УДК 539.371

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СТРУКТУРНЫМ ПАРАМЕТРОМ

А. Ф. Ревуженко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091 Новосибирск, Россия
E-mail: revuzhenko@yandex.ru

Показано, что в плоском случае система определяющих уравнений линейной теории упругости должна содержать пять независимых уравнений. В классической теории формулируются только три уравнения, остальные два уравнения в неявном виде содержатся в постулате о диффеоморфизме — предположении о гладкости поля перемещений. Построена замкнутая модель упругости без предположения о диффеоморфизме, содержащая структурный параметр, имеющий размерность длины. Показано, что в статическом варианте макродеформации зависят от напряжений и вторых производных напряжений по координатам, в динамике имеет место дисперсия продольных и поперечных волн.

Ключевые слова: теория упругости, структура, гладкость поля смещений, дисперсия.

DOI: 10.15372/PMTF20160506

Введение. Композитные материалы широко используются в современной технике. Исследования их поведения занимают большое место в трудах академика Б. Д. Аннина. Следует отметить, что обращение к этой области представляет большой интерес как для постановки и решения теоретических задач, так и для экспериментальных исследований [1–3].

Композиционные материалы — это материалы со структурой. Исследованию математических моделей сред со структурой посвящено большое количество работ. Модели этого типа используются в ряде смежных областей: механике наноматериалов и динамике кристаллических решеток, механике зернистых сред и горных пород и т. д. [4–7]. Настоящая работа посвящена исследованию механики сред со структурой и связана с моделями самонапряженного горного массива [8, 9].

Любая сложная модель должна удовлетворять определенным условиям согласованности, например, в предельном варианте переходить в модель линейной теории упругости. Рассмотрим данную модель более подробно, так как она позволяет сделать важные обобщения. Ограничимся плоским случаем.

1. Определяющие уравнения. Для построения линейной теории упругости сначала проводится анализ деформирования элемента среды $ABCD$ (рис. 1), при этом можно оперировать значениями компонент перемещений и сил в точках A, B, C, D

$$\boldsymbol{u}(A), \quad \boldsymbol{u}(B), \quad \boldsymbol{u}(C), \quad \boldsymbol{u}(D); \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{T}_1(A), \quad \boldsymbol{T}_1(C), \quad \boldsymbol{T}_2(B), \quad \boldsymbol{T}_2(D), \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-17-10121).

© Ревуженко А. Ф., 2016

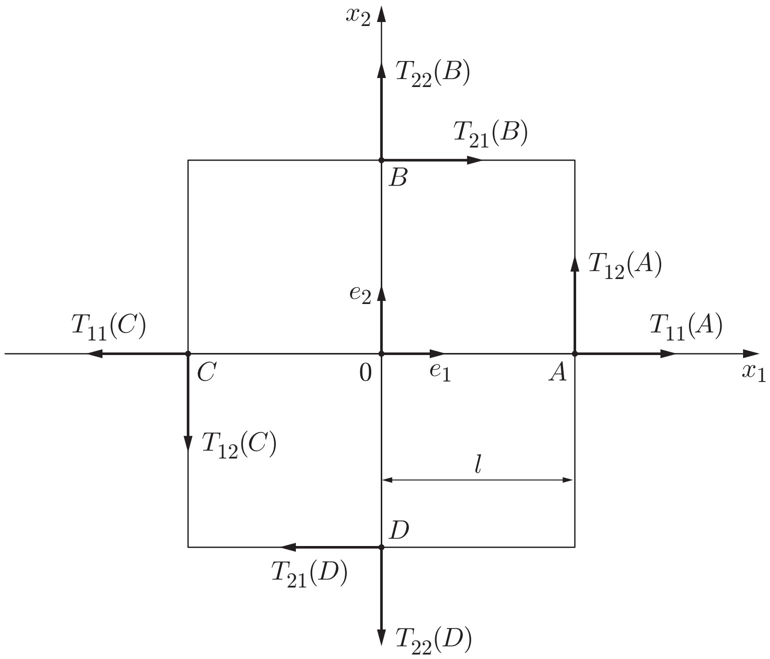

Рис. 1. Элементарный объем деформируемой среды

где

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{T}_1 = T_{11}\boldsymbol{e}_1 + T_{12}\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{T}_2 = T_{21}\boldsymbol{e}_1 + T_{22}\boldsymbol{e}_2,$$

$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — базис в системе координат Ox_1x_2.

Полагается, что силы распределены по сторонам элемента равномерно, поэтому сосредоточенные моменты отсутствуют и соответствующего поворота сторон элемента не происходит. Это означает, что список переменных (1.1), (1.2) для описания состояния элемента можно считать исчерпывающим.

Далее предполагается, что элемент находится в условиях однородного напряженного состояния:

$$\boldsymbol{T}_1(C) = -\boldsymbol{T}_1(A), \qquad \boldsymbol{T}_2(D) = -\boldsymbol{T}_2(B) \tag{1.3}$$

($T_{21} = T_{12}$). В результате анализа смещений получаем три уравнения относительно деформаций и напряжений (закон Гука). На следующем шаге рассматривается тот же элемент, однако условие однородности (1.3) снимается. В результате получаются еще два уравнения.

Таким образом, имеет место логическая непоследовательность: в первом случае ставятся условия (1.3) и получаются определяющие уравнения, во втором случае те же условия снимаются и получаются уравнения равновесия. Затем все уравнения объединяются в систему.

Более последовательным было бы выводить все уравнения, не используя условия (1.3). Отметим следующее: из восьми скалярных кинематических характеристик (1.1) необходимы только те, которые не зависят от трансляции и поворота элемента как жесткого целого (три степени свободы). Остается пять степеней свободы. В (1.2) также содержится восемь скалярных силовых характеристик. Условия равновесия исключают три степени свободы. Остается пять степеней. Следовательно, определяющие уравнения должны представлять собой пять соотношений относительно пяти инвариантных комбинаций компонент (1.1) и пяти комбинаций компонент (1.2). Однако в плоском случае для упругого тела имеем три определяющих уравнения. Это означает, что в классической теории имеются неявные предположения, равносильные двум таким же по значимости уравнениям, что и уравнения, описывающие закон Гука. Сформулируем их явно.

Прежде всего, выберем пять инвариантных по отношению к жестким повороту и смещению комбинаций перемещений, которые можно использовать в определяющих уравнениях. Число выборов неограниченно. Рассмотрим вариант соотношений, которые наиболее близки к соотношениям линейной теории упругости:

$$\varepsilon_{11} = \frac{u_1(A) - u_1(C)}{2l}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{u_2(B) - u_2(D)}{2l},$$
$$\gamma_{12} = \frac{u_2(A) - u_2(C) + u_1(B) - u_1(D)}{2l}, \tag{1.4}$$
$$\varkappa_1 = \frac{u_1(C) + u_1(A)}{4l} - \frac{u_1(D) + u_1(B)}{4l}, \qquad \varkappa_2 = \frac{u_2(D) + u_2(B)}{4l} - \frac{u_2(C) + u_2(A)}{4l}.$$

Переменная $\varkappa_1$ имеет следующий механический смысл. Первое слагаемое в выражении для $\varkappa_1$ равно безразмерному смещению середины отрезка AC вдоль оси Ox_1, второе слагаемое — смещению середины отрезка DB. Ниоткуда не следует, что эти смещения обязательно должны быть одинаковыми. Возможное их различие описывается переменной $\varkappa_1$. Смысл переменной $\varkappa_2$ аналогичен. Данные величины можно назвать локальным изгибом (элементарного объема). Классической теории упругости соответствуют уравнения

$$\varkappa_1 = 0, \qquad \varkappa_2 = 0. \tag{1.5}$$

В явном виде они не формулируются, однако информацию о них можно найти. В теории упругости содержится постулат о диффеоморфизме [10], т. е. полагается, что все функции являются достаточно гладкими. Это означает, что локально любую функцию можно представить как линейную, например:

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \tag{1.6}$$

где $a_{11}, \ldots, a_{22} = \mathrm{const}$. Подставляя (1.6) в (1.4), получаем $\varkappa_1 \equiv 0$, $\varkappa_2 \equiv 0$. Верно и обратное. Следовательно, два уравнения (1.5) “скрыты” в постулате о диффеоморфизме.

В случае если диффеоморфизм отсутствует, можно использовать представление для перемещений в неархимедовом анализе [11]

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2), \qquad u_2 = u_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2). \tag{1.7}$$

Здесь фиксированным значениям x_1, x_2 соответствуют центры элементарных объемов; ξ_1, ξ_2 — координаты точек в пределах данных объемов. Нелинейность функций по координатам ξ_1, ξ_2 соответствует случаю $\varkappa_1 \neq 0$, $\varkappa_2 \neq 0$.

Таким образом, пять инвариантных комбинаций кинематических переменных (1.4) выбраны. Более удобно использовать восемь комбинаций переменных (1.1), выделив из них неинвариантные в отдельную группу:

$$U_1 = \frac{u_1(A) + u_1(B) + u_1(C) + u_1(D)}{4}, \qquad U_2 = \frac{u_2(A) + u_2(B) + u_2(C) + u_2(D)}{4},$$
$$\Omega = \frac{u_2(A) - u_2(C) - u_1(B) + u_1(D)}{4l}.$$

При повороте объема на угол $\alpha \ll 1$ получаем $\Omega = \alpha$.

Аналогичные построения выполним с восемью силовыми характеристиками (1.2). В качестве первых пяти комбинаций, которые можно использовать для формулировки определяющих уравнений, выберем следующие:

$$\langle t_{11} \rangle = \frac{t_{11}(A) + t_{11}(C)}{2}, \qquad \langle t_{22} \rangle = \frac{t_{22}(B) + t_{22}(D)}{2},$$

$$\langle t_{12}\rangle = \frac{1}{4}\,[t_{12}(A) + t_{12}(C) + t_{21}(D) + t_{21}(B)],$$
$$\theta_1 = \frac{\delta t_{11}}{\delta x_1} - \frac{\delta t_{21}}{\delta x_2}, \qquad \theta_2 = -\frac{\delta t_{12}}{\delta x_1} + \frac{\delta t_{22}}{\delta x_2},$$

где

$$\frac{\delta t_{11}}{\delta x_1} = \frac{t_{11}(A) - t_{11}(C)}{2l}, \qquad \frac{\delta t_{21}}{\delta x_2} = \frac{t_{21}(B) - t_{21}(D)}{2l},$$
$$\frac{\delta t_{12}}{\delta x_1} = \frac{t_{12}(A) - t_{12}(C)}{2l}, \qquad \frac{\delta t_{22}}{\delta x_2} = \frac{t_{22}(B) - t_{22}(D)}{2l}. \tag{1.8}$$

В качестве остальных трех комбинаций можно выбрать

$$F_1 = \frac{\delta t_{11}}{\delta x_1} + \frac{\delta t_{21}}{\delta x_2}, \quad F_2 = \frac{\delta t_{12}}{\delta x_1} + \frac{\delta t_{22}}{\delta x_2}, \quad M = \frac{t_{12}(A) + t_{12}(C) - t_{21}(B) - t_{21}(D)}{4}.$$

Вычислим плотность энергии W в элементарном объеме $(2l)^2$:

$$2lW = t_{11}(A)u_1(A) + t_{12}(A)u_2(A) - t_{11}(C)u_1(C) - t_{12}(C)u_2(C) +$$
$$+ t_{21}(B)u_1(B) - t_{22}(B)u_2(B) - t_{12}(D)u_1(D) - t_{22}(D)u_2(D).$$

В принятых обозначениях выражение для W можно записать в виде

$$W = \varepsilon_{11}\langle t_{11}\rangle + \varepsilon_{22}\langle t_{22}\rangle + \gamma_{12}\langle t_{12}\rangle + l\varkappa_1\theta_1 + l\varkappa_2\theta_2 + U_1F_1 + U_2F_2 + 2\Omega M.$$

Структура данного выражения определяет соответствие между кинематическими и силовыми переменными. Представляет интерес класс моделей, в которых существует функция Π пяти кинематических переменных. Данную функцию можно принять в качестве потенциала:

$$\langle t_{11}\rangle = \frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{11}}, \quad \langle t_{22}\rangle = \frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon_{22}}, \quad \langle t_{12}\rangle = \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma_{12}}, \quad l\theta_1 = \frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_1}, \quad l\theta_2 = \frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_2}.$$

Ограничимся линейным случаем, когда

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\,(\langle t_{11}\rangle - \nu\langle t_{22}\rangle), \qquad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\,(\langle t_{22}\rangle - \nu\langle t_{11}\rangle),$$
$$\gamma_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\langle t_{12}\rangle, \qquad \varkappa_1 = \xi\theta_1, \quad \varkappa_2 = \xi\theta_2, \tag{1.9}$$

E, ν, ξ — постоянные материала.

2. Движение элементарного объема в целом. Пусть $(2l)^2\rho$ — масса элементарного объема, $8l^2J$ — его момент инерции. Тогда в динамическом случае имеем

$$F_1 = \rho\,\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \qquad F_2 = \rho\,\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \qquad M = J\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}. \tag{2.1}$$

Для медленных процессов либо оба параметра ρ, J, либо один из них можно положить равным нулю.

3. Условия совместности перемещений и сил. Реальная среда представляет собой совокупность взаимодействующих друг с другом элементарных объемов. Полагается, что моменты через границы элементарных объемов не передаются. Следовательно, отсутствуют соответствующие повороты сторон элемента. Поэтому взаимодействие соседних элементов упругого тела схематически можно представить так, как это показано на рис. 2. Элементарные объемы будем называть также частицами. Схема, представленная

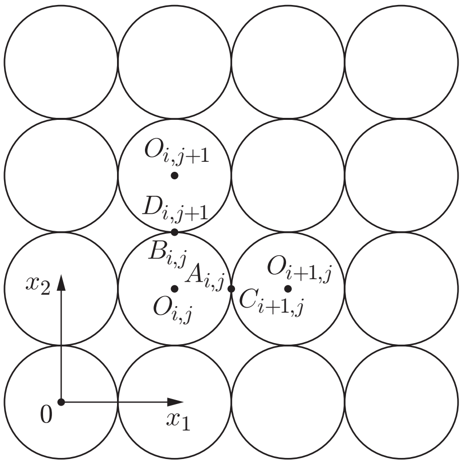

Рис. 2. Схема взаимодействия элементарных объемов

на рис. 2, удобна для дальнейших обобщений на случай горных пород с самоуравновешенными внутренними напряжениями. Рассмотрим модель линейно-упругого тела с одним структурным параметром.

Для описания взаимодействия элементарных объемов необходимы дополнительные условия совместности. В классической теории они содержатся в постулате о диффеоморфизме. Для модели со структурой данный постулат неприемлем, поэтому условия совместности должны быть сформулированы в явном виде. Для их вывода выберем занятую телом область размером $L \times L$. Пусть $l = L/(2n)$, n — натуральное достаточно большое число. (При переходе к неархимедовым моделям $n \to \omega$, где ω — эталонное актуально бесконечно большое число [11].)

Обозначим центры частиц и их стороны двумя индексами $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (см. рис. 2). Поскольку точки $A_{i,j}$ и $C_{i+1,j}$, $B_{i,j}$ и $D_{i,j+1}$ совпадают, векторы напряжений и смещений в указанных точках также должны совпадать. Условия совместности означают отсутствие разрывов на контактах. Количество таких условий должно быть равным восьми: четыре для смещений и четыре для напряжений и их градиентов. С использованием принятых обозначений получаем

$$
\begin{aligned}
u_1(A) &= U_1 + l\varkappa_1 + l\varepsilon_{11}, & u_1(C) &= U_1 + l\varkappa_1 - l\varepsilon_{11},\\
u_1(B) &= U_1 - l\varkappa_1 + l\gamma_{12}/2 - l\Omega, & u_1(D) &= U_1 - l\varkappa_1 - l\gamma_{12}/2 + l\Omega,\\
u_2(A) &= U_2 - l\varkappa_2 + l\gamma_{12}/2 + l\Omega, & u_2(C) &= U_2 - l\varkappa_2 - l\gamma_{12}/2 - l\Omega,\\
u_2(B) &= U_2 + l\varkappa_2 + l\varepsilon_{22}, & u_2(D) &= U_2 + l\varkappa_2 - l\varepsilon_{22},\\
t_{11}(A) &= \langle t_{11}\rangle + lF_1/2 + l\theta_1/2, & t_{11}(C) &= \langle t_{11}\rangle - lF_1/2 - l\theta_1/2,\\
t_{22}(B) &= \langle t_{22}\rangle + lF_2/2 + l\theta_2/2, & t_{22}(D) &= \langle t_{22}\rangle - lF_2/2 - l\theta_2/2,\\
t_{12}(A) &= \langle t_{12}\rangle + M + lF_2/2 - l\theta_2/2, & t_{12}(C) &= \langle t_{12}\rangle + M - lF_2/2 + l\theta_2/2,\\
t_{21}(B) &= \langle t_{12}\rangle - M + lF_1/2 - l\theta_1/2, & t_{21}(D) &= \langle t_{12}\rangle - M - lF_1/2 + l\theta_1/2.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Первое условие совместности имеет вид $u_1(C_{i+1,j}) = u_1(A_{i,j})$, или

$$
\begin{aligned}
&U_1(x_1+2l,x_2) + l\varkappa_1(x_1+2l,x_2) - l\varepsilon_{11}(x_1+2l,x_2) =\\
&\qquad = U_1(x_1,x_2) + l\varkappa_1(x_1,x_2) + l\varepsilon_{11}(x_1,x_2).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Аналогичный вид имеют и остальные семь уравнений. Необходимо также учитывать краевые условия. Например, для области, показанной на рис. 2, их количество равно $8n$: по два на каждые из $4n$ сторон элементарных объемов, которые образуют границу области. Указанные уравнения совместно с уравнениями (1.9), (2.1) образуют замкнутую алгебраическую систему, решение которой не вызывает затруднений.

Общие свойства подобных систем удобно исследовать, используя их дифференциальные приближения. Дифференциальные приближения высших порядков могут выявлять качественно новые свойства систем [12, 13]. Ограничимся приближением первого порядка. Предположим, что все функции в правых частях (3.1) являются гладкими. Разложим выражение (3.2) по степеням l. Рассмотрим случай, когда членами вида $l\,\partial U_1/\partial x_1$ можно пренебречь по сравнению с членами вида $l\,\partial\varkappa_1/\partial x_1$. Аналогичную процедуру выполним для остальных уравнений. В результате получаем следующие восемь условий совместности:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + l\,\frac{\partial \varkappa_1}{\partial x_1} - \varepsilon_{11}(x_1, x_2) = 0, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + l\,\frac{\partial \varkappa_2}{\partial x_2} - \varepsilon_{22}(x_1, x_2) = 0,\\
\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - l\,\frac{\partial \varkappa_2}{\partial x_1} - \frac{\gamma_{12}}{2} - \Omega(x_1, x_2) = 0, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - l\,\frac{\partial \varkappa_1}{\partial x_2} - \frac{\gamma_{12}}{2} + \Omega(x_1, x_2) = 0,\\
\frac{\partial\,\langle t_{11}\rangle}{\partial x_1} = \frac{\theta_1}{2} + \frac{F_1}{2}, \qquad \frac{\partial\,\langle t_{22}\rangle}{\partial x_2} = \frac{\theta_2}{2} + \frac{F_2}{2},\\
\frac{\partial\,\langle t_{12}\rangle}{\partial x_1} + \frac{\theta_2}{2} - \frac{F_2}{2} + \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial\,\langle t_{12}\rangle}{\partial x_2} + \frac{\theta_1}{2} - \frac{F_1}{2} - \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Используя обозначения (1.8), последние четыре уравнения запишем в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\,\langle t_{11}\rangle}{\partial x_1} = \frac{\delta t_{11}}{\delta x_1}, \qquad \frac{\partial\,\langle t_{22}\rangle}{\partial x_2} = \frac{\delta t_{22}}{\delta x_2},\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{t_{12}(A) + t_{12}(C)}{2} = \frac{\delta t_{12}}{\delta x_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\,\frac{t_{21}(D) + t_{21}(B)}{2} = \frac{\delta t_{21}}{\delta x_2}.
\end{gathered}$$

4. Замкнутая модель. Система восьми уравнений совместности (3.3) замыкается пятью определяющими уравнениями (1.9) и тремя уравнениями движения (2.1), т. е. имеем 16 уравнений относительно следующих 16 неизвестных:

$$U_1,\ U_2,\ \varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \gamma_{12},\ \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \Omega,\ \langle t_{11}\rangle,\ \langle t_{22}\rangle,\ \langle t_{12}\rangle,\ F_1,\ F_2,\ \theta_1,\ \theta_2,\ M. \tag{4.1}$$

Заметим, что перемещения u_1, u_2 в числе неизвестных (4.1) не содержатся, их можно определить по формулам (3.1) после решения задачи относительно переменных (4.1).

Условиям (3.1) можно удовлетворить, ограничиваясь квадратичными членами в (1.7):

$$\begin{gathered}
u_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = U_1(x_1, x_2) + \varepsilon_{11}\xi_1 + \frac{\gamma_{12}}{2}\,\xi_2 - \Omega\xi_2 + \frac{\varkappa_1}{l}\,\xi_1^2 + C_1(x_1, x_2)\xi_1\xi_2 - \frac{\varkappa_1}{l}\,\xi_2^2,\\
u_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = U_2(x_1, x_2) + \varepsilon_{22}\xi_2 + \frac{\gamma_{12}}{2}\,\xi_1 + \Omega\xi_1 - \frac{\varkappa_2}{l}\,\xi_1^2 + C_2(x_1, x_2)\xi_1\xi_2 + \frac{\varkappa_2}{l}\,\xi_2^2.
\end{gathered}$$

Вид произвольных функций C_1, C_2 можно выбрать исходя из дополнительных условий. Локальная неаффинность поля перемещений означает, что продлить его гладким образом на всю плоскость невозможно. Локальные значения деформаций и напряжений учитываются при формулировке критериев разрушения или перехода среды в пластическое состояние.

Из замкнутой системы (4.1) бо́льшую часть неизвестных можно исключить. Например, в статическом случае нетрудно получить систему пяти уравнений относительно напряжений и смещений

$$\frac{\partial\,\langle t_{11}\rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial\,\langle t_{12}\rangle}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial\,\langle t_{12}\rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial\,\langle t_{22}\rangle}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E}\left(\langle t_{11}\rangle - \nu\langle t_{22}\rangle\right) - 2l\xi\,\frac{\partial^2\langle t_{11}\rangle}{\partial x_1^2}, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{1}{E}\left(\langle t_{22}\rangle - \nu\langle t_{11}\rangle\right) - 2l\xi\frac{\partial^2\langle t_{22}\rangle}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\langle t_{12}\rangle - l\xi\Delta\langle t_{12}\rangle,$$

где Δ — оператор Лапласа.

На примере одномерного решения, зависящего от x_1 и t, рассмотрим динамические уравнения с учетом структуры. Определяющие уравнения и уравнения движения остаются без изменений. Условия совместности упрощаются:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + l\,\frac{\partial \varkappa_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}, \qquad \varepsilon_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - l\frac{\partial \varkappa_2}{\partial x_1} = \frac{\gamma_{12}}{2} + \Omega, \qquad \Omega = \frac{\gamma_{12}}{2},$$

$$\frac{\partial\,\langle t_{11}\rangle}{\partial x_1} - \frac{\theta_1 + F_1}{2} = 0, \qquad \frac{\partial\,\langle t_{12}\rangle}{\partial x_1} + \frac{\theta_2 - F_2}{2} + \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0,$$

$$\theta_1 - F_1 = 0, \qquad \theta_2 + F_2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$\varkappa_1 = \xi\rho\,\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \qquad \varkappa_2 = -\xi\rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} = \frac{1-\nu^2}{E}\,\rho\,\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - l\xi\rho\,\frac{\partial^4 U_1}{\partial t^2\,\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + \frac{J}{2\rho}\,\frac{\partial^4 U_2}{\partial x_1^2\,\partial t^2} + Jl\xi\,\frac{\partial^6 U_2}{\partial t^4\,\partial x_1^2}.$$

Оба уравнения допускают разделение переменных. Рассмотрим решения для плоских продольных и поперечных волн

$$U_1 = \mathrm{e}^{i(q_1 x_1 - \omega_1 t)}, \qquad U_2 = \mathrm{e}^{i(q_2 x_1 - \omega_2 t)},$$

где q_1, q_2, ω_1, ω_2 — свободные постоянные.

Дисперсионные соотношения имеют вид

$$\omega_1^2 = q_1^2\Big(\frac{1-\nu^2}{E}\,\rho + l\xi\rho q_1^2\Big)^{-1}, \qquad q_2^2 = \omega_2^2\Big(\frac{E}{2(1+\nu)}\,\frac{1}{\rho} - \frac{J}{2\rho}\,\omega_2^2 + Jl\xi\omega_2^4\Big)^{-1}.$$

Следовательно, и продольные, и поперечные волны обладают дисперсией. Дисперсия продольных волн обусловлена только наличием у среды структуры. Дисперсия поперечных волн обусловлена учетом динамики вращения. Влияние структуры является существенным лишь в следующем приближении.

Заключение. В работе построена замкнутая математическая модель деформирования линейно-упругой среды со структурой. В отличие от классических теорий предположение о гладкости поля перемещений не вводится. Получена система уравнений квазистатического деформирования. В динамических уравнениях учитывается динамика вращения. Приведены дисперсионные соотношения для плоских продольных и поперечных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Н. Каламкаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
2. **Аннин Б. Д.** Поведение материалов в условиях сложного нагружения / Б. Д. Аннин, В. М. Жигалкин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
3. **Аннин Б. Д., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Механика деформируемого твердого тела в СО АН СССР // ПМТФ. 1987. № 4. С. 66–86.
4. **Кунин И. А.** Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975.
5. **Эринген А. К.** Теория микрополярной упругости. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 646–752.
6. **Чигарев А. В.** Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. Минск: Технопринт, 2000.
7. **Павлов И. С.** Упругие волны в двумерной зернистой среде // Пробл. прочности и пластичности. 2005. Вып. 67. С. 119–131.
8. **Курленя М. В., Опарин В. Н., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** О некоторых особенностях реакции горных пород на взрывные воздействия в ближней зоне // Докл. АН. 1997. Т. 293, № 1. С. 67–70.
9. **Ревуженко А. Ф.** Горная порода — среда с внутренними источниками и стоками энергии. Сообщ. 3 // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1991. № 5. С. 20–26.
10. **Трусов П. В.** Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого тела (в порядке обсуждения) // Мат. моделирование систем и процессов. 2009. № 17. С. 85–95.
11. **Лавриков С. В., Микенина О. А., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой // Физ. мезомеханика. 2008. Т. 11, № 3. С. 45–60.
12. **Васильев В. В., Лурье С. А.** Обобщенная теория упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2015. № 4. С. 16–27.
13. **Сибиряков Б. П., Бобров Б. А.** О природе возникновения акустической эмиссии при статическом нагружении песков // Физ. мезомеханика. 2008. Т. 11, № 1. С. 80–84.

Поступила в редакцию 6/IX 2016 г.