УДК 531.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ВРАЩАЮЩИЙСЯ ЦИЛИНДР С РАДИАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ РЕБРАМИ

И. Б. Богоряд, Н. П. Лаврова

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики
Томского государственного университета, 634050 Томск
E-mail: niipmm@mail.tomsknet.ru

С помощью конечно-разностных методов в двумерной постановке решается краевая задача о нестационарном вихревом движении вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью во вращающейся с переменной угловой скоростью полости, которая имеет форму прямого кругового цилиндра с равноотстоящими друг от друга радиальными ребрами. Получена зависимость коэффициента сопротивления ребра от его заглубления относительно свободной поверхности.

Ключевые слова: вращающаяся полость, радиально расположенные ребра, вязкая жидкость, свободная поверхность, вихревое течение.

Введение. Исследование нестационарных течений несжимаемой жидкости в полости вращающегося твердого тела с кольцевыми или радиально расположенными в ней ребрами представляет интерес при решении ряда задач динамики и баллистики для ракетно-космической техники. При этом решение соответствующих краевых задач вызывает затруднения, которые возрастают в случае частичного заполнения полости жидкостью, когда часть ее поверхности является свободной, а также в случае, когда доля вихревой составляющей кинетической энергии жидкости существенна. Наибольший прогресс в решении указанных задач достигнут при использовании математических моделей, в которых решение гидродинамических задач о течении вязкой жидкости заменяется зависимостями, согласованными с результатами эксперимента с помощью специально вводимых констант и функций (см., например, [1–4]). Это обусловлено также тем, что в эксперименте сложно воспроизвести некоторые условия течения, реализующиеся в полете (например, структуру поля массовых сил).

В работах [5, 6] предпринята попытка построить математическую модель, в основу которой положено численное решение краевой задачи о движении маловязкой жидкости, заполняющей вращающийся цилиндрический сосуд с радиально расположенными ребрами. В настоящей работе постановка и решение этой краевой задачи распространяются на случай, когда полость частично заполнена жидкостью.

1. Постановка задачи. Полость в твердом теле, имеющая форму прямого кругового цилиндра радиусом R_0, в которой радиально расположены m равноотстоящих друг от друга ребер шириной δ, частично заполнена вязкой несжимаемой жидкостью и вращается вокруг продольной оси с заданной угловой скоростью $\omega_x(t)$. Как и в [5], предполагается, что выполнены следующие условия:

— движение жидкости происходит при больших числах Рейнольдса, вычисленных по ширине ребра: $\mathrm{Re} = \omega_x \delta^2/\nu$;

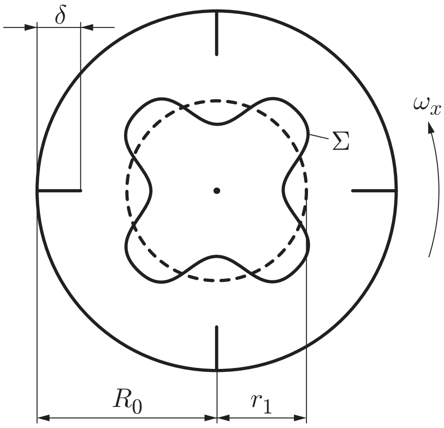

Рис. 1. Поперечное сечение полости, частично заполненной жидкостью

— гравитационными силами вследствие их малости по сравнению с центробежными силами, вызванными вращением полости, можно пренебречь;

— размеры полости и числа Рейнольдса таковы, что крышка и днище полости не вносят существенных возмущений в течение основного объема жидкости.

Последнее предположение означает, что деформации жидкости в направлении продольной оси однородны и соответствующие напряжения равны нулю. Это соответствует постановке задач плоского напряженного состояния упругих тел. Таким образом, течение жидкости можно считать двумерным нестационарным.

Кроме того, вводятся следующие предположения:

— в установившемся стационарном режиме вращения полости ($\omega_x = \text{const}$) свободная поверхность Σ имеет форму прямого кругового цилиндра радиусом r_1, соосного с полостью (рис. 1), а жидкость движется как твердое тело [3];

— ребра полностью погружены в жидкость ($\delta < R_0 - r_1$) и имеют малую толщину h ($h \ll \delta$).

Для описания движения жидкости вводятся две системы координат: неподвижная $OXYZ$, ось OX которой совпадает с продольной осью полости, и $Oxyz$, связанная с полостью. Наряду со связанной декартовой системой координат вводится связанная цилиндрическая система координат $Oxr\theta$ с ортами $\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\theta$. Оси OX неподвижной и Ox связанных систем координат совпадают.

Предполагается, что течение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и уравнением неразрывности. В связанной цилиндрической системе отсчета, в которой в соответствии с принятыми допущениями вектор относительных скоростей обозначен через $\boldsymbol{u} = \{u_x \equiv 0, u_r, u_\theta\}$, эти уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial r} - u_\theta(\operatorname{rot}_1 \boldsymbol{u} + 2\omega_x) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \nu\left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) = \omega_x^2 r, \\
\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{2r}\frac{\partial u^2}{\partial \theta} + u_r(\operatorname{rot}_1 \boldsymbol{u} + 2\omega_x) + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} - \nu\left(\Delta u_\theta + \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = -\dot{\omega}_x r;
\end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \tag{2}$$

где $\operatorname{rot}_1 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}_x \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$.

На смоченных поверхностях S ставятся условия прилипания

$$\boldsymbol{u}(r, \theta, t) = 0, \qquad r \in S.$$

На свободной поверхности задаются кинематическое и динамические краевые условия. Вводя функцию формы свободной поверхности Σ с помощью уравнения

$$r = \zeta(\theta, t), \qquad r \in \Sigma, \tag{3}$$

эти условия можно записать в следующем виде:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\zeta = u_r, \qquad r \in \Sigma; \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} n_k - p n_i = 0, \qquad i, j = r, \theta. \tag{5}$$

После ряда линейных преобразований систему (5) можно представить в разрешенном относительно p виде

$$\begin{gathered} p - \sigma_{rr} \cos 2\alpha - \sigma_{r\theta} \sin 2\alpha = 0, \\ \sigma_{r\theta} \cos 2\alpha - \sigma_{rr} \sin 2\alpha = 0, \qquad r \in \Sigma. \end{gathered} \tag{6}$$

Уравнения (6) являются условиями отсутствия на поверхности Σ нормальных и касательных напряжений. Здесь σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ — компоненты вязкого тензора напряжений в подвижной цилиндрической системе координат. Угол α связан с углами направляющих косинусов внешней по отношению к Σ нормали $\boldsymbol{n}$ следующими соотношениями:

$$n_r = \cos(n, i_r) = \cos\alpha = -[1 + (\nabla\zeta)^2]^{-1/2},$$

$$n_\theta = \cos(n, i_\theta) = \sin\alpha = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\,[1 + (\nabla\zeta)^2]^{-1/2}.$$

Так как в рассматриваемой задаче $\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta}$, то краевые условия (6) аналогичны условиям, определяющим направления главных напряжений в плоских задачах (см., например, [7]).

При $t = 0$ задача (1)–(6) дополняется начальными условиями

$$\omega_x(0) = \omega_x^0, \quad \dot\omega_x(0) = \dot\omega_x^0, \quad \boldsymbol{u}(r, \theta, 0) = \boldsymbol{u}^0(r, \theta), \quad \zeta(\theta, 0) = \zeta^0(\theta)$$

и согласованным с ними полем давления $p(r, \theta, 0) = p^0(r, \theta)$.

Очевидно, что при задании формы свободной поверхности в виде (3) класс искомых поверхностей Σ ограничивается однозначными функциями θ. Это обстоятельство налагает ограничения на входные параметры задачи.

2. Метод решения. Задача решается конечно-разностными методами с использованием схемы расчета, разработанной для случая полости, заполненной жидкостью [5]. Эта схема дополнена разностными аналогами краевых условий (3), (6) на Σ. Расчет компонент вектора скорости на свободной поверхности на новом временном слое проводится с помощью условия для касательного напряжения в (6) и уравнения неразрывности (2). С использованием этих соотношений строится система уравнений в новых искомых переменных, которые в теории упругости называются полусуммой и полуразностью:

$$V = \frac{u_r + u_\theta}{2}, \qquad U = \frac{u_r - u_\theta}{2}.$$

В этих переменных система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial\theta}\Big)^{(k)} &= -\Big(\frac{U}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r}\,\operatorname{tg} 2\alpha\Big)^{(k-1)}, \\ \Big(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial\theta}\Big)^{(k)} &= -\Big(\frac{V}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial r}\,\operatorname{tg} 2\alpha\Big)^{(k-1)} \end{aligned} \tag{7}$$

и решается по схеме бегущего счета с применением итерационной процедуры (k — номер итерации). Неопределенность типа $0 \cdot \infty$ в точке $\alpha = \pi/4$ устраняется заменой в (7)

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{\rho\nu} \sigma_{r\theta},$$

следующей из граничного условия для касательных напряжений в (6).

Выбор параметров расчетной схемы, обеспечивающих сходимость численного решения задачи в целом, осуществлен в результате вычислительных экспериментов.

3. Результаты расчетов. Расчеты проведены для цилиндрических полостей с четырьмя равноотстоящими друг от друга радиально расположенными ребрами с теми же размерами, что и в экспериментальных [3] и численных [5, 6] исследованиях, соответствующих случаю полости, заполненной жидкостью: радиус $R_0 = 0{,}175$ м, высота $H = 0{,}4$ м, ширина ребра $\delta = 0{,}35$ м. Авторам данной работы не известны работы, в которых рассматривается течение жидкости со свободной поверхностью в поле только центробежных сил, обусловленных вращением полости с радиально расположенными ребрами, и с результатами которых можно сравнить приведенные ниже результаты. Контроль сходимости решения осуществлялся на основе закона сохранения массы (погрешность не более чем в третьей значащей цифре).

На рис. 2 представлены расчетные поля скоростей жидкости в режиме раскрутки полости с постоянным ускорением $\dot{\omega}_x = 0{,}2$ с$^{-2}$. Движение жидкости (воды) развивается из начального состояния, когда свободная поверхность имеет форму цилиндра радиусом $r_1 = 0{,}6R_0$ и $\boldsymbol{u}(r, \theta, t = 0) = 0$. На рис. 3 показано поле скоростей на свободной поверхности при $\dot{\omega}_x = 1$ с$^{-2}$ в момент времени $t = 1{,}5$ с. Следует отметить, что поверхность Σ имеет такую же форму, как и в случае обтекания препятствия, образованного наветренной стороной ребра и присоединенным с подветренной стороны ребра вихрем. В образовавшемся за препятствием “водопаде” (см. рис. 3) форма значительной части поверхности Σ близка к прямой, совпадающей с вектором удельной центробежной силы $\rho\omega_x^2 r \boldsymbol{i}_r$. Несмотря на эволюцию вихря (точнее, вихревой структуры в области определения решения), его отрыва от ребра не происходит, что обусловлено влиянием на поток соседних ребер.

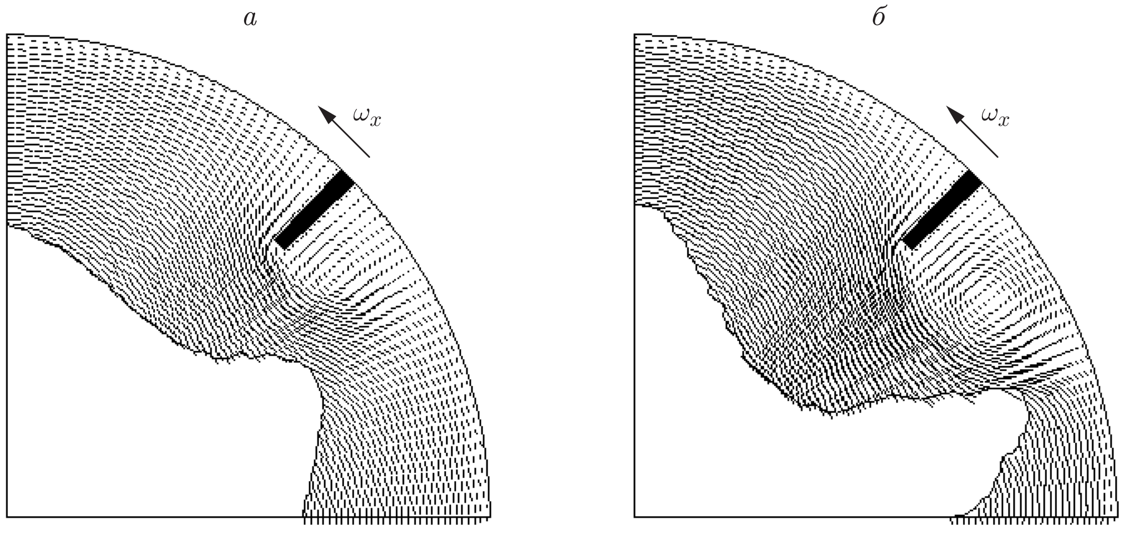

Рис. 2. Поле скоростей жидкости в различные моменты времени:
а — $t = 2$ с; *б* — $t = 3$ с

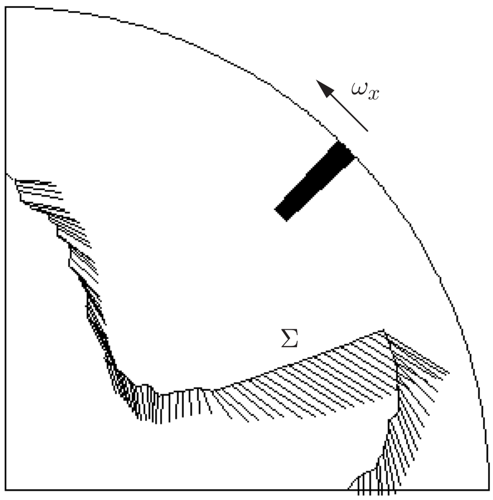

Рис. 3. Поле скоростей на свободной поверхности

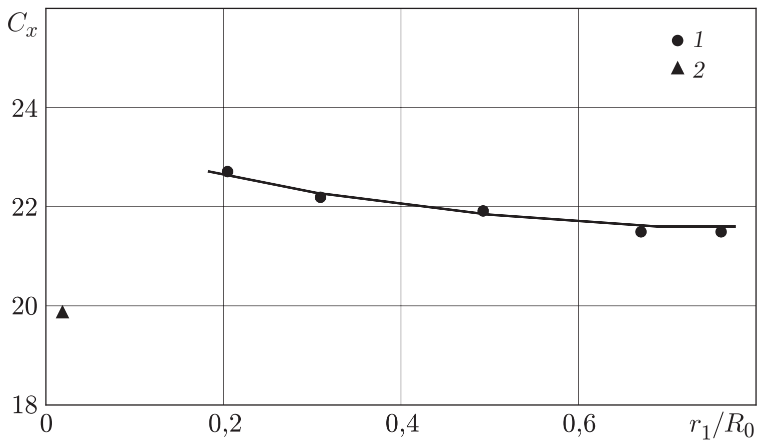

Рис. 4. Зависимость коэффициента сопротивления ребра C_x от параметра r_1/R_0:
1 — результаты расчета в данной работе; *2* — результаты расчета в [6] при $r_1 = 0$

На рис. 4 приведена расчетная зависимость коэффициента сопротивления ребра C_x от параметра r_1/R_0, характеризующего степень заполнения полости жидкостью. Эти результаты свидетельствуют о возможности замены экспериментальных данных численными.

В постановке гидродинамической задачи адекватно учитываются действующие силы и влияние на течение жидкости свободной поверхности. В основу алгоритма расчета C_x положена феноменологическая модель для силы турбулентного сопротивления [8]

$$F = (1/2)C_x\rho V_0^2\delta H\,|\cos\lambda t|\cos\lambda t, \tag{8}$$

где V_0 — осредненная по ширине ребра амплитуда нормальной к плоскости ребра скорости жидкости:

$$V_0 = \frac{\lambda\gamma_0}{\delta}\int\limits_{R_0-\delta}^{R_0} r\,dr,$$

λ, γ_0 — угловые частота и амплитуда колебаний полости относительно продольной оси, связанные соотношением $\omega_x = \lambda\gamma_0\cos\lambda t$.

В работе [8] (см. также [9]) сила F в левой части формулы (8) определялась в эксперименте для уединенной плоской пластины, колеблющейся перпендикулярно ее плоскости в безграничной жидкости. В настоящей работе F определена в результате решения гидродинамической краевой задачи по схеме, описанной в [6]. Расчеты выполнены при значении амплитуды $\gamma_0 = 0{,}0524$ рад и частоте $\lambda = 6{,}28$ с$^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рабинович Б. И.** Введение в динамику ракет — носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1983.
2. **Роговой В. М.** Динамическая устойчивость космических аппаратов с ЖРД / В. М. Роговой, С. В. Черемных. М.: Машиностроение, 1975.
3. **Рабинович Б. И., Клишев О. П., Мытарев А. И., Чурилов Г. А.** Математическая модель космического аппарата с полостями, частично заполненными жидкостью. Режим нестационарного вращения // Полет. 2003. № 10. С. 50–56.
4. **Рабинович Б. И.** Вихревые процессы и динамика твердого тела / Б. И. Рабинович, В. Г. Лебедев, А. И. Мытарев. М.: Наука, 1992.
5. **Богоряд И. Б., Лаврова Н. П.** Численное моделирование вращения твердого тела с заполненной жидкостью полостью, имеющей радиальные ребра // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 135–139.
6. **Богоряд И. Б., Лаврова Н. П.** Определение коэффициента сопротивления радиальных ребер в топливных баках ЖРД // Изв. РАРАН. 2007. Вып. 4. С. 70–73.
7. **Тимошенко С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1975.
8. **Keulegan G. H., Carpenter L. H.** Forces on cylinders and plate in a oscillating fenid // J. Res. Nat. Bureau Standart. 1958. V. 60, N 5. P. 423–440.
9. **Микишев Г. Н.** Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович. М.: Машиностроение, 1983.

Поступила в редакцию 5/V 2010 г.,
в окончательном варианте — 6/VII 2010 г.