

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РЕЛАКСАЦИОННЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

А.Ф. Мاستрюков, Б.Г. Михайленко

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6, Россия*

В работе представлен спектральный метод решения двумерных уравнений Максвелла с релаксацией электромагнитных параметров среды. Метод основан на разложении решения уравнений по функциям Лагерра во временной области. Для производных по пространству используется разностная аппроксимация 4-го порядка точности. Уравнения Максвелла сводятся к системе линейных алгебраических уравнений для гармоник решения, в которой от номера гармоники зависит только правая часть, а матрица системы одна и та же для всех гармоник. Это используется для повышения эффективности численного алгоритма.

Приводятся оценки для выбора наиболее оптимального значения свободного параметра предлагаемого метода.

Показано, что на больших длинах пробега волны метод Лагерра обеспечивает точность выше, чем конечно-разностный метод второго порядка точности.

Метод устойчив как в волновой области распространения поля, где проводимость близка к нулю и где спектральный метод Фурье неустойчив, так и в диффузной области распространения поля, где проводимость велика и явный конечно-разностный метод требует очень малого шага по времени.

Уравнения Максвелла, электромагнитные волны, время релаксации, диэлектрическая проницаемость, метод Лагерра.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN MEDIA WITH RELAXATION: NUMERICAL MODELING USING LAGUERRE TRANSFORM

A.F. Mastryukov and B.G. Mikhailenko

We model propagation of electromagnetic waves in frequency-dependent media applying the Laguerre transform in time domain. The new algorithm is fourth-order accurate in space and computationally efficient. Maxwell's equations are reduced to a harmonic series of linear algebraic equations in which only the right side depends on the harmonic number and the inverse matrix is the same for all harmonics.

The efficiency of computation for the algebraic equations is improved by fitting the free parameter of the Laguerre transform. The value of this parameter is easy to find and is likewise the same for all harmonics.

The Laguerre scheme provides a better accuracy than the second-order accurate finite-difference solution at large path lengths.

The method is stable both in the region of the wavefield where conductivity approaches zero and the spectral Fourier method is unstable and in the high-conductivity region where the explicit FDTD code requires a too small time step.

Maxwell's equations, electromagnetic waves, relaxation time, dielectric permittivity, Laguerre transform

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1, 2], такие электромагнитные явления, как ток проводимости или поляризация среды, носят инерционный характер и могут быть обусловлены различными физическими механизмами. Например, в ионизированном газе электрический ток создается переносом и электронов, и ионов. Соответственно время инерции, релаксации для электронов и ионов существенно различно. Число физических механизмов может достигать нескольких десятков, а времена релаксации различаться на несколько порядков. Так, для соленой воды времена релаксации для разных физических механизмов возникновения тока проводимости меняются от 10^{-9} секунды до сотен минут.

При рассмотрении динамики электромагнитных волн необходимо учитывать зависимость параметров среды от времени в случае, когда характерное время волны, длительность электромагнитного импульса или его частота сравнимы со временем релаксации электромагнитных параметров. Для кристаллов учет релаксации необходим для частот выше 10^9 Гц, для соленой воды — уже при частотах, начиная с 1 Гц и выше. Диапазон частот зависит от того, насколько точно решается задача и, соответственно этому, какие физические механизмы учитываются.

Учет процессов релаксации необходим в задачах оптики, задачах нагрева и диагностики плазмы. Электромагнитные волны такого диапазона применяются для зондирования ионосферы, верхних слоев

поверхности Земли, в разведочной геофизике, в системах космического мониторинга поверхности Земли, в системах экологического контроля окружающей среды [2, 3].

Существуют разные математические модели представления релаксационных процессов. Подавляющее большинство из них задают диэлектрическую проницаемость и проводимость среды в виде неявных функций от времени. Можно выделить дифференциальные и интегральные формы представления, где для задания параметров среды вводятся дополнительные переменные, которые задаются в виде дифференциальных или интегральных уравнений соответственно. Для разных физических механизмов релаксационных процессов адекватными, естественно, являются разные формы представления, и поэтому возможна и комбинация дифференциальной и интегральной форм. В конечном итоге система уравнений для сред с релаксацией может быть и системой чисто дифференциальных уравнений, и системой интегродифференциальных уравнений.

При численном решении такой системы эффективность и точность решения будут существенно зависеть от типа уравнений. Конечно-разностный метод решения интегродифференциальной системы является неэффективным и зачастую неустойчивым. Для чисто дифференциальной системы он очень прост при программной реализации и широко используется [4—6]. В то же время он имеет ограничение (как и все явные конечно-разностные методы) на величину шага разностной сетки по времени. В задачах с сильно изменяющимися в пространстве электромагнитными параметрами (такими, как проводимость, величина которой может меняться от нуля для воздуха до 10^4 См/м для таких природных минералов, как пирит и магнетит) это ведет к большим вычислительным затратам. В этом случае можно использовать преобразование Фурье. Но спектральный метод, основанный на разложении Фурье по времени, при некоторых параметрах среды [7] также оказывается неустойчивым.

В последние годы были разработаны различные численные методы решения уравнений Максвелла с релаксацией. В работе [8] был предложен конечно-разностный метод решения уравнений Максвелла с релаксационной диэлектрической проницаемостью в интегральной форме. В работе [9] был рассмотрен конечно-разностный метод, где диэлектрическая проницаемость представлялась в виде суммы функций Дебая, и уравнения в частотной области имеют дифференциальный вид. Псевдоспектральный метод, учитывающий релаксацию как проводимости, так и диэлектрической проницаемости, описан в работе [10]. Электромагнитные параметры среды представляются в виде интегралов свертки с релаксационными функциями. После этого интегралы свертки представлены в виде суммы релаксационных механизмов. В работе [4] предложена обобщенная формулировка уравнений Максвелла в среде с частотной зависимостью параметров уравнений.

В настоящей работе для решения уравнения Максвелла в средах с релаксацией предлагается другой спектральный метод, основанный на разложении решения по полиномам Лагерра во временной области. Этот метод для таких задач устойчив и достаточно эффективен. Эффективность метода обусловлена тем, что у получающейся после преобразования системы уравнений для гармоник Лагерра левая часть системы не зависит от номера гармоники, а меняется только правая часть этой системы. Это можно использовать при построении численного алгоритма, и это является основным достоинством метода.

Впервые он использован в работах [11, 12] для решения волнового уравнения и задач сейсмологии с релаксацией упругих параметров среды. В работе [7] этот метод использовался для решения одномерных уравнений Максвелла в средах с релаксацией электромагнитных параметров среды. Здесь проводилось преобразование Лагерра по времени, а пространственные производные аппроксимировались конечными разностями 4-го порядка точности. В результате дифференциальные уравнения сводились к системе линейных алгебраических уравнений для гармоник Лагерра с ленточной матрицей. Матрица является действительной с небольшой шириной ленты, равной числу дифференциальных уравнений. Это позволяло использовать прямые методы решения алгебраической системы уравнений, при этом надо обращать только одну матрицу, поскольку она одна для всех гармоник. В конечном итоге этот метод по эффективности не уступал явному конечно-разностному методу и в несколько раз превосходил метод Фурье.

В настоящей работе представлено применение разложения Лагерра для численного решения двумерных уравнений Максвелла в среде с релаксацией. По времени проводилось преобразование Лагерра, пространственные производные аппроксимировались конечными разностями 4-го порядка точности. Получающаяся здесь матрица системы линейных алгебраических уравнений для гармоник решения является ленточной, но в отличие от одномерного случая ширина ленты очень велика. Она сравнима с числом точек разностной сетки по пространственным переменным. Это не позволяет использовать прямые методы решения системы алгебраических уравнений. Для решения системы алгебраических уравнений использовались итерационные методы решения. Эффективность метода достигалась за счет введения дополнительных параметров в формулу для преобразования Лагерра.

Точность метода иллюстрируется сравнением численного решения с точным решением и решением конечно-разностным методом. Приводятся оценки наиболее оптимальных для эффективности значения параметров разложения Лагерра. Указана область параметров уравнений Максвелла, при которых этот

предложенный метод имеет преимущество перед конечно-разностным методом и спектральным методом Фурье.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_s, \\ \nabla \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}\quad (1)$$

где \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{D} — электрическая индукция, \mathbf{J} — ток проводимости, \mathbf{J}_s — ток внешнего источника, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ — магнитная индукция.

Будем полагать, что магнитная проницаемость постоянна во времени, а релаксационные свойства среды задаются зависимостью от времени диэлектрической проницаемости и проводимости, связь электрической индукции и тока проводимости с напряженностью электрического поля выражается соотношениями [4, 5]

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} * \mathbf{E}, \\ \mathbf{J} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} * \mathbf{E},\end{aligned}\quad (2)$$

где знак * означает свертку.

Для большого числа реальных сред одновременно присутствуют разные механизмы релаксации, которые в сумме обуславливают поляризацию или ток проводимости. Математически они выражаются различными формулами, зачастую сложными или неудобными для численных алгоритмов. Здесь использовались математические модели релаксационных функций, применяемых в акустике. Они удобны при конечно-разностных методах решения задач.

Исходя из аналогии с акустикой, зависимость от времени диэлектрической проницаемости задается в виде [4] суммы релаксационных функций

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_s \left(1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \exp(-t/\tau_{Dl}) \right) H(t), \quad (3)$$

где τ_{El} — время релаксации напряженности электрического поля, τ_{Dl} — время релаксации электрической индукции, τ_s — время релаксации проводимости, характеризующее сдвиг по фазе проводимости, L — число механизмов релаксации.

Здесь каждый механизм характеризуется двумя временами релаксации τ_p , τ_s . Подобная же модель используется в акустике для представления процессов поглощения волн. Тело с такой моделью называется стандартным линейным телом.

Зависимость от времени проводимости среды бралась в виде

$$\sigma(t) = \sigma_s (H(t) + \tau_\sigma \delta(t)), \quad (4)$$

где ε_s — статическое значение диэлектрической проницаемости, σ_s — статическое значение проводимости, $H(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, $\delta(t)$ — дельта-функция. В акустике тело с этой моделью релаксации называется телом Кельвина—Фойгта.

При таком определении $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ выражения для тока смещения и тока проводимости имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_s \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_s \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\tau_{Dl}} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \mathbf{E} + \varepsilon_s \sum_{l=1}^L \mathbf{m}_l, \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} * \mathbf{E} = \sigma_s \left(\mathbf{E} + \tau_\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{m}_l = -\frac{1}{L} \left(\frac{1}{\tau_{Dl}^2} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \exp(-t/\tau_{Dl}) H(t) \right) * \mathbf{E}. \quad (7)$$

Здесь важно отметить, что выбор моделей для $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ в виде (3) и (4) существенно важен для конечно-разностного метода решения, поскольку он приводит к удобному для численной реализации виду. Для решения с использованием разложения Лагерра это менее важно, так как в этом случае выражения (2) для свертки двух функций сводятся к простой сумме произведений гармоник Лагерра от этих функций, и здесь можно использовать значительно больше видов моделей релаксации.

В двумерном случае уравнения Максвелла (ТЕ-мода) принимают вид

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon^e \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma^e E_y + \varepsilon_s \sum_{l=1}^L m_l + J_y, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial m_l}{\partial t} = -\left(\frac{m_l}{\tau_{Dl}} + \frac{1}{\tau_{Dl}^2} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \right) E_y. \quad (11)$$

Здесь введены эффективные значения диэлектрической проницаемости ε^e и проводимости σ^e

$$\varepsilon^e = \varepsilon_s \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) + \sigma_s \tau_\sigma, \quad (12)$$

$$\sigma^e = \sigma_s + \varepsilon_s \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\tau_{Dl}} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \right), \quad (13)$$

и J_y – y компонента внешнего источника.

Отметим, что учет L механизмов релаксации приводит к дополнительным L уравнениям и это существенно, поскольку L может быть велико, $L \gg 1$.

В дальнейшем, для простоты, будем полагать, что есть только один механизм релаксации, $L = 1$, и потому будем опускать индекс l в уравнениях.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАГЕРРА

Будем использовать преобразование Лагерра в форме [12]

$$\phi_n = \int_0^\infty \phi(t) (ht)^{-\alpha/2} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (14)$$

$$\phi(t) = (ht)^{\alpha/2} \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n l_n^\alpha(ht), \quad (15)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ — ортогональная функция Лагерра степени n :

$$\int_0^\infty l_n^\alpha(ht) l_m^\alpha(ht) d(ht) = \delta_{nm} \frac{(n+\alpha)!}{n!}, \quad (16)$$

α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра.

Ортогональные функции связаны с обобщенными полиномами Лагерра [13] $L_n^\alpha(ht)$ соотношением

$$l_n^\alpha(ht) = (ht)^{\alpha/2} e^{-ht/2} L_n^\alpha(ht). \quad (17)$$

Отметим некоторые свойства функций $l_n^\alpha(x)$, $L_n^\alpha(x)$, $x = ht$. Полиномы Лагерра связаны с решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{2n+\alpha+1}{2x} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4} \right) y = 0, \quad (18)$$

где $y = e^{-x/2} x^{(\alpha+1)/2} L_n^\alpha(x) = x^{1/2} l_n^\alpha(x)$.

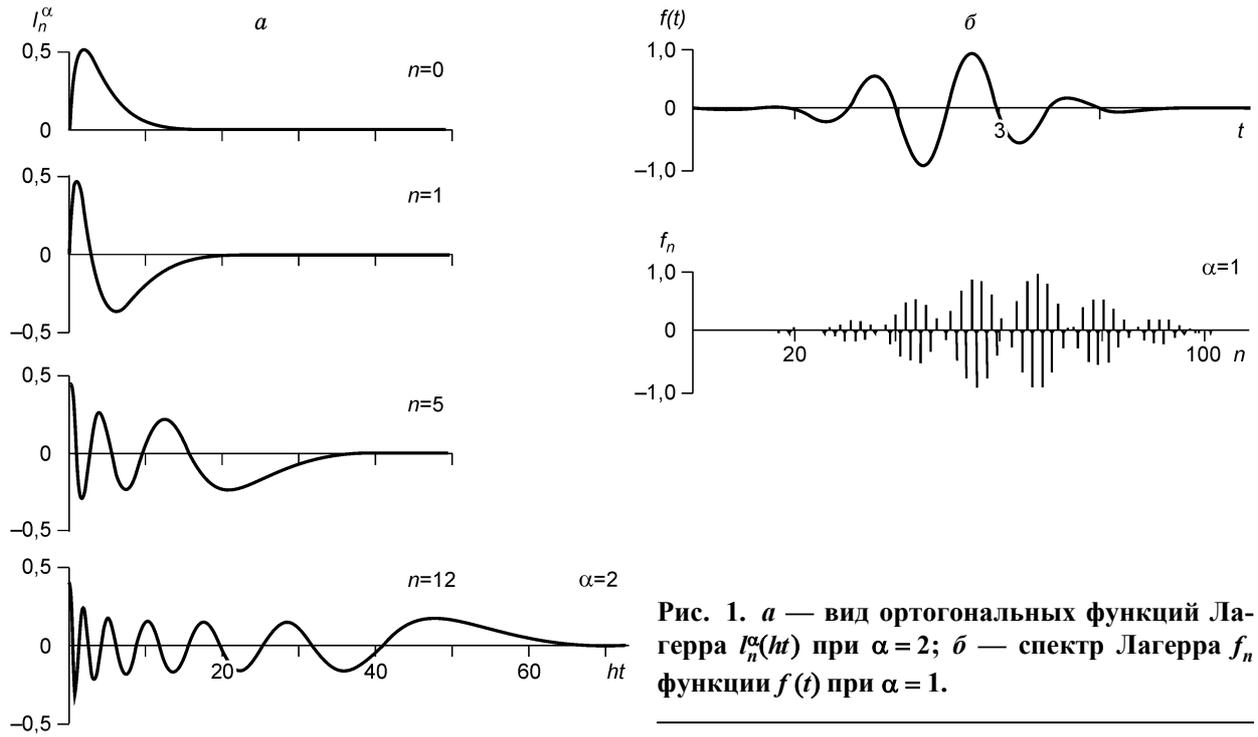


Рис. 1. а — вид ортогональных функций Лагерра $l_n^\alpha(ht)$ при $\alpha = 2$; б — спектр Лагерра f_n функции $f(t)$ при $\alpha = 1$.

Функция $l_n^\alpha(x)$ определена на промежутке от 0 до ∞ , при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$ она стремится к нулю. По существу, эта функция является конечной величиной только на промежутке от 0 до x_k , где $x_k \cong 2(2n + \alpha + 1)$.

При $x > x_k$ функция убывает как $x^{-1/2} \exp(-x/2)$ и потому здесь она экспоненциально мала. Отсюда следует ограничение на минимальное число гармоник Лагерра, необходимых для аппроксимации функции в виде ряда (15) в точке x

$$n > \left(\frac{x}{2} - \alpha - 1\right) / 2. \quad (19)$$

На практике это ограничение несущественно при $x = ht < 100$, но является жестким условием при $x = ht > 1000$.

В общем случае функция Лагерра степени n — это осциллирующая функция, имеющая $n + 1$ нулей, расстояние между которыми растет с ростом аргумента функции x и параметра α .

На рис. 1,а приведен вид ортогональных функций Лагерра для $\alpha = 2$ (здесь функции нормированы на величину $\sqrt{(n + \alpha)!/n!}$). На рис. 1,б приведена функция $f(t)$ и ее спектр Лагерра f_n . Отметим, что спектр Лагерра обычно шире Фурье спектра функции.

Легко можно показать, что выражения для $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ могут быть представлены не формулами (3) и (4), а в общем виде интегралами свертки.

Если две функции $f(t)$ и $g(t)$ представимы в виде разложения (14)

$$f(t) = (ht)^{\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n + \alpha)!} f_n l_n^\alpha(ht), \quad g(t) = (ht)^{\beta/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k + \beta)!} g_k l_k^\beta(ht), \quad (20)$$

тогда, выполнив разложение Лагерра от функции $\phi(t) = \int_0^t f(t) g(t - \tau) d\tau$ по полиномам $l_n^{\alpha + \beta + 1}$, для гармоники m получим

$$\phi_m = \int_0^{\infty} \phi(t) (ht)^{-\frac{\alpha + \beta + 1}{2}} l_m^{\alpha + \beta + 1}(ht) d(ht) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m g_{m-j} f_j. \quad (21)$$

Возможно другое представление функции $\phi(t)$

$$\phi(t) = (ht)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha+\beta)!} \phi_m l_m^{\alpha+\beta}(ht), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_m &= \int_0^{\infty} \phi(t) (ht)^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} l_m^{\alpha+\beta}(ht) d(ht) = \\ &= \frac{1}{h} g_m f_m + \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{m-1} (g_{m-j} - g_{m-j-1}) f_j, \end{aligned} \quad (23)$$

т. е. гармоника Лагерра от свертки двух функций может быть представлена в виде суммы произведений от гармоник Лагерра самих функций. Это позволяет перейти от интегралов в выражениях типа (2) к простым суммам, что дает возможность рассматривать задачи с более разнообразными моделями релаксации, чем (3) и (4), достаточно иметь гармоники Лагерра от релаксационных функций.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Применим преобразование (14) к системе уравнений (8)—(11). В результате получим следующую систему уравнений для n -й гармоники электромагнитного поля

$$\frac{\partial H_{nx}}{\partial z} - \frac{\partial H_{nz}}{\partial z} = \varepsilon^e \left(\frac{h}{2} E_{ny} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{ky} \right) + \sigma^e E_{ny} + \varepsilon_s m_n + J_{ny}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial E_{ny}}{\partial z} = \mu \left(\frac{h}{2} H_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kx} \right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial E_{ny}}{\partial z} = -\mu \left(\frac{h}{2} H_{nz} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{kz} \right), \quad (26)$$

$$m_n = -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left(h \sum_{k=0}^{n-1} m_k + \frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) E_{ny} \right). \quad (27)$$

Важно отметить, что учет релаксации в уравнениях Максвелла здесь не привел к увеличению числа уравнений системы. Если представить эту систему уравнений для n -й гармоники в операторном виде [15]

$$A \mathbf{u}_n = \mathbf{b}_n, \quad (28)$$

где A — оператор, \mathbf{u}_n — n -я гармоника решения, то младшие гармоники будут входить только в правую часть \mathbf{b}_n , а оператор A не будет зависеть от номера гармоники и будет один и тот же для всех гармоник. Таким образом оказывается, что для получения всех гармоник достаточно только один раз „обратить“ оператор. В том случае, когда можно получить оператор, обратный к A , все гармоники решения получаются умножением одного оператора $C = A^{-1}$ на правую часть. Это можно использовать для построения алгоритма решения.

Будем искать решение (24)—(27) в прямоугольной области x, z на равномерной разностной сетке. Для аппроксимации пространственных производных будем использовать разностную схему 4-го порядка точности [4]. Все компоненты поля определим в разных точках пространственной сетки. Величину E_y определим в четных точках сетки по x и четных точках сетки по z , величину H_x определим в четных точках сетки по x и нечетных точках по z , величину H_z определим в нечетных точках по x и четных точках по z . При таком определении все разностные производные по времени правильно центрированы.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (24)—(27) и соответственно уравнение (28) сводится к системе алгебраических уравнений $Au = b$, где оператор A является матрицей, а u есть вектор, компонентами которого являются значения решения в точках разностной сетки (здесь и далее опущены

индексы номера гармоник u_n и b_n). Точки сетки упорядочены в векторе u последовательно по координате z вдоль координаты x . Матрица A является разреженной ленточной матрицей с девятью ненулевыми диагоналями. Ширина ленты матрицы велика и сравнима с числом точек разностной сетки по z , что в нашем случае близко к 10^3 . Большая ширина редкой матрицы не позволяет использовать прямые методы обращения матрицы [15], поскольку обратная матрица будет не редкой, а полностью заполненной по всей ширине ленты матрицы. Для данной задачи это требует огромных размеров (нескольких десятков гигабайт) оперативной памяти только для хранения обратной матрицы. Здесь надо обращаться к итерационным методам решения алгебраических уравнений, поскольку тогда достаточно хранить в памяти компьютера только саму матрицу и вычислительные затраты на решение системы уравнений оказываются много меньше, чем при прямом методе решения.

В качестве такого метода использовался вариант метода сопряженных градиентов из работы [14], основанный на процедуре двух диагонализаций. Он дает более высокую скорость сходимости итераций в сравнении со стандартным методом сопряженных градиентов, и норма невязки уравнения $\|r^k\|$ уменьшается монотонно с ростом номера итерации k , где $r^k = b - Au^k$ и u^k — приближенное решение на k -м шаге итераций.

Для повышения эффективности метода сопряженных градиентов использовался свободный параметр h преобразования Лагерра (14), его мы можем менять произвольно. В матрице A он входит только в элементы, стоящие на главной диагонали. Меняя его, можно понижать число обусловленности матрицы A и, соответственно, повышать скорость сходимости метода сопряженных градиентов. Поскольку матрица A не зависит от номера гармоники, значение параметра h подбирается очень просто, и для всех гармоник это значение одно. Элементы главной диагонали матрицы A можно представить в виде $a_{ii} = \alpha_{ii}(h) + \beta_{ii}h$, где $\alpha_{ii}(h)$ слабо зависит от h , а β_{ii} не зависит от h . Элементы матрицы A , стоящие вне главной диагонали a_{jq} , $j \neq q$ по величине порядка $1/H$, где H — шаг пространственной разностной сетки. Увеличивая значение параметра h , можно добиться преобладания по величине элементов главной диагонали над другими, $a_{ii} > a_{jq}$, что почти всегда [15, 16] приводит к падению величины числа обусловленности $\text{cond}(A)$ матрицы A . Можно выписать оценку для h

$$\beta_{ii}h > 1/H - \alpha_{ii}(h). \quad (29)$$

При малом поглощении эта оценка имеет простой физический смысл: величина h должна быть больше числа точек разностной схемы на длину волны электромагнитного поля. В пределе больших значений h матрица A становится диагональной, а число обусловленности $\text{cond}(A)$ такой матрицы стремится к величине

$$\text{cond}(A) = \max(\beta_{ii})/\min(\beta_{ii}). \quad (30)$$

Значения величины β_{ii} , а следовательно и $\text{cond}(A)$ полностью определяются физическими параметрами задачи, а точнее параметрами среды. Эти параметры таковы, что это соотношение всегда меньше 100, т. е. при достаточно больших h матрица является хорошо обусловленной, и здесь надо ожидать высокой сходимости итераций.

С другой стороны, из соотношения (19), дающего оценку минимально необходимого числа гармоник n , для определения решения в момент времени t следует ограничение сверху на величину h :

$$ht < 2(2n + \alpha + 1). \quad (31)$$

Следовательно, увеличивая h , необходимо увеличивать число гармоник в преобразовании Лагерра (14). Таким образом, увеличение h приводит, с одной стороны, к увеличению скорости сходимости и уменьшению вычислений, но, с другой стороны, требует вычисления большего числа гармоник и ведет к увеличению объема вычислений. Поэтому для заданного t существует оптимальное для числа операций значение h .

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Численные расчеты проводились для частот электромагнитного поля от 100 МГц до 1 ГГц. Эти частоты характерны для радаров, используемых для исследования поверхностных слоев Земли. Соответственно параметры среды — это параметры поверхностных слоев Земли. Ниже приведем результаты, полученные для электромагнитных параметров, близких к параметрам известняка $\epsilon_s = 7,5\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma_s = 0,001$ См/м, $\tau_E = 0,1588$ нс, $\tau_D = 0,1594$ нс, $\tau_\sigma = 0,1$ нс (ϵ_0 и μ_0 — значения диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости вакуума соответственно).

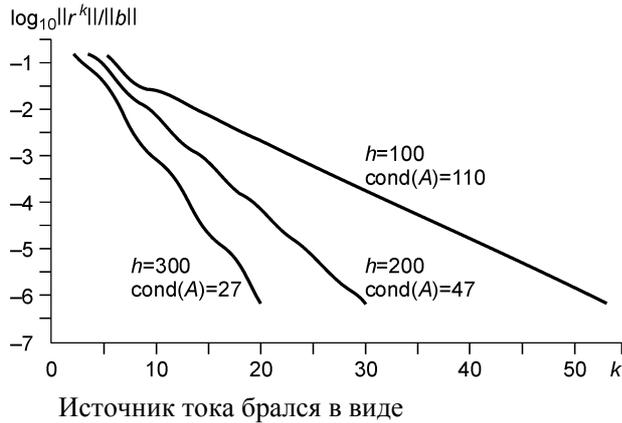


Рис. 2. Норма невязки системы алгебраических уравнений $\|r^k\|/\|b\|$ в зависимости от номера итераций при разных значениях параметра h .

Указано число обусловленности $\text{cond}(A)$ матрицы A при этих значениях параметра.

Источник тока брался в виде

$$J_y = f(t)\delta(z - z_s), \quad (32)$$

$$f(t) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \quad (33)$$

где f_0 — несущая частота источника, t_0 — момент центра импульса источника, z_s — точка расположения источника.

На границах области решения задавались поглощающие граничные условия, исключающие образование отраженной от границ волны. Производные по пространству аппроксимировались с 4-м порядком точности [4].

Графики на рис. 2 показывают скорость сходимости итераций методом сопряженных градиентов при решении системы алгебраических уравнений (28). Решение определялось в точках квадратной пространственной сетки, а каждая компонента вектора электромагнитной волны E_y, H_x, H_z определялась в 720×720 точках, так что размерность матрицы A превышала $1,5 \times 10^6$. Частота источника f_0 составляла 1 ГГц. На эту длину волны приходилось 9 шагов пространственной разностной сетки.

На рис. 2 показан логарифм невязки $\|r^k\|/\|b\| = \|b - Au^k\|/\|b\|$ для разных значений параметра h в зависимости от номера итерации k . Видно, что скорость сходимости с ростом h растет линейно. Так, величина $\|r^k\|/\|b\|$ достигает значения 10^{-6} за 53 итерации при $h = 100$, за 30 итераций при $h = 200$ и за 20 итераций при $h = 300$. При $h = 50$ это значение достигалось за 103 итерации. Удвоение величины h ведет примерно к двукратному падению числа итераций, что для данного алгоритма эквивалентно двукратному падению объема вычислений в задаче. Такая линейная зависимость наблюдается в области, где выполняется оценка (29). Это проверялось при различных значениях шага разностной сетки и разных параметрах среды и импульса. Учитывая это и используя оценку (31), легко найти оптимальное значение h .

Для иллюстрации свойств метода Лагерра он сравнивался с известным конечно-разностным методом перешагивания. Производная по времени в конечно-разностном методе аппроксимировалась с вторым порядком точности. Шаг по времени Δt для явной конечно-разностной схемы выбирался из условий устойчивости [4, 6],

$$\Delta t \leq \sqrt{\varepsilon^e \mu} H = \Delta t_0, \quad (34)$$

где H — шаг разностной сетки по пространству.

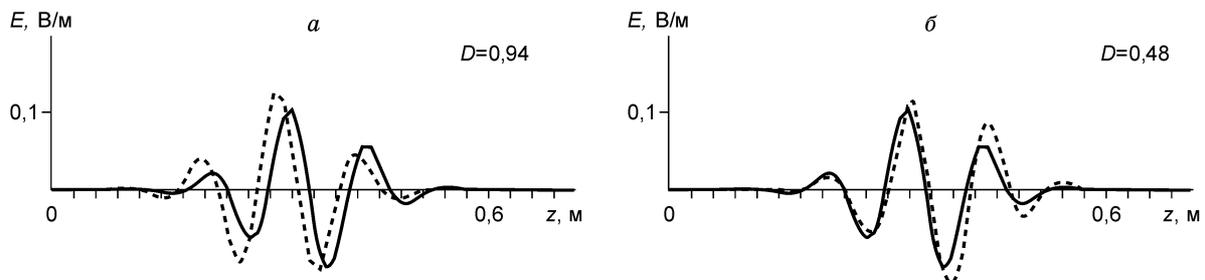


Рис. 3. Распространение импульса в однородной среде. Напряженность электрического поля.

Расчет конечно-разностным методом (а), расчет методом Лагерра (б). Штриховая линия — численное решение, сплошная — точное решение.

Точность решения оценивалась по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением вида

$$D(t) = \frac{\int_0^{\infty} |E_y(z, t) - E_{0y}(z, t)| dz}{\int_0^{\infty} |E_{0y}(z, t)| dz}, \quad (35)$$

здесь E_y — решение, полученное численно, E_{0y} — точное решение уравнений.

На рис. 3 показано распространение плоской волны в направлении z (E_y — компоненты поля) в однородной среде, рассчитанное явным конечно-разностным методом (а) и с использованием разложения Лагерра (б). Сплошная линия соответствует точному решению [2], штриховая — численному решению. Указана величина погрешности D . Частота источника f_0 составляла 1 ГГц. В преобразовании Лагерра использовались 750 гармоник Лагерра, параметр $\alpha = 1$, $h = 300$. Число точек разностной схемы на длину волны бралось одинаковым для обоих методов и равным 9. Шаг по времени в конечно-разностном методе равен половине от критического значения Δt_0 (34), т. е. $\Delta T = 0,5\Delta t_0$.

Показано решение после пробега импульсом расстояния примерно в 40 длин волн. На такой длине пробега погрешность решения D методом Лагерра в 2 раза меньше погрешности решения разностным методом. На малых временах точность решения разностным методом выше, чем методом Лагерра. Но скорость накопления ошибок со временем разностным методом всегда выше, чем методом Лагерра. Так, для приведенного на рис. 3 случая метод Лагерра был точнее на расстояниях больше 10 длин волн, но если шаг по времени разностной схемы брался в 2 раза меньше, то это происходило при длине пробега более 40 длин волн. Таким образом, этот спектральный метод решения оказывается предпочтительным для решения на больших временах, на больших длинах пробега.

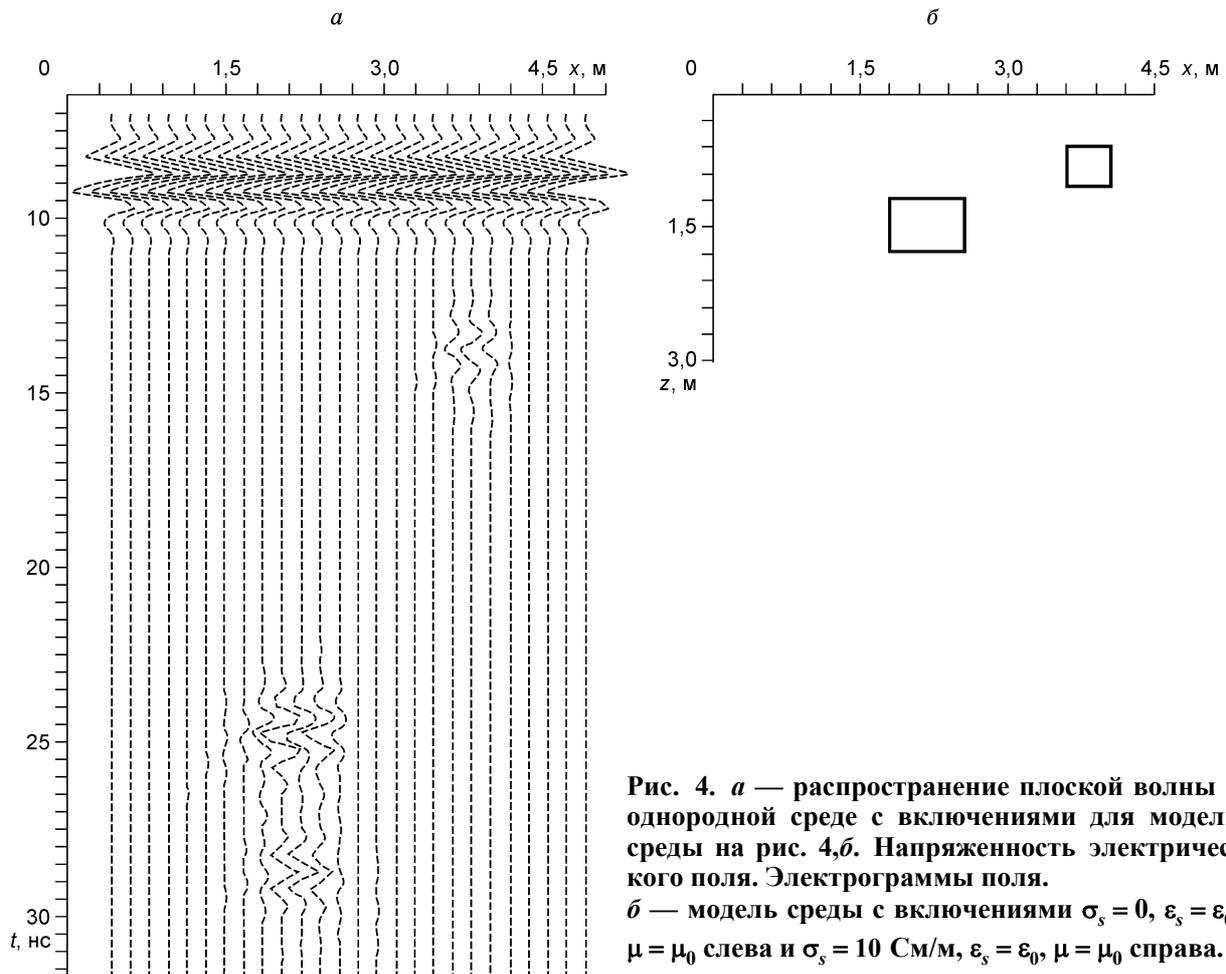


Рис. 4. а — распространение плоской волны в однородной среде с включениями для модели среды на рис. 4,б. Напряженность электрического поля. Электрограммы поля.
б — модель среды с включениями $\sigma_s = 0$, $\epsilon_s = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ слева и $\sigma_s = 10$ См/м, $\epsilon_s = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ справа.

При большой величине проводимости, когда распространение электромагнитного поля носит диффузный характер ($\sigma_s \gg \varepsilon_s f_0$), явная разностная схема устойчива только при очень малой величине шага по времени порядка H^2 , при которой объем вычислений становится нереально большим, и здесь этот алгоритм практически неприменим.

Спектральный метод Лагерра можно сравнить со спектральным методом Фурье. Но метод Фурье оказывается неустойчивым при некоторых предельных параметрах среды $\sigma_s \rightarrow 0$ и $\tau_E \rightarrow \tau_D$. Это волновая область распространения электромагнитного поля, где проводимость среды мала (при $\sigma_s = 0$ и $\tau_E = \tau_D$ уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению для E_y). Такой средой в данном случае является воздух или пустоты в Земле, которые всегда есть в реальности. Метод Лагерра и в волновой области и диффузной области распространения поля устойчив. В этом смысле он является универсальным методом.

На рис. 4,а представлены электрограммы электрического поля (E_y — компоненты поля) для случая распространения плоской волны в однородной среде с двумя включениями, одно из которых заполнено воздухом ($\sigma_s = 0$, $\varepsilon_s = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$), другое высокопроводящим материалом ($\sigma_s = 10$ См/м, $\varepsilon_s = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$). Модель среды показана на рис. 4,б.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Спектральный метод Лагерра имеет существенные преимущества в сравнении с разностным методом и методом Фурье для решения уравнений Максвелла в средах с релаксацией.

Уравнения Максвелла сводятся к системе линейных алгебраических уравнений для гармоник решения. У этой системы уравнений от номера гармоники зависит только правая часть, а матрица для всех гармоник одна. Это можно использовать при построении численного алгоритма задачи. Меняя свободный параметр преобразования Лагерра можно поднять эффективность численного алгоритма. Значение этого параметра легко определяется и оно одно для всех гармоник.

Операция свертки в релаксационных уравнениях сводится к простым суммам гармоник, что важно при большом числе механизмов релаксации, $L \gg 1$.

Рост погрешности решения методом Лагерра происходит медленнее, чем в конечно-разностном методе, поэтому он оказывается точнее на больших длинах пробега волны. В отличие от метода Фурье, предложенный метод устойчив в волновой области распространения поля, где проводимость среды близка к нулю. Он является универсальным методом, так как устойчив и в диффузной области распространения поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982, 620 с.
2. **Электроразведка.** Справочник геофизика / Ред. А.Г. Тархов. М., Недра, 1980, 137 с.
3. Дейвис С. М., Ландгребе Д.А., Филлипс Т.Л. Дистанционное зондирование Земли. М., Недра, 1978, 415 с.
4. **Bergmann T., Robertsson J.O.A., Holliger K.** Finite-difference modeling of electromagnetic wave propagation in dispersive and attenuating media // *Geophysics*, 1998, v. 63, p. 856—867.
5. **Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Holliger K.** A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // *Geophysics*, 1999, v. 64, p. 1369—1377.
6. **Robertsson J.O.A., Blanch J.O., Symes W.W.** Viscoelastic finite-difference modeling // *Geophysics*, 1994, v. 59, p. 1444—1456.
7. **Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофизика*, 2003, т. 44, с. 1060—1069.
8. **Luebbers R., Hansberger F.P.** FDTD for Nth-order dispersive media // *IEEE Trans. Ant. Propag.*, 1992, v. 40, p. 1297—1301.
9. **Xu T., McMechan G.A.** GPR attenuation and its numerical simulation in 2.5-dimensions // *Geophysics*, 1997, v. 62, p. 403—414.
10. **Carcione J.M.** Ground-penetrating radar. Wave theory and numerical simulation in lossy anisotropic media // *Geophysics*, 1996, v. 61, p. 1664—1677.
11. **Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // *Appl. Mathem. Lett.*, 1999, v. 12, p. 105—110.

12. **Kounyukh G.V., Mikhailenko V.G., Mikhailov A.A.** Integral Laguerre transforms as applied for forward seismic modeling // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center (Mathematical modeling in geophysics), 1999, № 5, p. 71—92.
13. **Справочник** по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М., Наука, 1979, 832 с.
14. **Paige C.C., Saunders M.A.** LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ACM Transaction on Mathematical Software, 1982, v. 8, p. 43—71.
15. **Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. М., Наука, 1963, 734 с.
16. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. М., Мир, 1999, 548 с.

*Рекомендована к печати 20 июля 2005 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию
16 ноября 2004 г.*