

РАЗРЫВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНОСИММЕТРИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ
УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАЗА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. А. Скрипкин

(Москва)

Проблема рассматривается в автономной постановке. Исследуются условия на ударной волне. Для случая, когда движущийся газ сопрягается через ударную волну с покоящимся газом, дается асимптотика решений в окрестности значений $t=0$, $r=\infty$ и $t=\infty$, $r=0$. Решена задача о слете ультрарелятивистского газа к центру, схематически описывающая процесс образования центральной туманности.

1. При наличии в гравитационном поле, созданном идеальной жидкостью, центральной симметрии, уравнения А. Эйнштейна

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = -\kappa [(\varepsilon + p) u^i u^k - g^{ik} p] \quad (1.1)$$

применительно к случаю ультрарелятивистского газа с уравнением состояния

$$\varepsilon = 3p \quad (1.2)$$

в системе отсчета, в которой

$$ds^2 = Y(t, r; \sigma_1, \sigma_2, \dots) dt^2 - x(t, r; \sigma_1, \sigma_2, \dots) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2)$$

могут быть записаны в виде [1]

$$\left(\frac{Y'}{\sqrt{xY}}\right)' - \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{xY}}\right)' = \frac{2}{r^2} \sqrt{\frac{Y}{x}} (1-x) + \frac{4}{r} \left(\sqrt{\frac{Y}{x}}\right)' \quad (1.4)$$

$$4(x-1) + 2r \left(\frac{x'}{x} - \frac{Y'}{Y}\right) = r \sqrt{\left(\frac{x'}{x} + \frac{Y'}{Y}\right)^2 - 4 \frac{\dot{x}^2}{xY}} \geq 0 \quad (1.5)$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{Y}{2x} \left[\frac{4}{r} (x-1) + \frac{x'}{x} - 3 \frac{Y'}{Y} \right] \quad (1.6)$$

$$\kappa p = \frac{1}{2rx} \left[\frac{2}{r} (x-1) + \frac{x'}{x} - \frac{Y'}{Y} \right] \quad (1.7)$$

В соотношениях (1.1)–(1.7) ε — внутренняя энергия единицы объема покоящегося газа, p — давление, κ — постоянная с размерностью $T^2 M^{-1} L^{-1}$, σ_i — размерные константы, входящие в дополнительные условия, специфицирующие задачу; точка означает дифференцирование по временной координате t , штрих — по пространственной координате r .

Допустим, что среди σ_i , от которых зависят искомые функции x и Y , имеется единственная размерная константа σ с размерностью $T^{-2} L^{-m}$. Из общей теории [2] следует, что движение в этом случае будет автономным.

Положим

$$Y = \frac{r^2}{t^2} y(\xi), \quad x = x(\xi), \quad \xi = \sigma t^2 r^m \quad (1.8)$$

где y — безразмерная функция. Тогда уравнения (1.4) и (1.5) примут вид

$$\xi \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi}{\sqrt{xy}} \left(m^2 \frac{dy}{d\xi} - 4 \frac{dx}{d\xi} \right) + 6m \sqrt{\frac{y}{x}} \right] = 2 \sqrt{\frac{y}{x}} (x-3) \quad (1.9)$$

$$4x - 8 + 2m\xi \left(\frac{1}{x} \frac{dx}{d\xi} - \frac{1}{y} \frac{dy}{d\xi} \right) = \sqrt{\left[m\xi \left(\frac{1}{x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{1}{y} \frac{dy}{d\xi} \right) + 2 \right]^2 - \frac{16\xi^2}{xy} \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2} \quad (1.10)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$q = \xi \frac{dx}{d\xi} \quad (1.11)$$

и будем считать x за независимое переменное. Обозначая штрихом дифференцирование по x , будем иметь вместо (1.9), (1.10) уравнения

$$y' = \frac{2 \frac{y}{q} (x-3) - 3m \left(y' - \frac{y}{x} \right) + (m^2 y' - 4) \left[\frac{q}{2} \left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{x} \right) - \frac{\partial q}{\partial x} - y' \frac{\partial q}{\partial y} \right]}{m^2 q + (m^2 y' - 4) \frac{\partial q}{\partial y'}} \quad (1.12)$$

$$4x - 8 + 2mq \left(\frac{1}{x} - \frac{y'}{y} \right) = \sqrt{\left[mq \left(\frac{1}{x} + \frac{y'}{y} \right) + 2 \right]^2 - \frac{16q^2}{xy}} \quad (1.13)$$

Из уравнения (1.13) можно выразить q через x , y , y' в виде

$$q = 2 \frac{m \left[4 - \frac{9}{x} - \frac{y'}{y} (4x-7) \right] \pm 2 \sqrt{m^2 \left[\frac{y'}{y} (x-1) + \frac{x-3}{x} \right]^2 - \frac{4}{xy} (4x^2 - 16x + 15) - m^2 \left(\frac{3y'^2}{y^2} - \frac{10y'}{xy} + \frac{3}{x^2} \right) - \frac{16}{xy}}}{\quad} \quad (1.14)$$

Таким образом, приходим к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (1.12), в которое нужно подставить q , $\partial q / \partial x$, $\partial q / \partial y$ и $\partial q / \partial y'$, определяемые при помощи (1.14). Для координатной скорости и давления, согласно (1.6), (1.7), получаем формулы

$$v = \frac{r}{t} V(x) = \frac{r}{t} y \left[\frac{2x-5}{2q} - \frac{m}{4} \left(\frac{3y'}{y} - \frac{1}{x} \right) \right] \quad (1.15)$$

$$\kappa p = r^{-2} P(x) = \frac{r^{-2}}{2x} \left[2x - 4 - mq \left(\frac{y'}{y} - \frac{1}{x} \right) \right] \quad (1.16)$$

где $V(x)$ и $P(x)$ — безразмерные скорость и давление.

2. Рассмотрим в качестве граничных условий условия на ударной волне. При этом мы предполагаем, что перед ударной волной и за ней движение газа описывается уравнениями (1.12), (1.13). Требование непрерывности потоков энергии и импульса материи и гравитационного поля через поверхность ударной волны приводит к соотношениям [1]

$$[x] = [Y] = [\dot{x}D + Y'] = 0, \quad D = \frac{dr^*(t)}{dt} \quad (2.1)$$

где квадратными скобками обозначен скачок заключенных в них величин, а $r = r^*(t)$ — закон движения ударной волны (см. также [3-7]). Калориметрическое уравнение состояния ультрарелятивистского газа (1.2) замыкает систему уравнений (1.1). Однако для полной характеристики процессов в этом газе необходимо вводить другие термодинамические функции — температуру, энтропию и т. д., привлекая для их определения соответствующие уравнения. Можно ввести в рассмотрение плотность ρ , определяя ее из уравнения, эквивалентного требованию сохранения

энтропии в частице

$$(\rho u^k)_{;k} = 0$$

где точка с запятой обозначает ковариантную производную. Тогда на поверхности ударной волны имели бы условие

$$[\rho u^0 (D - v)] = 0, \quad u^0 = (Y - xv^2)^{-1/2} \quad (2.2)$$

Воспользовавшись выражением для энтропии ультрарелятивистского газа [8]

$$S = 3 \ln p / \rho^{3/4} \quad (2.3)$$

получаем при помощи (2.2) формулу

$$\exp \left[\frac{1}{3} (S_1 - S_2) \right] = \frac{p_1}{p_2} \left\{ \frac{v_1 - D}{v_2 - D} \sqrt{\frac{Y - xv_2^2}{Y - xv_1^2}} \right\}^{3/4} \quad (2.4)$$

где индексы 1 и 2 относятся к величинам по разные стороны скачка. Для того чтобы остаться в рамках уравнения (1.2) и не вводить новых неизвестных, рассмотрим уравнение (1.5) как условие, связывающее вместе с (2.1) первые производные гравитационных потенциалов по разные стороны ударной волны. Для автомодельных движений на поверхности ударной волны

$$\xi = 1, \quad D = -\frac{2}{m} \frac{r}{t}$$

Подстановка (1.8), (1.11) в (2.1) дает

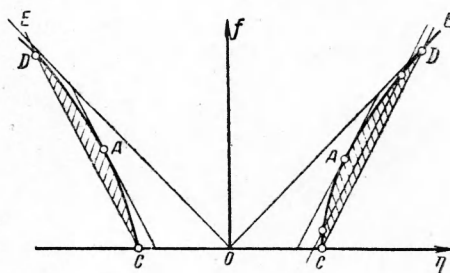
$$(m^2 y'_i - 4) q_i = (m^2 y'_2 - 4) q_2 = B \quad (2.5)$$

где B — непрерывная функция. После исключения y'_i при помощи соотношения

$$y'_i = \frac{B}{q_i m^2} + \frac{4}{m^2} \quad (i = 1, 2) \quad (2.6)$$

и введения вместо q_i новой переменной

$$\eta_i = q_i + \frac{\left(\frac{m}{x} + \frac{4}{my}\right) \left(2 + \frac{B}{my}\right)}{\left(\frac{m}{x} - \frac{4}{my}\right)^2} \quad (2.7)$$



Фиг. 1

второе условие на ударной волне, возникающее из уравнения (1.13), примет вид

$$f = 2a\eta_i + c = +\sqrt{a^2(\eta_i^2 - b^2)} \quad (2.8)$$

где

$$a = \frac{m}{x} - \frac{4}{my}, \quad b = \frac{4 \left(2 + \frac{B}{my}\right)}{\sqrt{xy} \left(\frac{m}{x} - \frac{4}{my}\right)^2}, \quad c = -\frac{4m \left(2 + \frac{B}{my}\right)}{x \left(\frac{m}{x} - \frac{4}{my}\right)} + 4(x - 1) \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) в плоскости (η, f) определяет точки пересечения прямой с угловым коэффициентом $2a$ с ветвями гиперболы, лежащими в полуплоскости $f \geq 0$, с асимптотами $f = \pm a\eta$. Области возможных двойных пересечений отмечены на фиг. 1 штриховкой. Положим

$$\eta_i |_{f=0} = -\frac{c}{2a} = nb \quad (2.10)$$

где $1/2\sqrt{3} \leq n \leq 1$. Значению $n = 1$ соответствуют точки C и D , значению $n = 1/2\sqrt{3}$ — точка A , в окрестности которой скачки y' и q становятся бесконечно малыми. На основании (2.6) — (2.10) и (4.15), (4.16) получаем

$$q_i = \frac{(x-1) \left[\pm \frac{4}{3\sqrt{xy}} (4n \pm \sqrt{4n^2-3}) - \frac{m}{x} - \frac{4}{my} \right]}{\left(\frac{m}{x} \mp \frac{2n}{\sqrt{xy}} \right) \left(\frac{m}{x} - \frac{4}{my} \right)} \quad (2.11)$$

$$y'_i = \frac{\left[(x-1) \left(\frac{m}{x} - \frac{4}{my} \right) - 2 \left(\frac{m}{x} \mp \frac{2n}{\sqrt{xy}} \right) \right] y \left(\frac{m}{x} - \frac{4}{my} \right)}{m(x-1) \left[\pm \frac{4(4n \pm \sqrt{4n^2-3})}{3\sqrt{xy}} - \frac{m}{x} - \frac{4}{my} \right]} + \frac{4}{m^2} \quad (2.12)$$

$$P_i = \pm \frac{2(x-1)(n \pm \sqrt{4n^2-3})}{3\sqrt{xy}(m \mp 2n\sqrt{x/y})} \quad (2.13)$$

$$V_i = \pm \sqrt{\frac{y}{x} (2n \mp \sqrt{4n^2-3}) \frac{\pm m\sqrt{y/x} - 2(2n \pm \sqrt{4n^2-3})}{\pm 3m\sqrt{y/x} - 2(2n \mp \sqrt{4n^2-3})}} \quad (2.14)$$

В формулах (2.11) — (2.14) верхний знак перед $\sqrt{y/x}$, \sqrt{xy} соответствует случаю $ab > 0$, нижний — случаю $ab < 0$; верхний знак перед $\sqrt{4n^2-3}$ отвечает значениям величин после скачка (участок AD), нижний — перед скачком (участок AC). В частности, в точке C , где скорость частицы достигает скорости света,

$$V_c = \pm \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad P_c = 0$$

а в соответствующей ей точке D после перехода через скачок

$$V_D = \pm \sqrt{\frac{y}{x} \frac{\pm m\sqrt{y/x} - 6}{\pm 3m\sqrt{y/x} - 2}}, \quad P_D = \frac{4(x-1)}{3x(\pm m\sqrt{y/x} - 2)}$$

В точке A , где скорость частицы достигает скорости звука,

$$V_A = \pm \sqrt{\frac{y}{3x} \frac{\pm m\sqrt{\frac{3y}{x}} - 6}{\pm m\sqrt{\frac{3y}{x}} - 2}}, \quad P_A = \frac{x-1}{\pm x\sqrt{3xy} \left(\frac{m}{x} \mp \sqrt{\frac{3}{xy}} \right)}$$

При $n > 1$ формулы (2.11), (2.12) представляют только одно решение уравнений (2.5), (2.8), отвечающее верхнему знаку перед $\sqrt{4n^2-3}$, в этом случае скачки невозможны. Поскольку безразмерная скорость ударной волны, равная $-2/m$, должна быть меньше скорости света, то

$$\frac{y}{x} > \frac{4}{m^2} \quad (2.15)$$

и, следовательно, $am > 0$ всегда. Сформулируем возможные случаи, учитывая, что $P \geq 0$, по физическому смыслу:

- (1) $a < 0$, $b < 0$, $m < 0$, $x < 1$ — разлет ($V > 0$), расходящаяся ударная волна
- (2) $a > 0$, $b < 0$, $m > 0$, $x < 1$ — слет ($V < 0$), сходящаяся ударная волна

Для случаев (1) и (2) скорости, определяемые формулой (2.11), при $1/2\sqrt{3} \leq n \leq 1$ будут больше скорости движения скачка, равной $-2/m$, и не превышать скорости света, равной $\pm\sqrt{y/x}$.

(3) $a > 0, b > 0, m > 0, x > 1$ — сходящаяся ударная волна

(4) $a < 0, b > 0, m < 0, x > 1$ — расходящаяся ударная волна

Для случаев (3) и (4) имеем, кроме того,

(a) Если $\sqrt{\frac{y}{x}} > \frac{2}{|m|} (2n + \sqrt{4n^2 - 3})$, то $\begin{cases} V_{1,2} > 0 & \text{для (3)} \\ V_{1,2} < 0 & \text{для (4)} \end{cases}$

(b) Если $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{2}{|m|} (2n + \sqrt{4n^2 - 3})$, то

$$V_1 = 0, V_2 = \frac{2}{m} \sqrt{4n^2 - 3} (2n + \sqrt{4n^2 - 3}) \quad (2.16)$$

$$P_1 = \frac{x-1}{3x}, \quad P_2 = \frac{x-1}{3x} \frac{n - \sqrt{4n^2 - 3}}{n + \sqrt{4n^2 - 3}}$$

(c) Если $\frac{2}{|m|} (2n + \sqrt{4n^2 - 3}) > \sqrt{\frac{y}{x}} > \frac{2}{|m|} (2n - \sqrt{4n^2 - 3})$, то $V_1 V_2 < 0$

(d) Если $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{2}{|m|} (2n - \sqrt{4n^2 - 3})$, то

$$V_1 = -\frac{2}{m} \sqrt{4n^2 - 3} (2n - \sqrt{4n^2 - 3}), \quad V_2 = 0 \quad (2.17)$$

$$P_1 = \frac{x-1}{3x} \frac{n + \sqrt{4n^2 - 3}}{n - \sqrt{4n^2 - 3}}, \quad P_2 = \frac{x-1}{3x}$$

(e) Если $\frac{2}{|m|} (2n - \sqrt{4n^2 - 3}) > \sqrt{\frac{y}{x}} > \frac{2}{|m|}$, то $\begin{cases} V_{1,2} < 0 & \text{для (3)} \\ V_{1,2} > 0 & \text{для (4)} \end{cases}$

Рассмотрим случай $m = -1$, что соответствует размерности σ , равной LT^{-2} . Легко видеть, что в рамках автомодельных движений $m = -1$ является единственным случаем, когда область, занятая движущимся газом, может граничить через ударную волну с покоящимся газом. Равновесие описывается следующими формулами

$$x = \frac{7}{4}, \quad Y = b\sigma r, \quad \kappa\rho = \frac{1}{r^2}, \quad \kappa\varepsilon = \frac{3}{7r^2} \quad (2.18)$$

где b — безразмерная постоянная.

Если расходящаяся ударная волна распространяется по покоящемуся впереди нее газу (2.18), то по формулам (2.11), (2.12) применительно к случаю (2.17) находим

$$q_1 = -\frac{21\sqrt{4n^2 - 3}(2n - \sqrt{4n^2 - 3})}{16(n - \sqrt{4n^2 - 3})^2}, \quad q_2 = 0 \quad (2.19)$$

$$y_1' = \frac{16(n - \sqrt{4n^2 - 3})^2(\sqrt{4n^2 - 3} - 2n)}{3\sqrt{4n^2 - 3}} + 4, \quad y_2' = \infty$$

причем

$$D = 2\frac{r}{t} > V_1 \frac{r}{t} > 0, \quad P_1 > P_2 = \frac{1}{7}, \quad V_2 = 0 \quad (2.20)$$

что соответствует переходу частицы через ударную волну из области 2 в область 1. Формула (2.4) дает для энтропии

$$\exp\left[\frac{1}{3}(S_1 - S_2)\right] = \frac{n + \sqrt{4n^2 - 3}}{n - \sqrt{4n^2 - 3}} \left(\frac{2n^2 - n\sqrt{4n^2 - 3} - 1}{\sqrt{1 - n^2}}\right)^{1/3} \geq 1 \quad (2.21)$$

Аналогично в случае, когда газ, слетаясь к центру, скачком переходит в состояние покоя (формулы (2.16)), имеем

$$q_2 = \frac{21\sqrt{4n^2 - 3}(2n + \sqrt{4n^2 - 3})}{16(n + \sqrt{4n^2 - 3})^2}, \quad q_1 = 0 \quad (2.22)$$

$$y_2' = \frac{16(n + \sqrt{4n^2 - 3})^2(2n + \sqrt{4n^2 - 3})}{3\sqrt{4n^2 - 3}} + 4, \quad y_1' = \infty$$

при этом частица опять переходит из области 2 в область 1 и

$$\exp\left[\frac{1}{3}(S_1 - S_2)\right] = \frac{n + \sqrt{4n^2 - 3}}{n - \sqrt{4n^2 - 3}} \left(\frac{\sqrt{1 - n^2}}{2n^2 + n\sqrt{4n^2 - 3} - 1}\right)^{1/3} \geq 1 \quad (2.23)$$

Заметим, что при $n \rightarrow 1$ правые части формул (2.21) и (2.23) стремятся к ∞ . Это означает, что скачок, при котором скорость частицы изменяется от скорости света до нуля, сопровождается бесконечным скачком энтропии.

3. Исследуем теперь при $m = -1$ асимптотику решений системы (1.9), (1.10) в окрестности значений $t = 0$, $r = \infty$ и $t = \infty$, $r = 0$.

Рассмотрим случай, когда $x(\xi)$ и $y(\xi)$ разлагаются в окрестности $\xi^\alpha = 0$ в ряды вида

$$x = \xi^s (a_0 + a_1 \xi^\alpha + a_2 \xi^{2\alpha} + \dots), \quad y = \xi^\tau (b_0 + b_1 \xi^\alpha + b_2 \xi^{2\alpha} + \dots) \quad (3.1)$$

где α , s , τ , a_i , b_i — постоянные. Подставляя (3.1) в уравнения (1.9), (1.10), легко показать, что решение вида (3.1) может существовать, только когда $s = 0$, $\tau = k\alpha$, где k — целое число, не превышающее 2. Разберем подробно имеющиеся здесь возможности.

1) Случай $k = 2$. Подставляя ряды (3.1) в соотношения (1.15), (1.16), получим

$$V = \frac{b_0 \xi^\alpha}{2\alpha a_1} \left\{ 2a_0 - 5 + 3\alpha + \xi^\alpha \left[2a_1 + \frac{3\alpha b_1}{2b_0} - \frac{a_1 \alpha}{2a_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + (2a_0 - 5 + 3\alpha) \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{2a_2}{a_1} \right) \right] + \dots \right\} \quad (3.2)$$

$$P = \frac{1}{2a_0} \left[2a_0 - 4 + 2\alpha + \xi^\alpha \left(\frac{\alpha b_1}{b_0} - \frac{3\alpha a_1}{a_0} + \frac{4a_1}{a_0} \right) + \dots \right] \quad (3.3)$$

Кроме того, имеем

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} \xi^\alpha \left[1 + \frac{\xi^\alpha}{2} \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right) + \dots \right] \quad (3.4)$$

Если $P > 0$ при $\xi^\alpha = 0$, то

$$\alpha > 2 - a_0 \quad (3.5)$$

В этом случае при помощи уравнений (1.9), (1.10) можно последовательно выразить a_i , b_i через a_0 , b_0 и α .

Для первых коэффициентов получаем

$$a_1^2 = \frac{a_0 b_0}{4\alpha^2} [(1 - \alpha)^2 - (2a_0 - 4 + 2\alpha)^2] \quad (3.6)$$

$$b_1 = \frac{a_1 b_0 (8a_0^2 + 4\alpha a_0 - 20a_0 - 3\alpha - \alpha^2 + 12)}{a_0 \alpha (7 - 4a_0 - 3\alpha)} \quad (3.7)$$

$$a_2 = \frac{a_1 b_1}{4b_0} - \frac{b_0}{4\alpha^2} (a_0 - 3) + \frac{b_0}{4} - \frac{3b_0}{4\alpha} + \frac{a_1^2}{4a_0}$$

На основании (3.5) и (3.6) заключаем, что либо $a_0 < 1$, $\alpha > 1$, либо $a_0 > 1$, $\alpha < 1$. Из (3.6) далее следует

$$(1 - \alpha)^2 > (2a_0 - 4 + 2\alpha)^2 + (2a_0 - 5 + 3\alpha)^2$$

Откуда, при условии (3.5),

$$0 > (\alpha - 1) + (2a_0 - 4 + 2\alpha)$$

Поскольку $2a_0 - 4 + 2\alpha > 0$, то, следовательно, если P не обращается в нуль, возможно только $a_0 > 1$, $\alpha < 1$. Тогда из (3.5) и (3.6) получаем

$$2 - \alpha < a_0 < \frac{1}{2}(5 - 3\alpha) \quad (3.8)$$

В этом случае $|V| < \sqrt{y/x}$ при малых ξ^α . Если $a_0 = 2 - \alpha$, то $V = \sqrt{y/x}$, $P = 0$ при $\xi^\alpha \rightarrow 0$. Когда $\alpha = 1$, то $a_0 = 1$, $a_i = b_i = 0$ и формулы

$$x = 1, \quad y = b_0 \xi^2, \quad \xi = \sigma t^2 / r \quad (3.9)$$

представляют точное решение системы (1.9), (1.10), соответствующее галилеевой метрике.

Если $0 < \alpha < 1$, то ξ^α мало, когда $t \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$. При $r \rightarrow \infty$ размерное давление $\kappa p = r^{-2} P$ стремится к нулю, а скорость частицы, равная в лабораторной системе координат $v \sqrt{x}$, стремится к ∞ вместе со скоростью света $\sqrt{Y/x}$. Скорость частицы, измеренная в собственном времени для данной точки пространства, равная

$$u_c = c \sqrt{\frac{x}{y}} V$$

где c — скорость света в вакууме, остается при этом меньше c . Так как, согласно (3.8),

$$2a_0 - 5 + 3\alpha < 0 \quad (3.10)$$

то $V < 0$, если $a_1 > 0$, что соответствует возрастанию x от значения a_0 при возрастании ξ^α , и $V > 0$, если $a_1 < 0$. В последнем случае x убывает. При $t = 0$

$$\kappa p = \frac{1}{a_0} (a_0 - 2 + \alpha) r^{-2}, \quad \frac{u_c}{c} = \frac{\sqrt{a_0 b_0}}{2\alpha a_1} (2a_0 - 5 + 3\alpha) \quad (3.11)$$

а v и $\sqrt{y/x}$ обращаются в нуль, если $\alpha > 1/2$, и в бесконечность, если $\alpha < 1/2$. Если $\alpha < 0$, то ξ^α мало, когда $r \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. При $r \rightarrow 0$, если $\alpha > 2 - a_0$, то $p \rightarrow \infty$, а u_c принимает значение (3.11).

При $t \rightarrow \infty$ функции p и u_c стремятся к значениям (3.11), а v и $\sqrt{y/x}$ стремятся к нулю.

2) случай $k = 1$. Тогда

$$V = \frac{b_0}{2\alpha a_1} \left\{ 2a_0 - 5 + \frac{3}{2}\alpha + \xi^\alpha \left[2a_1 + \frac{3\alpha b_1}{2b_0} - \frac{\alpha a_1}{2a_0} + \left(2a_0 - 5 + \frac{3}{2}\alpha \right) \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{2a_2}{a_1} \right) \right] + \dots \right\} \quad (3.12)$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} \xi^{\frac{\alpha}{2}} \left[1 + \frac{\xi^\alpha}{2} \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right) + \dots \right]$$

$$P = \frac{1}{2a_0} \left\{ 2a_0 - 4 + \alpha + \xi^\alpha \left[2a_1 + \frac{\alpha b_1}{b_0} - \frac{\alpha a_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} (2a_0 - 4 + \alpha) \right] + \dots \right\}$$

Требование $V < \sqrt{y/x}$ приводит к условию

$$a_0 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} \alpha$$

Так как $P = (2 - \alpha)/4$, $a_0 > 0$ при $\xi^\alpha = 0$, то $\alpha < 2$. При помощи уравнений (1.9), (1.10) находим

$$a_1 = \frac{b_0}{4\alpha^2} (\alpha - 2) (\alpha - 1), \quad b_1 = \frac{b_0^2 (\alpha - 2) (\alpha - 1) (9\alpha^2 - 21\alpha + 22)}{\alpha^2 (2\alpha - 5) (10 - 3\alpha)}$$

Тогда по (3.12)

$$V = \frac{2b_0 (4\alpha^3 - 29\alpha^2 + 46\alpha - 22)}{\alpha^2 (5 - 2\alpha) (10 - 3\alpha)} \xi^\alpha + \dots$$

Коэффициент $a_1 < 0$, когда $1 < \alpha < 2$, и, следовательно, x убывает от значения a_0 из интервала $7/4 > a_0 > 1$ при возрастании ξ^α . При $\alpha = 1$ получаем решение (2.18). Если $\alpha < 1$, то $a_1 > 0$; функция x возрастает от $a_0 > 7/4$ при возрастании ξ^α . Во всех этих случаях $V < 0$. Значение $\alpha = 2$ отвечает решению (3.9). Когда $\xi^\alpha \rightarrow 0$, то $u_c \rightarrow 0$, в отличие от случая $k = 2$.

Если $k = 0$, то решения вида (3.1) не существует. При $k < 0$ получаем решения (2.18), (3.9) и

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = b_0 \xi^3$$

которое не имеет физического смысла.

4. Рассмотрим в качестве примера задачу о слете ультрарелятивистского газа к центру, представляющую схематически процесс образования туманности. Пусть граница центрального ядра покоя, являющаяся ударной волной, внутри которой состояние газа описывается формулами (2.18), расширяется по закону

$$r = \sigma t^2 \quad (4.1)$$

Величина n в формулах (2.16), (2.22), которые определяют величины скачков функций, характеризующих движение, зависит от начальных значений упомянутых функций. Положим произвольно $n = 0.9$. Тогда на внешней стороне ударной волны будем иметь

$$x = 1.75, \quad y = 36.7054, \quad y' = 52.1587, \quad q = 0.7622 \quad (4.2)$$

$$P = 0.04215, \quad V = -2.2436, \quad \sqrt{\frac{y}{x}} = 4.5798 \quad (4.3)$$

Формула (2.23) для отношения энтропии частицы после и до прохождения скачка дает $\exp [1/3 (S_1 - S_2)] = 1.03503$.

Из уравнения (1.11) найдем

$$\xi = \exp \int_{7/4}^x \frac{d\lambda}{q(\lambda)} \quad (4.4)$$

Вычисление показывает, что в формуле для q (1.14) следует взять знак минус перед корнем. По отношению к уравнению (1.18) выражения (4.2) представляют собой данные Коши. Результат численного решения этой задачи дается в таблице. На фиг. 2 представлены графики функций $y = y(x)$ и $\sigma t^2/r = \xi(x)$, определенной по (4.4); на этой же фигуре $V(x)$ сопоставляется с функцией $\sqrt{y/x}$, представляющей собой максимально допустимые значения $V(x)$. Здесь же показан график скорости частицы u_c/c , измеренной в собственном времени для каждой точки пространства (см. (3.10)). На фиг. 3 представлен график безразмерного давления $P = P(x)$.

При удалении по r в ∞ и фиксированном t функции $x, y, P, \sqrt{y/x}$ монотонно убывают вместе с ξ . Функция $V(x)$, достигнув некоторого максимума, начинает убывать, все время приближаясь к $\sqrt{y/x}$, и равняется значению этой функции, только когда обращается в нуль. u_c при этом монотонно возрастает, оставаясь, однако, всюду меньше скорости света в пустоте c . Точка $\xi = 0, y = 0, x = a_0$ является особой точкой системы (1.9), (1.10). В окрестности этой точки воспользуемся асимптотическими представлениями иско- мых функций вида (3.1)–(3.3), приближенно выбирая

$$\alpha = 0.9116, a_0 = 1.09, b_0 = 87.4225. \quad (4.5)$$

При помощи (3.6), (3.7) получаем

$$x + 1.09 + 0.4730\xi^\alpha + 0.1474\xi^{2\alpha} + \dots$$

$$y = 87.4225\xi^{2\alpha} - 49.8508\xi^{3\alpha} + \dots \quad (4.6)$$

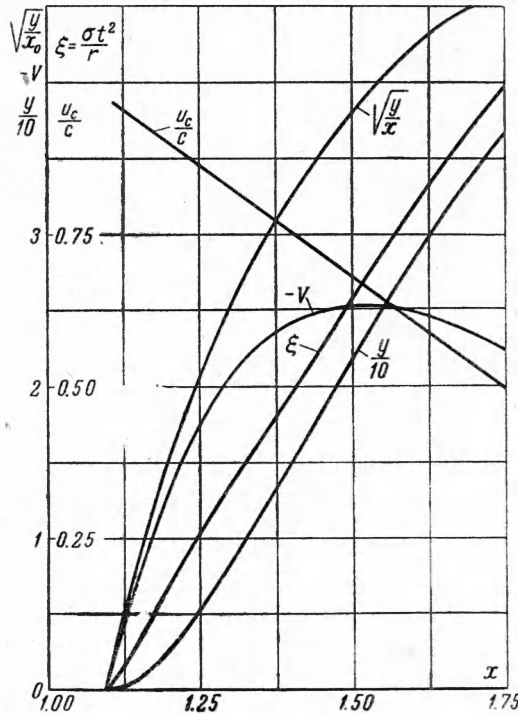
$$V = -8.6371\xi^\alpha - 2.7385\xi^{2\alpha} + \dots$$

$$P = 0.00147 + 0.0134\xi^\alpha + \dots$$

В системе координат (1.3) можно произвольно выбирать масштаб времени. Если положить

$$t^* = \frac{1}{2\alpha h} t^{2\alpha}$$

где h — постоянная с размерностью $T^{2\alpha-1}$, то при $t^* = 0$ и $r > 0$ получаются следующие



Фиг. 2

Т а б л и ц а 1

x	y	q	dx/dy	ξ	$-V$	P
1.7500	36.7054	0.7622	0.01917	1.0000	2.2437	0.04215
1.7052	34.3054	0.7065	0.01816	0.9409	2.3257	0.03815
1.6455	30.9054	0.6311	0.01700	0.8604	2.4246	0.03302
1.6056	28.5054	0.5802	0.01634	0.8054	2.4756	0.02977
1.5545	25.3054	0.5152	0.01563	0.7336	2.5192	0.02582
1.5053	22.1054	0.4532	0.01510	0.6626	2.5322	0.02224
1.4576	18.9054	0.3937	0.01477	0.5918	2.5113	0.01897
1.4106	15.7054	0.3362	0.01464	0.5201	2.4489	0.01594
1.3636	12.5054	0.2801	0.01479	0.4463	2.3308	0.01315
1.3155	9.3054	0.2242	0.01537	0.3682	2.1425	0.01062
1.2642	6.1054	0.1671	0.01685	0.2825	1.8597	0.00797
1.2362	4.5054	0.1369	0.01836	0.2347	1.6600	0.00660
1.2131	3.3054	0.1127	0.02029	0.1892	1.4640	0.00560
1.1868	2.1054	0.08585	0.02385	0.1449	1.2070	0.00452
1.1716	1.5054	0.07062	0.02718	0.1192	1.0399	0.00392
1.1601	1.1054	0.05925	0.03082	0.1017	0.9035	0.00349
1.1502	0.8054	0.04966	0.03523	0.0849	0.7805	0.00313
1.1386	0.5054	0.03849	0.04320	0.0574	0.6265	0.00275
1.1276	0.2804	0.02808	0.05641	0.0442	0.4725	0.00239
1.1231	0.2054	0.02382	0.06516	0.0371	0.4066	0.00224
1.1196	0.1554	0.02058	0.07426	0.0317	0.3547	0.00216
1.1035	0.0687	0.01240	0.11196	0.0200	0.2463	0.00185
1.0971	0.0196	0.00654	0.21169	0.0100	0.1304	0.00167
1.0900	0.0000	0.00000	$+\infty$	0.0000	0.0000	0.00147

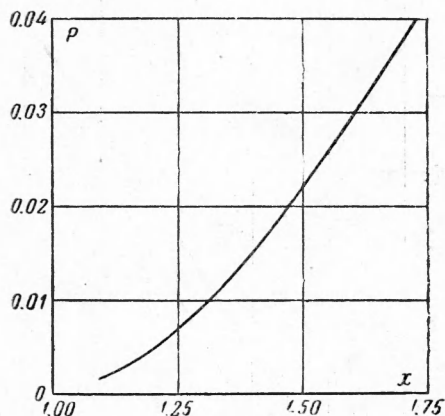
щие начальные значения для функций, характеризующих поле

$$Y^* = Y \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 = b_0 h^2 \sigma^{2\alpha} r^{2(1-\alpha)}, \quad x = a_0$$

$$\frac{dr}{dt^*} = -V_0 h \sigma^\alpha r^{1-\alpha}, \quad \kappa d = P_0 r^{-2} \quad (4.7)$$

где V_0 , P_0 — соответствующие постоянные.

Если же пользоваться собственным временем для каждой точки пространства



Фиг. 3

$$\tau = \frac{1}{c} \int_0^t V \bar{Y} dt$$

то начальные значения давления и скорости представляются формулами (3.11).

Таким образом, если в начальный момент времени осуществляется распределение давления, скорости и гравитационных потенциалов по частицам среды, близкое к тому, которое дается формулами (4.7) или (3.11), то дальнейшее движение газа будет происходить в соответствии с приведенным здесь решением.

В этой работе сделана попытка поставить и решить точно задачу о нестационарном движении сплошной среды с учетом ударных волн применительно к уравнениям общей теории относительности. Трудность и неразработанность проблемы вынуждают ограничиться сначала рассмотрением автомодельных движений. Несмотря на некоторую искусственность условий, общие закономерности движений могут быть установлены таким путем.

Поступила 13 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Скрипкин В. А. Условия на ударных волнах в общей теории относительности. ДАН 1958, т. 123, № 5.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, М., 1957, стр. 161.
3. Taub A. H. Singular Hypersurfaces in General Relativity, Illinois J. of Math., 1957, vol. 4, № 3.
4. O'Brien S. and Synge J. L. Jump Conditions at Discontinuities in General Relativity. Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Ser. A, 9, 1953.
5. Lichnerowicz A. Théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnétisme, Masson et Cie., Paris, 1955.
6. Tredner H. Über die Fortpflanzung von Störungen in allgemeinrelativistischen Feldtheorien. Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich — Schiller — Universität Jena, Jahrgang 8., 1958/59, Math. Naturwiss. Reihe. Heft 4/5.
7. Papapetrou A. und Tredner H. Das Sprungproblem erster Ordnung in der allgemeinen Relativitätstheorie. Mathematische Nachrichten, 20. 1959. Band, Heft 1—2.
8. Taub A. H. Isentropic Hydrodynamics in Plane Symmetric Space — Times. Phys. Rev., 1956, vol. 103, № 2.