

УДК 532.5:519.6

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ СТУПЕНЬКИ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

М. Г. Хажоян, Г. С. Хакимзянов

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: pmargo@ngs.ru, khak@ict.nsc.ru

Приводятся результаты расчетов обтекания потоком жидкости ступеньки, расположенной на дне канала. Численное моделирование выполнено в рамках модели потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей с использованием конечно-разностного метода на динамически адаптивных сетках. Исследовано поведение свободной поверхности в окрестности ступеньки в зависимости от скорости набегающего потока. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: идеальная жидкость, свободная граница, ступенька на дне, адаптивные сетки, профили волн.

**Введение.** В работе [1] экспериментально исследовано взаимодействие стационарного потока жидкости со ступенькой, расположенной на дне канала. Показано, что даже при докритических скоростях жидкости над ступенькой возможно образование волнистой свободной границы типа установившегося ондулярного бора, возникающего при обтекании прямоугольного порога [2]. Появление при некоторых соотношениях между высотой ступеньки и расходом жидкости такой волнообразной стационарной картины объясняется в [1] существенной неоднородностью течения в окрестности ступеньки и наблюдаемым здесь отрывом потока. Кроме того, в [1] отмечается, что даже в случае столь простого препятствия, как ступенька, в течении присутствуют докритические и сверхкритические области, застойные зоны и сложные вихревые структуры. При этом на течение оказывает влияние трение о стенки. Таким образом, для детального описания картины обтекания необходимо использовать математическую модель, учитывающую указанные выше факторы. Следует отметить, что для препятствий с гладким контуром некоторые характеристики обтекающего потока удовлетворительно предсказываются приближенными моделями. Так, в [3] приведены усовершенствованные модели мелкой воды, которые достаточно точно описывают транскритические течения над препятствиями с гладким профилем, в том числе течения с образованием гидравлических прыжков типа ондулярного бора. Для препятствий негладкой формы, например ступеньки, расчеты по модели мелкой воды при детальном описании течения дают значительные погрешности, поскольку вблизи таких препятствий основное влияние на картину течения оказывают вертикальные перемещения жидкости.

В данной работе при исследовании обтекания ступеньки используется конечно-разностный алгоритм, основанный на модели плоских потенциальных течений идеальной

---

Работа выполнена в рамках Программы комплексных интеграционных исследований СО РАН (код проекта 2006-2.12) и Программы междисциплинарных интеграционных исследований СО РАН (код проекта 2006-28).

несжимаемой жидкости со свободной границей. Эта модель также является приближенной, поскольку при ее получении многие детали реального течения не рассматриваются, но при этом учитывается изменение параметров жидкости по глубине. Поэтому в окрестности препятствия, где вертикальные ускорения жидкости могут быть сравнимы с горизонтальными и даже превышать их, можно получить более точную картину взаимодействия течений с препятствиями, чем при использовании классических моделей мелкой воды. Алгоритм расчета подробно описан в работе [4]. Там же приведены результаты расчетов зависимости разности уровней поверхности жидкости перед и за ступенькой от скорости набегающего потока. Данная работа, являющаяся продолжением исследований, начатых в [4], посвящена в основном исследованию поведения свободной границы установившегося потока в окрестности ступеньки.

**1. Метод решения.** Рассматривается плоскопараллельное течение слоя жидкости с поверхностными волнами. Снизу слой жидкости ограничен горизонтальным дном, на котором расположена ступенька высотой  $b$  бесконечной длины (рис. 1). Сверху жидкость ограничена свободной границей. Предполагается, что слева на ступеньку набегают равномерный на бесконечности поток жидкости с известной скоростью  $u_{-\infty}$ . Рассматривался слой жидкости, ограниченный слева и справа отрезками  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  вертикальных прямых  $x = 0$  и  $x = L$  соответственно ( $x$  — горизонтальная ось). На границе  $\Gamma_1$  задавался равномерный поток со скоростью  $u_{-\infty}$ , на границе  $\Gamma_2$  ставилось неотражающее краевое условие [4], которое обеспечивало свободный проход волн через эту границу.

Математическая постановка задачи для потенциальных течений заключается в определении потенциала скорости, удовлетворяющего уравнению Лапласа, и функции  $y = \eta(x, t)$  ( $y$  — вертикальная координата;  $t$  — время), описывающей свободную границу, на которой должны выполняться кинематическое и динамическое условия.

В расчетах использовались подвижные в вертикальном направлении сетки, подстраивающиеся под границы области течения, при этом в горизонтальном направлении сетка сильно сгущалась в окрестности ступеньки, а вдали от нее шаги сетки возрастали по закону геометрической прогрессии (рис. 1).

Стационарное обтекание ступеньки рассчитывалось методом установления. В начальный момент времени  $t = 0$  задавалась невозмущенная свободная граница  $\eta \equiv 0$ , а также определялись компоненты скорости, соответствующие течению жидкости в области с непроницаемыми верхней и нижней стенками и с заданными равномерным притоком через границу  $\Gamma_1$  и равномерным расходом через границу  $\Gamma_2$ . Таким образом, при  $t = 0$  задавалось стационарное течение в канале с твердой верхней стенкой  $y = 0$ . Глубина дна перед ступенькой равна  $h_0$ . При  $t > 0$  верхняя стенка убиралась, возникало существенно нестационарное течение со свободной границей, которое впоследствии становилось стационарным. На каждом временном слое вычислялись новые значения потенциала на свободной

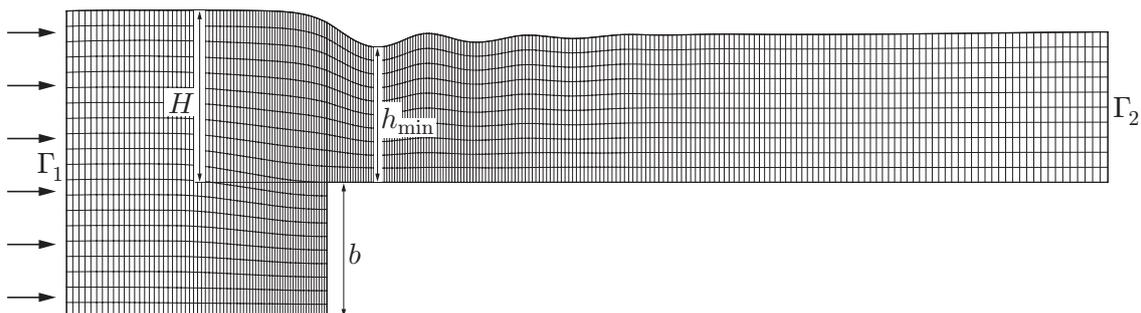


Рис. 1. Расчетная сетка и обозначения

границе, рассчитывался потенциал внутри области, определялось новое положение свободной границы для данного временного слоя и строилась сетка для следующего временного слоя.

Следует отметить некоторые отличия рассматриваемой постановки граничных условий от условий экспериментов в работе [1]. Во-первых, в данной работе на входном участке задавалась скорость втекания, а не расход жидкости. При этом напор жидкости, а следовательно, и расход на входе определялись в процессе установления течения. Во-вторых, различались условия на выходе. В экспериментах [1] вода свободно вытекала в атмосферу, в настоящих расчетах на выходе ставилось неотражающее граничное условие. Это различие приводило к отклонению расчетных профилей свободной границы от экспериментальных вблизи выхода.

**2. Результаты численного моделирования.** Численные эксперименты проводились для ступеньки, расположенной на расстоянии  $x/h_0 = 15$  от границы  $\Gamma_1$ . Граница  $\Gamma_2$  находилась на расстоянии  $x/h_0 = 120$ .

На рис. 2 показаны профили свободной границы установившегося течения при  $b/h_0 = 0,33$  и различных значениях скорости набегающего потока  $U_- = u_{-\infty}/\sqrt{gh_0}$ . Как и в экспериментах [1], при малых скоростях набегающего потока наблюдается лишь небольшое понижение уровня вблизи ступеньки (кривые 11, 12). При увеличении скорости  $u_{-\infty}$  стационарная свободная граница становится волнистой, причем длина волн также увеличивается с ростом  $u_{-\infty}$  (кривые 5–10), что также согласуется с результатами экспериментов. Наконец, начиная с некоторого значения  $u_{-\infty}$  волны на поверхности жидкости исчезают, и вдали от острой кромки ступеньки свободная граница принимает форму сглаженной полочки с постоянным уровнем.

В [1] существование волн при стационарном обтекании ступеньки объясняется отрывом потока от ступеньки. Разумеется, модель потенциальных течений идеальной жидкости, использованная в настоящих расчетах, не может воспроизвести отрыв, тем не менее в некотором диапазоне значений скорости  $u_{-\infty}$  волны на поверхности жидкости присутствуют. На рис. 3 показано поле скоростей в непосредственной близости от ступеньки

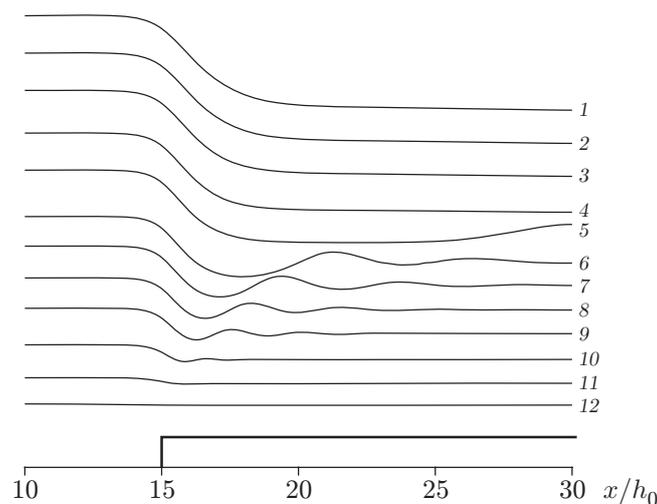


Рис. 2. Форма свободной границы при  $b/h_0 = 0,33$  и различных значениях скорости набегающего потока:

1 —  $U_- = 0,63$ ; 2 —  $U_- = 0,6$ ; 3 —  $U_- = 0,57$ ; 4 —  $U_- = 0,53$ ; 5 —  $U_- = 0,5$ ; 6 —  $U_- = 0,45$ ; 7 —  $U_- = 0,43$ ; 8 —  $U_- = 0,4$ ; 9 —  $U_- = 0,37$ ; 10 —  $U_- = 0,3$ ; 11 —  $U_- = 0,2$ ; 12 —  $U_- = 0,1$

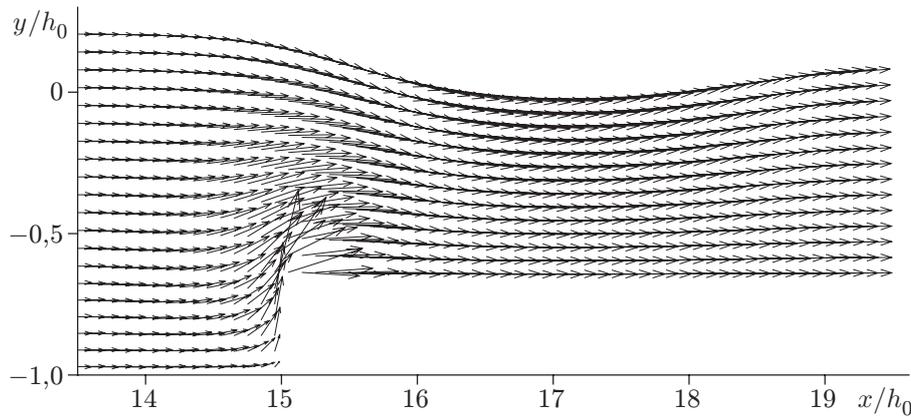


Рис. 3. Поле вектора скорости в окрестности ступеньки ( $b/h_0 = 0,33$ ,  $U_- = 0,43$ )

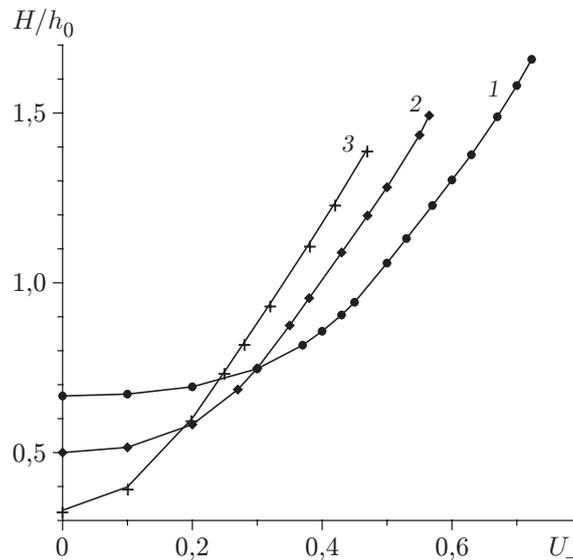


Рис. 4. Зависимость напора от скорости набегающего потока при различных значениях высоты ступеньки:

1 —  $b/h_0 = 0,33$ ; 2 —  $b/h_0 = 0,5$ ; 3 —  $b/h_0 = 0,67$

высотой  $b/h_0 = 0,33$  при  $u_{-\infty}/\sqrt{gh_0} = 0,43$  (свободной границе соответствует кривая 7 на рис. 2). Видно, что в численном эксперименте жидкость огибает кромку ступеньки без отрыва, но с очень большой скоростью, вектор которой перед кромкой направлен почти перпендикулярно основному течению. При этом зона потока, возмущенного кромкой, при средних значениях  $u_{-\infty}$  имеет большúю по сравнению с полной глубиной жидкости протяженность в вертикальном направлении. При малых или очень больших значениях  $u_{-\infty}$  относительный размер этой зоны невелик, она слабо влияет на поток над ступенькой, и, возможно, поэтому свободная граница, рассчитанная по модели потенциальных течений, в этих случаях не является волнистой.

На рис. 4 показано влияние скорости набегающего потока на напор во входном сечении при различных значениях высоты ступеньки. Видно, что с увеличением значений  $u_{-\infty}$  напор монотонно увеличивается. При малых значениях  $u_{-\infty}$  имеет место почти квадратичная зависимость  $H(u_{-\infty})$ , а при больших значениях  $u_{-\infty}$  эта зависимость является почти линейной.

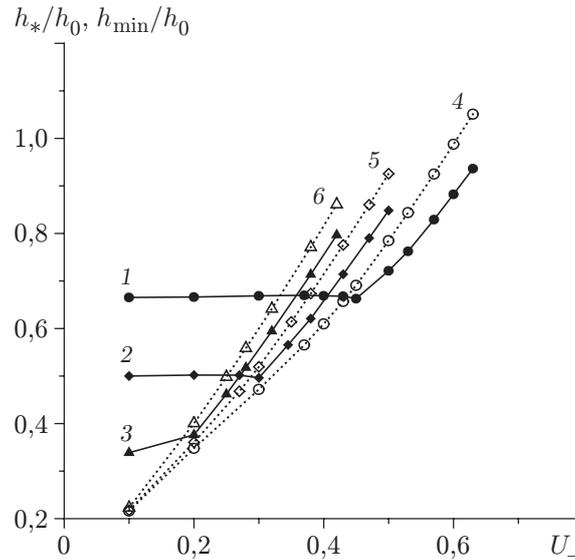


Рис. 5. Зависимость минимальной глубины  $h_{\min}/h_0$  над ступенькой (1–3) и критической глубины  $h_*/h_0$  (4–6) от скорости набегающего потока при различных значениях высоты ступеньки:

1, 4 —  $b/h_0 = 0,33$ ; 2, 5 —  $b/h_0 = 0,5$ ; 3, 6 —  $b/h_0 = 0,67$

Вычисленные значения напора  $H$  использовались при определении критической глубины жидкости в канале с горизонтальным дном за ступенькой по формуле

$$\frac{h_*}{h_0} = \left( \frac{H + b}{h_0} U_- \right)^{2/3}. \tag{1}$$

На рис. 5 соответствующие зависимости показаны кривыми 4–6. Кривыми 1–3 показана зависимость минимальной глубины  $h_{\min}$  от  $u_{-\infty}$ . Если поверхность жидкости не была волнистой, то значение  $h_{\min}$  полагалось равным постоянному уровню жидкости, который устанавливался вдали от кромки. Видно, что для каждой высоты ступеньки существует некоторое пороговое значение скорости  $u_{-\infty}^*(b)$ . При  $u_{-\infty} < u_{-\infty}^*(b)$  величина  $h_{\min}$  слабо зависит от  $u_{-\infty}$ , а при  $u_{-\infty} > u_{-\infty}^*(b)$  величина  $h_{\min}$  существенно зависит от  $u_{-\infty}$ , причем эта зависимость аналогична зависимости  $h_*(u_{-\infty})$ . Кроме того, как показано на рис. 5, в окрестности точки  $u_{-\infty}^*(b)$  происходит переход от докритического режима течения к сверхкритическому при значении числа Фруда, несколько большем единицы (критическая глубина становится больше минимальной). Более того, в окрестности точки  $u_{-\infty}^*(b)$  происходит переход от волнистой свободной границы (кривая 6 на рис. 2) к границе без волн (кривая 4).

На рис. 6 точками показан профиль свободной границы, полученный в эксперименте [1] при  $h_* = 7,45$  см,  $b = 4,85$  см, что при  $h_0 = 14,55$  см соответствует безразмерному значению  $b/h_0 = 0,33$ . Для количественного сравнения результатов численного моделирования с экспериментальными данными проведен расчет обтекания ступеньки указанной высоты при скорости набегающего потока  $U_- = 0,31$ , вычисленной по формуле (1), в которую подставлялось значение  $H + b = 16,95$  см, взятое из [1]. На рис. 6 видно, что при одних и тех же начальных данных расчетный профиль свободной границы перед ступенькой (кривая 1) находится ниже экспериментального. Соответственно меньшим получается и расход. Кроме того, в расчетах менее четко выражена волновая картина обтекания. Следует учитывать, что в реальном течении происходит отрыв потока от передней кромки ступеньки и фактически обтекается не только заданная ступенька, но и зона отрыва над

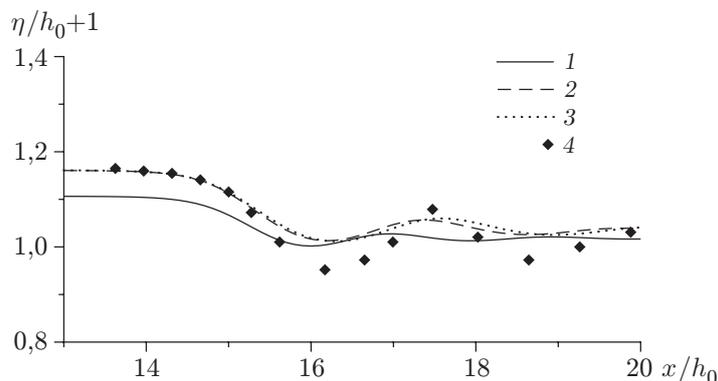


Рис. 6. Профиль установившейся свободной поверхности:

1–3 — расчет; 4 — эксперимент [1]; 1, 4 —  $b/h_0 = 0,33$ ,  $U_- = 0,31$ ; 2 —  $b/h_0 = 0,39$ ,  $U_- = 0,31$ ; 3 —  $b/h_0 = 0,33$ ,  $U_- = 0,38$

ней. Поэтому можно предположить, что при использовании в расчетах модели идеальной жидкости лучшее соответствие с экспериментальными данными будет получено для ступеньки, высота которой увеличена по сравнению с заданной на толщину зоны отрыва, или для заданной ступеньки, но при большей скорости подвода. Характер кривых 2 и 3 на рис. 6 подтверждает это предположение. Видно, что перед ступенькой профили свободной границы, полученные численно и экспериментально, совпадают. Однако и в этом случае в расчетах волны за ступенькой не столь интенсивны, как в экспериментах.

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что даже упрощенная модель, такая как модель потенциальных течений идеальной жидкости, может быть использована для предсказания картины обтекания ступеньки потоком жидкости, поскольку при ее использовании расчетные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Букреев В. И., Гусев А. В. Волны за ступенькой в открытом канале // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 62–70.
2. Букреев В. И. Ондюлярный прыжок при обтекании открытым потоком порога в канале // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 40–47.
3. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. Хажоян М. Г., Хакимзянов Г. С. Численное моделирование взаимодействия поверхностных волн с подводными препятствиями // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 108–123.

Поступила в редакцию 9/XII 2005 г.