

СТАЦИОНАРНОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В КАНАЛЕ С НЕПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ ПРИ СЛАБОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Е. К. Холщевникова

(Москва)

Численными методами получено решение задачи о течении в канале с непроводящими стенками при малом параметре магнитогиродинамического взаимодействия N . В диапазоне изменения параметров Холла от 0 до 10 и магнитного числа Рейнольдса от 0 до 10 для двух различных геометрий приложенного магнитного поля рассчитаны распределения электрических параметров и средних по сечению и локальных газодинамических параметров потока. Показано, что увеличение параметров Холла и магнитного числа Рейнольдса сопровождается уменьшением джоулевой диссипации и возмущений средних по сечению газодинамических характеристик течения. Обнаружено, что в зонах концевых токов распределение газодинамических параметров по сечению канала крайне немонотонно.

При изучении различных магнитогиродинамических устройств очень важно выяснить влияние зон неоднородности магнитного поля на характеристики течения. Система уравнений, описывающих течение газа в таких зонах, включает в себя уравнения газовой динамики (с дополнительно введенными электромагнитными силами и джоулевой диссипацией) и электродинамические уравнения для электрических токов, потенциала и магнитного поля. При малом параметре N уравнения электродинамики решаются независимо от газодинамических, и найденные с их помощью распределения электродинамических сил и джоулева тепловыделения затем используются в газодинамических уравнениях для определения возмущенного течения газа.

Расчету электрического поля в каналах по заданным распределениям газодинамических параметров в настоящее время посвящена обширная литература [1-7]. Основными факторами, влияющими на электрические поля, являются геометрия приложенного магнитного поля, параметр Холла β и магнитное число Рейнольдса R_m . В перечисленных работах рассматривается влияние каждого из этих факторов в отдельности. В работах [6, 7] рассматривается совместное влияние параметров β и R_m , но при простейшей геометрии магнитного поля. Решения, приведенные в статьях, были получены аналитическими методами.

Используется в магнитной гидродинамике и метод малого параметра (см., например, [8]). Расчетам сверхзвуковых течений газа в каналах в концевых зонах магнитного поля посвящено сравнительно немного работ [9-11]. При этом приведенные расчеты ограничивались случаями специальной геометрии магнитного поля и $\beta = 0$, $R_m = 0$.

Ниже изучается влияние параметров Холла и магнитного числа Рейнольдса на электрические и газодинамические характеристики течения проводящего газа в зонах неоднородности магнитного поля при малом параметре взаимодействия N .

1. Рассмотрим движение совершенного газа с постоянными теплоемкостями и постоянной проводимостью σ в плоском канале $|x| < \infty$, $0 \leq y \leq h$ с непроводящими стенками (фиг. 1) в присутствии внешнего неоднородного магнитного поля, которое после усреднения по поперечной координате z можно представить в виде

$$B_e = (0, 0, B_e(x))$$

Система уравнений магнитной гидродинамики включает в себя уравнения неразрывности, движения, энергии, закон Ома и уравнения Максвелла. При $N \ll 1$ можно произвести линеаризацию уравнений по этому параметру [8].

Решение системы уравнений в первом приближении ищется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + N\mathbf{v}_1, & p &= p_0 + Np_1, & \rho_1^* &= \rho_0 + N\rho_1 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + N\mathbf{B}_1, & \varphi &= \varphi_0 + N\varphi_1, & \mathbf{j} &= \mathbf{j}_0 + N\mathbf{j}_1 \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, p — давление, ρ — плотность газа, \mathbf{B} — индукция магнитного поля, φ — электрический потенциал, \mathbf{j} — вектор плотности тока; нижним индексом 0 обозначены параметры невозмущенного магнитным полем течения и электрические величины, рассчитанные по невозмущенным газодинамическим параметрам; индексом 1 обозначены возмущения газодинамических и электрических величин.

В работе [8] показано, что системе уравнений газовой динамики для невозмущенного магнитным полем течения в плоском канале удовлетворяют распределения

$$\mathbf{v}_0 = (u_0(y), 0, 0), \quad \rho_0 = \rho_0(y), \quad p_0 = \text{const} \quad (1.1)$$

Уравнения Максвелла и закон Ома в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_0 &= -\nabla\varphi_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{b}_0 - \beta_0 \mathbf{j}_0 \times \mathbf{b}_0 \\ \text{rot } \mathbf{b}_0 &= R_m \mathbf{j}_0, \quad \text{div } \mathbf{j}_0 = 0, \quad \text{div } \mathbf{b}_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Следуя [8], запишем уравнения для возмущений газодинамических параметров при $\rho_0 = u_0 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} - f_x, & \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, & \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} - a_0^2 \frac{\partial p_1}{\partial x} = q \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$f_x = j_{y0} b_0, \quad f_y = -j_{x0} b_0, \quad q = (\gamma - 1)(j_{x0}^2 + j_{y0}^2), \quad a_0 = 1/M_0$$

Здесь a_0 и M_0 — скорость звука и число Маха невозмущенного потока, γ — отношение теплоемкостей, u_1 и v_1 — компоненты вектора возмущенной скорости; величины электромагнитных сил $f = (f_x, f_y)$ и джоулевой диссипации q предполагаются известными из решения системы (1.2).

Системы (1.2) и (1.3) записаны в безразмерных переменных, которые вводятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\circ &= U\mathbf{v}, \quad \mathbf{B} = B^*\mathbf{b}, \quad x^\circ = xh, \quad y_1^\circ = yh, \quad \rho^\circ = \rho^*\rho, \quad p^\circ = \rho^*U^2p \\ \mathbf{j}^\circ &= \frac{\sigma^*UB^*}{c} \mathbf{j}, \quad \varphi^\circ = \frac{UB^*h}{c} \varphi, \quad \beta = \frac{e\tau B^*}{mc}, \quad R_m = \frac{4\pi\sigma^*Uh}{c^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь U — средняя по сечению скорость на входе в канал, h — высота канала, B^* , ρ^* , σ^* — характерные магнитная индукция, плотность и электропроводность, e и m — заряд и масса электрона, τ — время между соударениями электрона с ионом, c — скорость света в вакууме; градусом обозначены размерные величины.

Параметр взаимодействия N , по которому проводится линеаризация, определяется следующим образом

$$N = \frac{\sigma^*B^{*2}h}{c^2\rho^*U}$$

В качестве граничных условий для решения системы (1.2) будем использовать условия непротекания нормального тока j_y через верхнюю и нижнюю стенки канала и условие отсутствия продольного тока j_x на $\pm \infty$.

Будем считать, что на входе в канал (при $x \rightarrow -\infty$) электромагнитное поле отсутствует и, следовательно, возмущения всех газодинамических параметров равны нулю. Таким образом, граничные условия для решения системы (1.3) имеют вид

$$u_1 = v_1 = p_1 = \rho_1 = 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty$$

Кроме того, из условий непротекания жидкости через верхнюю и нижнюю стенки канала для поперечной составляющей скорости будем иметь

$$v_1 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = 1$$

Заметим, что из системы (1.3) нетрудно найти газодинамические параметры, усредненные по сечению канала. Действительно, проинтегрируем первое, третье и четвертое уравнения системы (1.3) по сечению канала. Тогда получим следующие уравнения для усредненных величин:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle u_1 \rangle}{dx} + \frac{d \langle p_1 \rangle}{dx} &= \langle f_x \rangle, & \frac{d \langle \rho_1 \rangle}{dx} + \frac{d \langle u_1 \rangle}{dx} &= 0 \\ \frac{d \langle p_1 \rangle}{dx} - \frac{1}{M_0^2} \frac{d \langle \rho_1 \rangle}{dx} &= \langle \bar{q} \rangle, & \langle \bar{x} \rangle &= \int_0^1 \bar{x} dy, \quad M_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. Перейдем к электрической части задачи. Для удобства опустим индекс 0 у электрических величин, входящих в систему (1.2). Представим магнитное поле в виде суммы

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_e + \mathbf{b}_i \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{b}_e — приложенное поле, а \mathbf{b}_i — индуцированное поле, вызванное токами, протекающими по газу.

Реальное внешнее поле \mathbf{b}_e всегда удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{b}_e = 0$. Поэтому из (1.2) получим

$$\text{rot } \mathbf{b}_i = R_m \mathbf{j} \quad (2.2)$$

Усредним по координате z закон Ома (1.2) и уравнение (2.2). Пренебрегая корреляционными членами и считая, что вектор невозмущенной скорости имеет только продольную составляющую $u_0(y)$ (см. (1.1)), а проекции магнитного поля на координатные оси b_x и b_y приближенно равны нулю на стенках $z = \text{const}$, из (1.2) и (2.2) получим

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \beta j_y b, & j_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - u_0 b + \beta j_x b \\ j_x &= \frac{1}{R_m} \frac{\partial b_i}{\partial y}, & j_y &= \frac{1}{R_m} \frac{\partial b_i}{\partial x}, & \mathbf{b} &= (0, 0, b(x)) \\ & & & & b &= b_e + b_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь j_x , j_y , Φ , b , b_e , b_i — величины, усредненные по координате z .

Дифференцируя j_x по y , j_y по x и вычитая из первого выражения второе, после преобразований будем иметь

$$\frac{\partial^2 b_i^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_i^*}{\partial y^2} - R_m u_0 \frac{\partial b_i^*}{\partial x} + \beta \frac{db_e}{dx} \frac{\partial b_i^*}{\partial y} = u_0 \frac{db_e}{dx} \quad (2.4)$$

$$b_i^* = \frac{b_i}{R_m}, \quad j_x = \frac{\partial b_i^*}{\partial y}, \quad j_y = -\frac{\partial b_i^*}{\partial x} \quad (2.5)$$

Рассмотрим граничные условия, необходимые для решения уравнения (2.4). Как было сказано выше

$$j_y = 0 \text{ при } y = 0, y = 1; \quad j_x = 0 \text{ при } x = \pm \infty \quad (2.6)$$

Так как концевые токи практически очень малы на расстояниях порядка нескольких калибров (h) от областей резкого изменения магнитного поля, то вместо $\pm \infty$ можно выбрать левую и правую границы канала таким образом, чтобы они находились на конечном, но достаточно далеком расстоянии от указанных областей (фиг. 1). В результате, учитывая (2.5), получим следующие граничные условия для решения уравнения (2.4):

$$b_i^* = 0 \text{ при } y = 0, y = 1; \quad b_i^* = 0 \text{ при } x = x_1, x = x_2 \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.4) видно, что при однородном приложенном поле b_e член, зависящий от параметра Холла β , не войдет в это уравнение. В этом случае параметр β может влиять на решение задачи через граничные условия, например, если есть участки стенок канала, занятые электродами. В тех случаях, когда параметр β не входит в граничные условия, распределения электрических токов и индуцированных полей не зависят от эффекта анизотропии проводимости, однако распределение электрического потенциала, как следует из закона Ома, является функцией параметра β (см. [7]).

Используя закон Ома (2.3), уравнения (2.5) и граничные условия (2.6) и (2.7), можно получить некоторые полезные соотношения.

Действительно, проинтегрируем уравнение для j_x (2.3) по y от 0 до 1 и по x от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда, учитывая, что в канале единичной ширины с непроводящими стенками и постоянной скоростью $v = u_0 = 1$ безразмерная джоулева диссипация определяется выражением

$$Q = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 j_y b dx dy \quad (2.8)$$

и полагая $\varphi(-\infty, y) = 0$, придем к равенству

$$\langle \varphi_+ \rangle = \int_0^1 \varphi(+\infty, y) dy = \beta Q \quad (2.9)$$

Если $b(+\infty) = 0$, то из выражения для j_y (2.3) следует, что потенциал на $+\infty$ не зависит от y . В этом случае вместо (2.9) будем иметь

$$\varphi(+\infty) = \beta Q \quad (2.10)$$

Таким образом, соотношения (2.9) и (2.10) связывают величину джоулевой диссипации с продольной разностью потенциалов при наличии анизотропии проводимости.

В том случае, когда параметр Холла β равен нулю и токовая картина симметрична относительно оси канала, из (2.8) можно получить следующее выражение для джоулевой диссипации:

$$Q = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_e}{dx} I_1(x) dx, \quad I_1(x) = \int_{1/2}^1 (y - 1/2) j_x(x, y) dy \quad (2.11)$$

Заметим, что величина концевого тока, протекающего через данное сечение канала, определяется формулой

$$I(x) = \int_{1/2}^1 j_x(x, y) dy$$

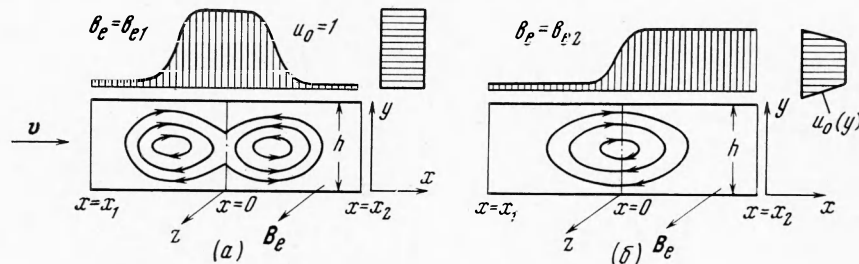
Эта величина обычно измеряется в экспериментах поясом Роговского. Расчеты показали, что отношение величин I и I_1 является слабо меняющейся функцией и колеблется в пределах $2.4 \div 3.4$. Для большинства случаев $I/I_1 \approx 3$. Пользуясь этим соотношением, можно находить I_1 по найденным в экспериментах значениям I и по формуле (2.11) вычислять приближенное значение джоулевой диссипации. Так как в подынтегральное выражение формулы для Q входит произведение db_e/dx на I_1 , то основной вклад в Q это произведение будет вносить в зонах резкого изменения магнитного поля, где производная db_e/dx велика. Протяженность таких зон обычно мала, поэтому приближенная оценка джоулевой диссипации по формуле (2.11) не представляет труда.

3. Уравнение (2.4) является уравнением эллиптического типа. Для решения этого уравнения был использован один из итерационных методов — метод последовательных смещений (метод Зейделя) с ускорением по формуле Люстерника (см. [12, 13]). Конечно-разностная запись уравнения (2.4) соответствовала пятиточечной аппроксимации дифференциального уравнения второго порядка. При этом погрешность вычисления индуцированного поля b_i^* составляла величину порядка квадрата шага сетки $O(h^2)$.

Для расчета были выбраны следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \beta &= 0, 1, 3, 5, 10; R_m = 0, 1, 5, 10; x_1 = -3.5 \\ x_2 &= 3.5, h = 0.1 \text{ при } R_m = 0; \quad x_2 = 4.5, h = 0.1 \text{ при } R_m = 1 \\ x_2 &= 7.5, h = 1/8 \text{ при } R_m = 5; \quad x_2 = 9.5, h = 1/8 \text{ при } R_m = 10 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Правая граница канала x_2 выбиралась таким образом, чтобы учесть вынос концевых токов в продольном направлении при больших значениях R_m (См. [7]). Критерием правильности выбора x_2 служило стремление j_y к нулю при приближении к правой границе. Значения шага сетки h были ограничены оперативной памятью ЭВМ (расчеты проводились на электронно-вычислительных машинах БЭСМ-3М и М-220 с объемом памяти 4096 ячеек). Время счета одного варианта составляло 2—3 мин.



Фиг. 1

По найденным в результате решения уравнения (2.4) индуцированным магнитным полям b_i^* вычислялись суммарные магнитные поля $b = b_e + R_m b_i^*$, плотности электрического тока j_x и j_y и величины электрического потенциала, джоулевой диссипации токов I и I_1 .

Расчеты проводились для двух профилей невозмущенной скорости

$$u_0 = 1, \quad u_0(y) = \begin{cases} \sqrt{4y} & \text{при } 0 \leq y \leq 0.25 \\ 1 & \text{при } 0.25 < y < 0.75 \\ \sqrt{4-4y} & \text{при } 0.75 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

В качестве приложенного магнитного поля b_e рассматривались функции

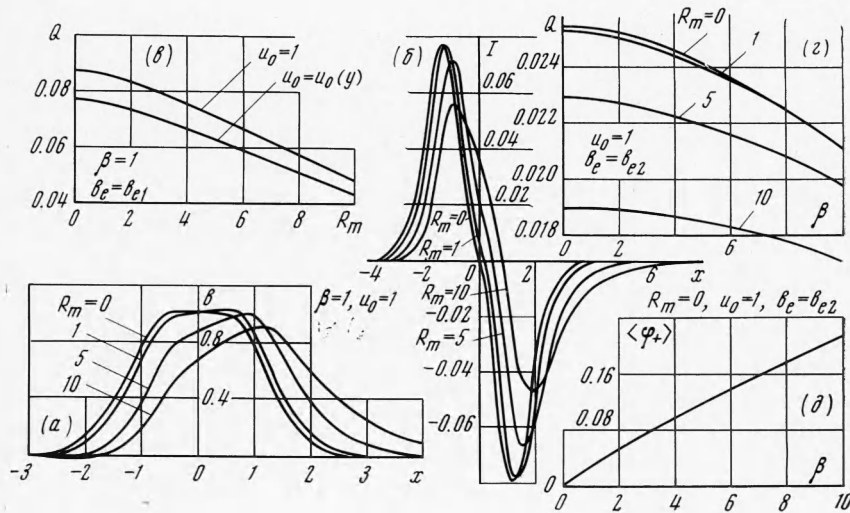
$$b_{e1} = \begin{cases} e^{-x^*} & \text{при } x < -0.5, x > +0.5 \\ 1 & \text{при } -0.5 \leq x \leq +0.5 \end{cases}, \quad x^* = \begin{cases} x + 0.5 & \text{при } x < 0 \\ x - 0.5 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

$$b_{e2} = \frac{e^{\pi x^*/2}}{\sqrt{1 + e^{\pi x^*}}}, \quad x^* = \frac{x}{1.2}$$

Функции b_{e1} и b_{e2} и профили скоростей $u_0 = 1$ и $u_0(y)$ схематично изображены на фиг. 1.

Для контроля точности счета величина джоулевой диссипации \bar{Q} , вычисленная для случая $\beta = 0, R_m = 0, u_0 = 1, b_e = b_{e2}$, сравнивалась со значением \bar{Q} , полученным методом Фурье в результате решения уравнения Лапласа для потенциала. Сравнение показало, что обе величины совпадают с точностью до первых трех значащих цифр.

Предварительные расчеты для приложенных магнитных полей b_e , имеющих точки излома (где db_e/dx терпит разрыв), показали, что в этих случаях величина b_i^* не вычисляется с требуемой точностью. Поэтому для расчетов были выбраны гладкие функции b_{e1} и b_{e2} , не имеющие точек излома. Поле b_{e1} соответствует прохождению потока через зоны входа и выхода, когда передний и задний витки концевых токов взаимодействуют один с другим; поле b_{e2} соответствует случаю «чистого» входа потока в магнитное поле.



Фиг. 2

Результаты расчетов электрических характеристик канала представлены на фиг. 2.

На фиг. 2 (а) и (б) показаны зависимости суммарного магнитного поля b и тока I , протекающего через половину поперечного сечения канала, от координаты x при различных числах R_m для приложенного поля b_{e1} . Как видим, при увеличении магнитного числа Рейнольдса кривые $b(x)$ смещаются в направлении движения; это, в свою очередь, приводит к выносу токов вниз по течению газа. Увеличение R_m сопровождается уменьшением величины концевых токов.

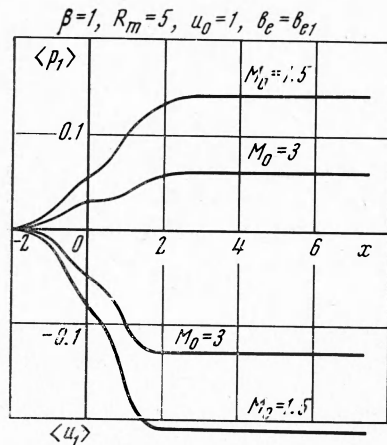
Из фиг. 2, (в, г), видно, что при возрастании параметров Холла и магнитного числа Рейнольдса джоулева диссипация уменьшается; однако при малых β и R_m ($\sim 1 \div 2$) это уменьшение незначительно.

Фиг. 2, (д) иллюстрирует увеличение продольной разности потенциалов с ростом параметра Холла β (см. 2.9).

Кроме того, из расчетов плотностей тока следует, что при наличии анизотропии проводимости происходит смещение центров витков концевых токов от оси канала к стенке (в рассматриваемом случае — к нижней стенке). Величина этого смещения невелика: при $\beta = 10$ она составляет 15% высоты канала.

4. Для вычисления средних по сечению возмущений газодинамических величин в систему (1.5) подставлялись усредненные электромагнитные силы и джоулева диссипация, найденные при решении электрической задачи. Система (1.5) интегрировалась по стандартной программе методом Рунге — Кутты. Зависимости $\langle p_1 \rangle(x)$ и $\langle u_1 \rangle(x)$, вычисленные для поля $b_e = b_{e1}$,

в случае сверхзвукового течения, приведены на фиг. 3. На кривых заметны характерные участки более резкого и менее резкого торможения потока. Участки более резкого торможения соответствуют прохождению потока через области переднего и заднего витков концевых токов. С увеличением числа M_0 абсолютная величина возмущений уменьшается. За-



Фиг. 3

метим, что уменьшение возмущений давления с ростом M_0 связано с видом безразмеривания: $p^0 = \rho^* v^2 p$; если давление относить к невозмущенному давлению $p_0^0 = p^0 (-\infty)$, то будет иметь место соотношение $p^* = p^0 / p_0^0 (-\infty) = \gamma M_0^2 p$.

Отсюда видно, что с увеличением M_0 истинные возмущения давления возрастают.

Вычисление возмущений усредненных газодинамических параметров для внешнего магнитного поля b_{e2} показало, что при прохождении потока через область одного витка концевых токов имеется только один участок резкого торможения. В остальном кривые аналогичны кривым фиг. 3.

Увеличение параметров Холла и магнитного числа Рейнольдса, как следует из расчетов, сопровождается уменьшением возмущений средних по сечению газодинамических параметров, что очевидно связано с соответствующим уменьшением джоулевой диссипации.

Расчеты, проведенные для дозвукового течения, показали, что в этом случае возмущения средней скорости положительны, а возмущения давления отрицательны.

5. Зная величины электромагнитных сил и джоулевой диссипации в любой точке канала, из решения системы (1.3) можно найти локальные возмущения газодинамических параметров. Система (1.3) решалась методом характеристик для случая сверхзвукового течения газа.

При $M_0 > 1$ существует три семейства характеристик: два семейства линий Маха (характеристики первого и второго семейств) и линии тока.

Дифференциальные уравнения характеристик первого и второго семейств и соответствующие им соотношения совместности имеют вид

$$dy = \pm k dx, \quad k = 1 / \sqrt{M_0^2 - 1} \quad (5.1)$$

$$dp_1 + (\pm k) dv_1 - \frac{\pm k (1 - a_0^2) f_y - a_0^2 f_x + q}{1 - a_0^2} dx = 0$$

Здесь знак плюс относится к характеристикам первого семейства, знак минус — к характеристикам второго семейства.

Линии тока представляют собой прямые, параллельные оси канала ($dy = 0$). Вдоль линий тока выполняются соотношения

$$du_1 + dp_1 - f_x dx = 0, \quad dp_1 - a_0^2 dv_1 - q dx = 0 \quad (5.2)$$

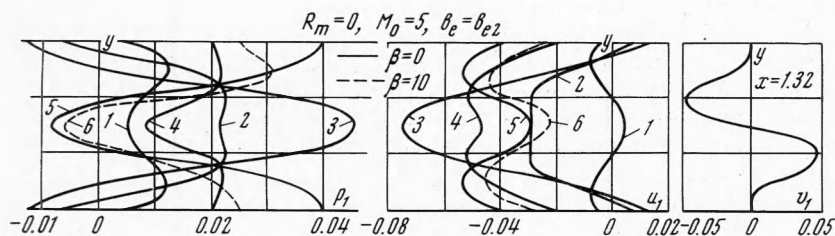
Для численного решения задачи была выбрана ортогональная сетка точек. Шаг h_y в направлении оси y принимался равным $1/12$ для $R_m = 10$ и $1/24$ для всех остальных R_m . Шаг h_x в направлении оси x определялся по формуле $h_x = h_y / 2k$.

Контроль точности счета производился из условия сохранения расхода. При $h_y = 1/12$ отличие расхода на выходе из канала от заданного расхода на входе составляет 2.4%; при $h_y = 1/24$ это отличие равно 0.1%.

Инцидированные поля b_i^* , по которым определялись электромагнитные величины x , f_y и q , входящие в (5.1) и (5.2), вычислялись с шагом $h = 0.1$.

Как видим, сетки, используемые для расчетов электрических и газодинамических параметров, не совпадают одна с другой. Для удобства назовем эти сетки соответственно сеткой 1 и сеткой 2. Значения электромагнитных величин в каждом узле сетки 2 определялись по известным значениям этих величин в четырех ближайших узлах сетки 1 при помощи линейной интерполяции по двум направлениям (x и y).

Заметим, что программа для одновременного счета с требуемой точностью всех электрических и газодинамических параметров не уместилась в оперативной памяти машины. Поэтому для повышения точности вычислений расчет возмущений локальных газодинамических параметров пришлось производить по отдельной программе, включающей в себя только часть программы для электрической задачи, относящуюся к вычислению индуцированных полей b_i^* . Время счета одного варианта составляло 5—6 мин.



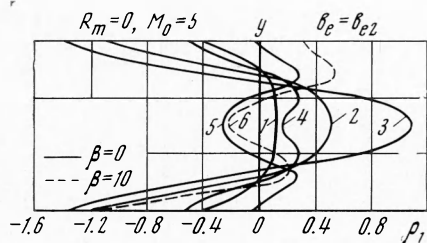
Фиг. 4

Фиг. 5

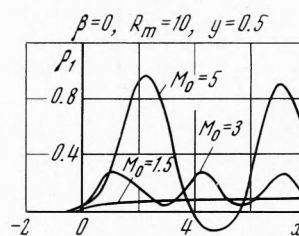
Возмущения локальных газодинамических параметров представлены на фиг. 4—7. Все зависимости, приведенные на графиках, относятся к случаю приложенного магнитного поля b_{e2} (чистый вход). Сплошные кривые на фиг. 4—6 соответствуют значениям параметров $\beta = 0, R_m = 0, M_0 = 5$; пунктирные кривые построены для случая $\beta = 10, R_m = 0, M_0 = 5$. Номера кривых соответствуют следующим значениям x :

№	1	2	3	4	5	6
$x =$	-0.317	0.5	1.32	2.85	3.56	3.44

Из фигур видно, что в зонах концевых токов газодинамические параметры распределяются по сечению канала крайне неравномерно. Токи, протекающие по газу, оказывают силовое и тепловое воздействия на сверх-



Фиг. 6



Фиг. 7

звуковой поток. В передней половине витка концевой тока продольные электромагнитные силы действуют в направлении движения и ускоряют газ; в задней половине витка электромагнитные силы направлены противоположно движению газа и тормозят его. У стенок возникают поперечные электромагнитные силы, направленные к оси канала; эти силы максимальны в сечении, проходящем через центр витка. Во всем объеме, занятом концевым током, происходит джоулево тепловыделение, тормозящее

сверхзвуковой поток. Наибольший джоулев нагрев имеет место вблизи стенок. Заметим, что передняя часть витка расположена в области, где магнитное поле мало. Поэтому здесь электромагнитные силы малы, и основное влияние на поток оказывает джоулева диссипация.

В результате указанных воздействий в области передней части витка давление у стенок повышается и отсюда по характеристикам распространяются волны сжатия (фиг. 4). В сечениях, близких к центру витка, давление на стенках уменьшается из-за поперечной электромагнитной силы; вследствие этого на некоторой части стенок возникают области разрежения. В этих областях образуются волны разрежения. Возмущения, создаваемые у стенок, распространяются по характеристикам внутрь канала и в значительной степени усиливаются на оси. Кроме того, в каждой точке существуют свои местные возмущения, которые складываются с возмущениями, приходящими в данную точку из других областей канала. Заметим, что в силу инертности газовых частиц зоны наибольшего возмущения параметров смещены вниз по течению относительно зон наибольшего силового и теплового воздействия на поток. Возмущения, возникшие в зоне неоднородного магнитного поля, не исчезают после того, как поток пройдет эту зону. Распространение и отражение от стенок возникших возмущений приводит к образованию возмущений газодинамических параметров, имеющих колебательную структуру. Аналогичные явления были замечены в работе [11]. В реальных условиях из-за наличия вязкости возмущения гасятся на некотором расстоянии от зоны концевого тока. Данное рассмотрение проводится в линейном приближении для невязкого газа, поэтому здесь возмущения не подавляются.

Возмущения продольной скорости (фиг. 5) связаны с возмущениями давления. В тех областях, где давление повышается, газ тормозится; в зонах пониженного давления появляются области относительного ускорения газа (кривые 4, 5). На стенках возмущения скорости и давления равны по абсолютной величине и обратны по знаку (это следует из (5.2) и условия $f_x = 0$ на стенках). Возмущения поперечной скорости имеют тот же порядок величины, что и возмущения продольной скорости. В среднем при прохождении зоны концевого тока газ тормозится.

Возмущения плотности показаны на фиг. 6. Как видим, возмущения плотности при больших числах Маха M_0 на порядок больше возмущений скорости и давления.

В п. 3 было указано, что анизотропия проводимости вызывает смещение центра витка концевого тока к нижней стенке канала. Вследствие этого джоулева диссипация и поперечная электромагнитная сила у нижней стенки становятся значительно больше, чем у верхней стенки, что, в свою очередь, приводит к существенной перестройке течения. Профили возмущений газодинамических величин становятся несимметричными относительно оси канала (см. пунктирные кривые на фиг. 4, 5, 6). На нижней стенке плотность уменьшается, а на верхней — увеличивается по сравнению со случаем $\beta = 0$. Таким образом, небольшая несимметрия концевого тока оказывает значительное влияние на распределение газодинамических параметров по сечению канала.

Как показали расчеты, влияние магнитного числа Рейнольдса сводится в основном к смещению токовой картины вниз по потоку. При этом распределение возмущений газодинамических параметров имеет тот же вид, что и при $R_m = 0$, но заметное возмущение течения начинается при больших значениях x , чем в случае $R_m = 0$.

Число Маха невозмущенного потока M_0 оказывает значительное влияние на возмущения газодинамических параметров (фиг. 7). Как указывалось выше, возмущения газодинамических параметров имеют колеба-

тельную структуру. При изменении M_0 характер этих колебаний меняется. Возрастание числа Маха сопровождается сильным увеличением возмущений плотности; при этом возмущения скорости и давления остаются того же порядка, что и при малых числах M_0 .

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина за полезные советы и постоянное внимание к работе и И. У. Толмач за ценные указания.

Поступила 3 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
2. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Электрические поля в каналах магнито-гидродинамических устройств. Дополнение к кн. Дж. Шерклифа «Теория электромагнитного измерения расхода». М., «Мир», 1965.
3. Voucher R. A., Ames D. B. End effect losses in dc magnetohydrodynamic generators, J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 5.
4. Козыренко В. Е. Некоторые новые закономерности в теории продольных концевых эффектов в МГД-каналах при произвольных магнитных числах Рейнольдса. Магнитная гидродинамика, 1969, т. 1—3, № 1, стр. 40—48.
5. Witalis E. A. Methods for the determination of currents and fields in steady two — dimensional MHD flow with tensor conductivity. J. Nucl. Energy, pt. C, 1966, vol. 8, № 2.
6. Witalis E. A. Incompressible steady flow with tensor conductivity leaving a transverse magnetic field. J. Nucl. Energy, pt. C, 1966, vol. 8 No. 3.
7. Коновалов А. Е. О распределении электрического тока и потенциала в плоском канале с точечными электродами. ПМТФ, 1970, № 3.
8. Ватажин А. Б. Определение параметров дозвукового течения в канале за зоной осевой неоднородности слабых возмущающих сил и источников тепла. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
9. Лобанова Л. Ф. Задача о входе сжимаемого газа в однородное магнитное поле. ПМТФ, 1964, № 6.
10. Бармин А. А., Куликовский А. Г., Лобанова Л. Ф. Линеаризованная задача о сверхзвуковом течении на входе в электродную зону магнито-гидродинамического канала. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
11. Хейнс Ф. Д., Йолер Ю. А., Элсер Э. Гидромагнитный поток с осевой симметрией в канале. В сб.: «Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели». М., Атомиздат, 1961.
12. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
13. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.