хаос не наблюдается. Отображение Пуанкаре на периоде имеет четыре неподвижные точки (см. рис. 2): две эллиптические $M_1(\pi/2, 1/2 + \varepsilon/4)$, $M_2(3\pi/2, 1/2 - \varepsilon/4)$ при $\varepsilon < 0,5$ и две гиперболические $M_3(0, 1/2)$, $M_4(\pi, 1/2)$ при любых ε . В окрестности гиперболических точек динамический хаос наблюдается при $\varepsilon > 0,2$. Площадь области хаотизации ТПП увеличивается с увеличением ε до значения $\varepsilon \approx 0,5$. При $\varepsilon = \varepsilon_0 \approx 0,5$ точки M_1 и M_2 становятся гиперболическими за небольшой промежуток времени $\Delta\varepsilon$. В этот момент площадь области хаотизации максимальна. При $\varepsilon > \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ точки M_1 и M_2 вновь становятся эллиптическими. В их окрестности движение упорядоченное, а площадь хаотизации соответственно уменьшается.

Аппарат параметрических отображений Пуанкаре позволяет эффективно вычислять неподвижные точки, исследовать их устойчивость и описывать переход к хаосу. Фазовые портреты ТПП, полученные с помощью вычисленного отображения Пуанкаре, хорошо согласуются с результатами численных экспериментов (см. рис. 3).

Рассмотренный пример представляет собой математическую модель миксера для перемешивания сред с большой вязкостью. Наилучшее перемешивание достигается при $\varepsilon \approx 0,5$.

Автор выражает благодарность Д. М. Климову и В. Ф. Журавлеву за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Заславский Г. М.** Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1983.
2. **Лихтенберг А., Либерман М.** Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
3. **Труды** института инженеров по электронике и радиоэлектронике. 1987. Т. 75, № 8: Хаотические системы.
4. **Шустер Г.** Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
5. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
6. **Журавлев В. Ф., Климов Д. М.** Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
7. **Нейштадт А. И.** О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 197–204.
8. **Ottino J. M.** The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
9. **Кроновер Р. М.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000.
10. **Петров А. Г.** О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 2000. № 4. С. 12–17.
11. **Журавлев В. Ф.** Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 1997.
12. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
13. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. Т. 2.
14. **Джакалья Г. Е. О.** Методы возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979.
15. **Петров А. Г.** Об усреднении гамильтоновых систем // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 19–33.
16. **Петров А. Г.** Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом // Докл. РАН. Механика. 1999. Т. 368, № 4. С. 483–488.
17. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1.
18. **Жуковский Н. Е.** Полное собрание сочинений. Т. 3. Гидравлика. Прикладная механика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. С. 121–133.
19. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.

Поступила в редакцию 8/VII 2002 г.
