

УДК 539.3

ДИАГРАММА КВАЗИХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ ПРИ НАЛИЧИИ КРАЕВЫХ ТРЕЩИН

В. М. Корнев, А. Г. Демешкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kornev@hydro.nsc.ru

С помощью подхода Нейбера — Новожилова получены необходимые и достаточные критерии разрушения. С использованием модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла для краевых трещин нормального отрыва, когда поперечник зоны предразрушения совпадает с поперечником зоны пластичности, получены простые соотношения для критических параметров разрушения. На основе этих соотношений возможно рассмотрение разрушения, когда длина трещины пренебрежимо мала. В широком диапазоне длин трещин предлагается рассматривать диаграмму разрушения, в которой используются критические напряжения по обоим критериям. При некотором уровне нагружения выявлены три области, в первой из которых трещина устойчива, во второй трещина подрастает, оставаясь устойчивой, в третьей трещина неустойчива. Получены экспериментальные данные о разрушении образцов с краевыми трещинами. Установлено, что теоретические критические кривые разрушения и полученные значения критических параметров для растянутых плоских образцов с двумя коллинеарными краевыми трещинами хорошо согласуются.

Ключевые слова: хрупкое и квазихрупкое разрушения, необходимые и достаточные критерии, материалы со структурой, краевая трещина.

Введение. В работе [1] подробно изложена история вопроса о развитии достаточных критериев квазихрупкой прочности. Для построения необходимых и достаточных критериев разрушения используется подход Нейбера — Новожилова [2, 3] для структурированных материалов. Достаточные критерии разрушения [1, 4, 5] найдены в рамках модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [6, 7], в которую введен помимо длины зоны предразрушения ее поперечник. Введение дополнительного параметра позволяет оценить разрушение структуры материала, расположенной в вершине реальной трещины. В тот момент, когда относительное удлинение материала этой структуры, находящейся в зоне предразрушения, достигает максимального значения, эта структура материала переходит в критическое состояние [5]. Предельное относительное удлинение материала является одним из параметров стандартной $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы материала. Построенные достаточные критерии разрушения [1, 4, 5] допускают предельный переход к необходимым критериям, когда длина зоны предразрушения стремится к нулю. Известно, что необходимые и достаточные критерии описывают хрупкое и квазихрупкое разрушения соответственно. Более корректное рассмотрение аппроксимаций решения на примере продолжения реальных трещин [1] позволяет построить решения для достаточно коротких трещин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-00220) и в рамках Программы Президиума РАН № 23.16.

1. Дискретно-интегральные критерии прочности. Рассматривается плоская краевая макротрещина нормального отрыва, расположенная по нормали к поверхности. Пусть эта трещина распространяется прямолинейно в материале с такой структурой, в которой на бесконечности заданы растягивающие напряжения σ_∞ , действующие по нормали к плоскости трещины. Кроме реальной краевой прямолинейной трещины-разреза длиной l_0 рассмотрим фиктивную трещину-разрез длиной $l = l_0 + \Delta$, зона предразрушения Δ которой расположена на продолжении реальной трещины (l, Δ — длины фиктивных трещин и зон предразрушения). Полная постановка сложной нелинейной задачи о распределении напряжений и смещений трещины нормального отрыва для упругопластических материалов рассматривается в нелинейной механике разрушения. Эту задачу предлагается существенно упростить, используя классические представления линейной механики разрушения (ЛМР), когда фиктивная трещина нормального отрыва моделируется с помощью двустороннего разреза, а нелинейность задачи обусловлена только описанием зоны предразрушения. Напомним, что согласно классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [6, 7] пластический материал зоны предразрушения стягивает берега трещины, причем ее поперечник равен нулю.

Рассмотрим поведение материала как в зоне упругости, так и при нелинейном деформировании, используя стандартную $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмму материала. Предполагается, что двухзвенная ломаная аппроксимирует реальную $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмму материала со структурой [1], причем σ_m — предел упругости, $\sigma_{m\Delta} = \text{const}$ — постоянные напряжения, действующие в зоне предразрушения. Для материалов с ярко выраженной пластичностью справедливо соотношение $\sigma_m = \sigma_{m\Delta}$. В общем случае имеем $\sigma_m \neq \sigma_{m\Delta}$, причем для материалов с упрочнением $\sigma_m < \sigma_{m\Delta}$, а для материалов с частичным разрушением $\sigma_m > \sigma_{m\Delta}$. Введем обозначения для относительных удлинений: ε_0 — предельное относительное удлинение материала в упругой области, ε_1 — предельное относительное удлинение материала в неупругой области.

В модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [6, 7] поле нормальных напряжений $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении фиктивных трещин можно представить в виде суммы двух слагаемых (начало декартовой системы координат Oxy согласовано с правой вершиной фиктивной трещины) [8]:

$$\sigma_y(x, 0) \simeq K_I / (2\pi x)^{1/2} + O(1), \quad K_I = K_{I\infty} + K_{I\Delta}, \quad K_{I\infty} > 0, \quad K_{I\Delta} < 0, \quad (1)$$

где $K_I = K_I(l, \Delta)$ — суммарные коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в вершинах фиктивных трещин; $K_{I\infty}$ — КИН, вызываемые напряжениями σ_∞ ; $K_{I\Delta}$ — КИН, вызываемые постоянными напряжениями $\sigma_{m\Delta}$. Первое и второе слагаемые в соотношении (1) — сингулярная и гладкая части решения соответственно.

При описании квазихрупкого разрушения ограничимся первым классом решений [1, 4, 5], для которого

$$K_I > 0. \quad (2)$$

Согласно подходу Нейбера — Новожилова [2, 3] возможно использование первого класса решений (2) для сред со структурой, поскольку бесконечные напряжения в вершине фиктивной трещины (см. (1), (2)), недопустимые по континуальным критериям прочности, не противоречат дискретным критериям, если сингулярная составляющая решения имеет интегрируемую особенность. Второй класс решений $K_I = 0$ для сред со структурой соответствует классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [6, 7].

При рассмотрении краевых трещин нормального отрыва предлагается использовать достаточные критерии прочности [1, 4, 5]

$$\frac{1}{kr_1} \int_0^{nr_1} \sigma_y(x, 0) dx \leq \sigma_m; \quad (3)$$

$$2\nu(x, 0) \leq \delta_m, \quad -\Delta \leq x < 0. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_y(x, 0)$ — нормальные напряжения на продолжении фиктивных трещин; Oxy — декартова прямоугольная система координат, ориентированная по нормали к границе области; n, k ($n \geq k, 1 \leq n \leq 4$) — целые числа; nr_1 — интервал осреднения; r_1 — линейный размер, характеризующий макроструктуру; $1/2 \leq (n - k)/n \leq 1$ — коэффициент поврежденности исходного материала; $2\nu = 2\nu(x, 0)$ — раскрытие фиктивной трещины; $2\nu^*(-\Delta^*, 0) = \delta_m^*$ — критическое раскрытие трещин; индекс “*” соответствует критическому состоянию. Предлагаемые критерии (3), (4) описывают хрупкое ($\Delta \equiv 0$) и квазихрупкое ($\Delta > 0$) разрушения, когда

$$\Delta^* \ll l_0. \quad (5)$$

Для того чтобы использовать достаточные дискретно-интегральные критерии (3), (4), необходимы аналитические выражения как для нормальных напряжений $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении краевых трещин $x \geq 0$, так и для раскрытия трещин $2\nu = 2\nu(x, 0)$ при $x \leq 0$.

Приведем некоторые результаты исследования полей напряжений в окрестности вершин внутренних трещин для хрупких материалов [8, 9] и диаграммы разрушения, построенные для внутренних трещин [1]. Представления нормальных напряжений (1) на продолжении внутренней трещины $\sigma_y(x, 0)$, вызываемые напряжениями σ_∞ , заданными на бесконечности, имеют вид

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_\infty |x + l_0| / \sqrt{(x + l_0)^2 - l_0^2}; \quad (6)$$

$$\sigma_y(x, 0) = K_{I\infty} / \sqrt{2\pi x} + \sigma_\infty, \quad K_{I\infty} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l_0} \quad (7)$$

(l_0 — полудлина внутренней трещины).

В случае если соотношение (6) является точным решением упругой задачи для хрупкого материала [9], соотношение (7) представляет собой сконструированную (возможно, достаточно грубую) аппроксимацию решения. Аппроксимация (7) имеет ту же особенность, что и точные решения (1), (6) в вершине трещины при $x \rightarrow 0$, и совпадает с точным решением (6) в предельном случае при $x \rightarrow \infty$, когда $\sigma_\infty = \text{const}$. После ряда преобразований (см. [1]) критические напряжения σ_∞^0 по необходимому критерию прочности при хрупком разрушении вычисляются по формулам

$$\frac{\sigma_\infty^0}{\sigma_m} = \left(\frac{n^2}{k^2} + \frac{2l_0}{r_1} \frac{n}{k^2} \right)^{-1/2}; \quad (8)$$

$$\frac{\sigma_\infty^0}{\sigma_m} = \left(\frac{n}{k} + \sqrt{\frac{2l_0}{r_1} \frac{\sqrt{n}}{k}} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Аналитические выражения (8), (9) для σ_∞^0/σ_m соответствуют соотношениям (6), (7). Очевидно, что при $l_0/r_1 \rightarrow 0$ по формулам (8), (9) получаем конечную величину σ_∞^0/σ_m , а при $l_0/r_1 \rightarrow \infty$ для этих формул справедливо асимптотическое представление

$$\sigma_\infty^0/\sigma_m \sim (k/\sqrt{n}) \sqrt{r_1/(2l_0)}. \quad (10)$$

Аналитические представления (8), (9) критических напряжений σ_∞^0/σ_m зависят от четырех параметров: длины исходной трещины l_0 , характерного линейного размера структуры r_1 (относительной длины трещины l_0/r_1), интервала осреднения nr_1 , поврежденности материала k/n в вершине трещины.

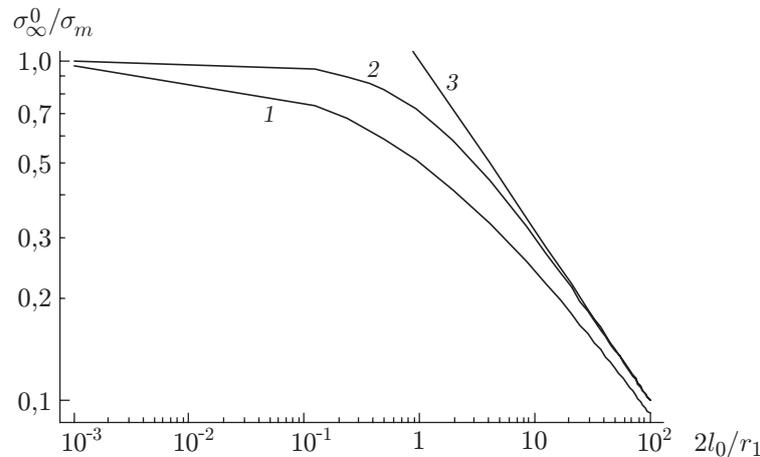


Рис. 1. Изменение критических напряжений σ_∞^0/σ_m для хрупкого материала при наличии внутренней трещины:

1 — расчет по соотношению (9) при $n = k = 1$; 2 — расчет по соотношению (8) при $n = k = 1$; 3 — расчет по ЛМР при $n = k = 1$

На рис. 1 приведены результаты расчетов критических напряжений σ_∞^0/σ_m в двойных логарифмических координатах для случая хрупкого разрушения бездефектных материалов с внутренней трещиной. Кривые 1, 2 соответствуют соотношениям (9), (8) при $n = k = 1$ (заметим, что в работе [1] перепутана нумерация кривых для аналогичного графика), кривая 3 построена по канонам ЛМР, когда в представлении решения (7) удерживается только сингулярная составляющая. При $2l_0/r_1 \simeq 1,0$ имеет место максимальное различие кривых 1 и 2, составляющее приблизительно 40 %, причем критические напряжения при $l_0/r_1 \rightarrow 0$ конечны и совпадают ($\sigma_\infty^0 = \sigma_m$); согласно канонам ЛМР при $l_0/r_1 \rightarrow 0$ критические напряжения стремятся к бесконечности, так как гладкая составляющая в окрестности вершины трещины не учитывается. Для кривой 3 имеем $\sigma_\infty^0/\sigma_m \rightarrow \infty$ при $l_0/r_1 \rightarrow 0$. Предпочтительно использовать более точное представление решения (6), поскольку оно содержит не только сингулярную часть решения, но и высшие члены разложения [10]. Следует отметить, что критическая нагрузка σ_∞^0/σ_m , рассчитанная по приближенному соотношению (9), не превышает точную оценку σ_∞^0/σ_m в (8). Очевидно, что асимптотическая оценка (10) для длинных внутренних трещин лучше согласуется с формулой (8), когда используется точное представление решения (6).

Прежде всего построим напряжения $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении краевой трещины $x \geq 0$. Рассмотрим три случая: 1) полуплоскость с перпендикулярной к ее границе краевой трещиной; 2) осевое растяжение плоского образца с одной краевой трещиной [8, 9]; 3) осевое растяжение плоского образца с двумя коллинеарными краевыми трещинами [8, 9].

Пусть ширина плоских образцов равна b . Введем номера $i = 1, 2, 3$ для рассматриваемых случаев. Тогда у ранее введенных обозначений в соотношениях (1)–(5) появятся нижние индексы, а именно $l_i, l_{0i}, \Delta_i, K_{Ii}, K_{I\infty i}, K_{I\Delta i}, \sigma_{yi}(x, 0), 2\nu_i(x, 0), \delta_{mi}$ при $i = 1, 2, 3$. Целью настоящей работы является построение аналитических формул для критических параметров разрушения и апробация этих формул на результатах натуральных экспериментов. Формулы следует построить таким образом, чтобы критические параметры разрушения для второго ($i = 2$) и третьего ($i = 3$) случаев в пределе при $b \rightarrow \infty$ совпадали с аналогичными параметрами для первого случая ($i = 1$).

По-видимому, наиболее простым для реализации в натуральных экспериментах является третий случай ($i = 3$). Первый случай ($i = 1$) частично рассматривается в работе [5]. Ана-

литические представления напряжений $\sigma_{yi}(x, 0)$ выберем таким образом [1], чтобы каждое из них применялось в одном из рассматриваемых случаев:

$$\sigma_{yi}(x, 0) = \frac{K_{I\infty i}}{\sqrt{2\pi x}} + \left[\chi_{0i} + \chi_{1i} \left(1 - \frac{2x}{b-l} \right) \right] \sigma_{\infty} + \frac{K_{I\Delta i}}{\sqrt{2\pi x}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Здесь $K_{I\infty i} = K_{I\infty i}(l_i, \sigma_{\infty}, b)$ — КИН, создаваемые напряжениями σ_{∞} и зависящие для первого случая от длин трещин l_i ($b = \infty$), а для второго и третьего случаев — еще и от ширины образцов $b < \infty$ (см. [8, 9, 11, 12]); χ_{0i}, χ_{1i} ($i = 1, 2, 3$) — коэффициенты формы образцов:

$$\chi_{01} = 1, \quad \chi_{02} = \frac{b}{b-l_2}, \quad \chi_{03} = \frac{b}{b-2l_3}, \quad \chi_{11} = 0, \quad \chi_{12} = \frac{b/l}{(b/l-1)^2}, \quad \chi_{13} = 0; \quad (12)$$

$K_{I\Delta i} = K_{I\Delta i}(l_i, \sigma_{m\Delta}, \Delta_i)$ — КИН, создаваемые постоянными напряжениями $\sigma_{m\Delta}$ и зависящие от длин трещин l_i и длин зон предразрушения Δ_i . При вычислении коэффициентов χ_{0i}, χ_{1i} используются условия равновесия для сил и моментов, т. е. не учитывается вклад сингулярных составляющих (см. [8. С. 96–98]). Следовательно, $\chi_{0i}\sigma_{\infty}$ — осредненные напряжения в образцах с учетом наличия трещин-разрезов, $\chi_{1i}[1 - 2x/(b-l)]\sigma_{\infty}$ — напряжения от изгиба в образце с одной трещиной, когда при $y \rightarrow \pm\infty$ заданы растягивающие напряжения σ_{∞} . Эти аппроксимации решений (11) соответствуют первому, второму и третьему случаям, имеют ту же особенность, что и точное решение (1) при $x \rightarrow 0$, и совпадают с решением в предельном случае $b \rightarrow \infty$ для полуплоскости при $x \rightarrow \infty$, когда $\sigma_{\infty} = \text{const}$.

Так как далее обсуждается диаграмма квазихрупкого разрушения [1] для рассматриваемых трех случаев, то для представления $K_{I\infty i}$ целесообразно использовать аппроксимирующие соотношения [8, 9, 11, 12], которые содержат отношения l_i/b при $i = 2, 3$. Выбор подобных аппроксимирующих соотношений для $K_{I\infty i}$ позволяет анализировать диаграмму квазихрупкого разрушения в широком диапазоне относительных длин трещин как по структуре материала l_i/r_1 при $i = 1, 2, 3$, так и по ширине образца l_i/b при $i = 2, 3$.

Выберем представления КИН $K_{I\infty i}$, создаваемые напряжениями σ_{∞} , в виде [8, 9, 11, 12]

$$K_{I\infty i} = Y_i \sigma_{\infty} \sqrt{\pi l_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad Y_1 = 1,12, \quad Y_2 = Y_1 + Y_{12}, \quad Y_3 = Y_1 + Y_{13}, \quad (13)$$

причем

$$\lim_{b \rightarrow \infty} Y_{1i} = 0, \quad i = 2, 3.$$

Следует отметить, что при $i = 1, 2, 3$ коэффициенты формы образцов χ_{0i}, χ_{1i} из соотношений (12) и коэффициенты Y_i из соотношений (13) не зависят от структуры материала.

Рассмотрим третье слагаемое в соотношении (11). Для полуплоскости с краевой трещиной (см. [11. С. 112–114; 12. С. 117]) КИН $K_{I\Delta 1}$, создаваемые постоянными напряжениями $\sigma_{m\Delta}$, вычисляются следующим образом:

$$K_{I\Delta 1} = -\sigma_{m\Delta} \sqrt{\pi l_1} \left[1 + f \left(1 - \frac{\Delta_1}{l_1} \right) \right] \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta_1}{l_1} \right) \right]. \quad (14)$$

Здесь $f(1 - \Delta_1/l_1)$ — некоторая функция, причем для квазихрупкого приближения имеет место оценка $0 \leq f(1 - \Delta_1/l_1) \leq 0,0138$, когда $\Delta_1/l_1 \leq 0,1$ [11, 12]. Пренебрежем величиной этой второстепенной функции при квазихрупком приближении $\Delta_1/l_1 \ll 1$ (см. (5)). При рассмотрении квазихрупкого разрушения ($\Delta_1/l_1 \ll 1$) с точностью до величин высшего порядка малости для слагаемого $\arcsin(1 - \Delta_1/l_1)$ в соотношении (14) имеем представление

$$\arcsin \left(1 - \frac{\Delta_1}{l_1} \right) \simeq \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2\Delta_1}{l_1}}, \quad \frac{\Delta_1}{l_1} \ll 1. \quad (15)$$

Примем, что соотношения (14), (15) можно использовать для второго и третьего случаев, когда длина трещины существенно меньше ширины образца, точнее, $l_i < b/4$ при $i = 2, 3$.

Таким образом, построены приближенные аналитические выражения для нормальных напряжений $\sigma_{yi}(x, 0)$ на продолжении трещины. Оценим раскрытие фиктивной трещины $2\nu_i = 2\nu_i(x, 0)$ при $x \leq 0$. В работах [1, 4, 5] предложена модифицированная модель Леонова — Панасюка — Дагдейла [6, 7], в которую введен параметр a_i ($i = 1, 2, 3$), характеризующий поперечник зоны предразрушения. В модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла рассматривается двулистное решение: на всей плоскости с двусторонним разрезом определено решение, соответствующее ЛМР, и только в зонах предразрушения (прямоугольники со сторонами Δ_i, a_i на втором листе) — решение, соответствующее нелинейной механике разрушения. Как и в классической модели [6, 7], к берегам разреза в зоне предразрушения приложены равные по абсолютной величине противоположно направленные напряжения $\sigma_{m\Delta} = \text{const}$, на $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграмме “работает” участок, соответствующий этим напряжениям. В зоне предразрушения можно рассматривать растяжение пучка волокон, так как на продолжении реальной трещины нормального отрыва имеют место только растягивающие напряжения. Толщина этих волокон равна характерному линейному размеру r_1 структуры материала.

Поперечник зоны предразрушения отождествим с поперечником зоны пластичности [1, 5, 8] при плоском напряженном состоянии в вершине реальной трещины $a_i = 5(K_{I\infty i})^2/[4\pi(\sigma_m)^2]$, $i = 1, 2, 3$. Из аппроксимации $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммы материала заимствуем параметр максимального неупругого относительного удлинения $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$. Тогда критическое раскрытие трещины δ_{mi}^* , при котором разрушается ближайшее к ее центру волокно, расположенное в зоне предразрушения, определяется с помощью формулы

$$\delta_{mi}^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

В случае плоского напряженного состояния для раскрытия $2\nu_i(-x)$ фиктивной трещины в (4) используется простейшее асимптотическое представление [8]

$$2\nu_i(-x) \simeq \frac{\eta + 1}{G} K_{Ii} \sqrt{\frac{-x}{2\pi}} + O(-x), \quad K_{Ii} > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \eta = \frac{3 - \mu}{1 + \mu} \quad (17)$$

(слагаемые порядка $O(-x)$ в асимптотическом представлении решения (17) опущены). Здесь μ — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига.

Таким образом, получены аналитические выражения как для нормальных напряжений $\sigma_{yi}(x, 0)$ на продолжении трещин $x \geq 0$ в (13), (14), так и для раскрытия трещин $2\nu_i = 2\nu_i(x, 0)$ при $x \leq 0$ в (17) и для их критических величин в (16). Используем критерий (3), (4). При получении критических величин $\sigma_{\infty i}^*$, Δ_i^* в критерии (3), (4) используются знаки равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во втором рассматриваемом случае сначала проводятся дополнительные преобразования: второй член в соотношении (11) раскладывается в ряд Маклорена ($x = 0$), удерживается только нулевой член разложения $(\chi_{02} + \chi_{12})\sigma_\infty$, когда исследуется разрушение в квазихрупком приближении (5). В первом и третьем случаях повторное разложение данного члена не требуется.

При преобразованиях в равенствах (3), (4) с учетом соотношений (1), (11)–(17) удерживаются члены с множителями $\sqrt{\Delta_i/l_i}$ и опускаются члены с множителями $\Delta_i/l_i \ll 1$. В результате для трех рассматриваемых случаев ($i = 1, 2, 3$) получаем аналитические выражения для критических напряжений $\sigma_{\infty i}^*$ и критической длины зоны предразрушения Δ_i^* для квазихрупких материалов:

$$\frac{\sigma_{\infty i}^*}{\sigma_m} = \left[\left(1 - \frac{5}{8\pi} \frac{\sigma_{m\Delta}}{\sigma_m} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) Y_i \sqrt{\frac{2l_i^*}{r_1}} \frac{\sqrt{n}}{k} + (\chi_{0i} + \chi_{1i}) \frac{n}{k} \right]^{-1}; \quad (18)$$

$$\frac{\Delta_i^*}{l_i^*} = \frac{5^2}{2^9} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right)^2 \left(Y_i \frac{\sigma_{\infty i}^*}{\sigma_m} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Здесь $l_i^* = l_{0i} + \Delta_i^*$ — критическая длина макротрещины. Выражения (18), (19) имеют смысл, если

$$1 - \frac{5}{8\pi} \frac{\sigma_{m\Delta}}{\sigma_m} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} > 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Неравенство (20) является ограничением, которое выполняется только для хрупких и квазихрупких материалов типа керамики и высокопрочных сплавов и соответствует существованию первого класса решений (2), когда опущены второстепенные слагаемые порядка $O(-x_1)$ в асимптотическом представлении решения (17). Из неравенства (20) следует, что неупругое удлинение $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ материала не должно превышать величину $5\varepsilon_0$, если $\sigma_{m\Delta}/\sigma_m = 1$.

Для соотношений (18), (19) при $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \rightarrow 1$ очевиден предельный переход, позволяющий рассмотреть разрушение хрупких материалов (для хрупких материалов зона предразрушения отсутствует: $\Delta \equiv 0$). В этом случае с помощью необходимого критерия прочности (3) критические напряжения $\sigma_{\infty i}^0$ вычисляются следующим образом:

$$\frac{\sigma_{\infty i}^0}{\sigma_m} = \left((\chi_{0i} + \chi_{1i}) \frac{n}{k} + Y_i \sqrt{\frac{2l_{0i}}{r_1}} \frac{\sqrt{n}}{k} \right)^{-1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Безразмерные критические напряжения $\sigma_{\infty i}^0/\sigma_m$ в (21) зависят от пяти параметров — длины исходной трещины l_{0i} , характерного линейного размера структуры r_1 , интервала осреднения nr_1 , поврежденности материала k/n и ширины образца b_i , а в соотношениях (18), соответствующих достаточному критерию прочности (3), (4), — от указанных пяти параметров, а также от отношений $\sigma_{m\Delta}/\sigma_m$, $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$. В зоне предразрушения отношения $\sigma_{m\Delta}/\sigma_m$ и $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$ характеризуют прочностные свойства материала и зависимость между неупругими и упругими относительными удлинениями материала соответственно. Эти два параметра отражают влияние нелинейной механики разрушения на критические параметры разрушения в рамках модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла. Следует отметить, что формулы для критических напряжений $\sigma_{\infty i}^0$ (9) и (21) согласно необходимому критерию прочности (3) при хрупком разрушении для внутренних и краевых трещин различаются.

Поскольку при наличии трещин представления решений (11) содержат сингулярную и гладкую части решений, следует получить оценки предельных случаев при $l_{0i}/r_1 \rightarrow 0$, $l_{0i}/r_1 \rightarrow \infty$ для аналитических выражений критических параметров $\sigma_{\infty i}^*(l_i^*)$, $\sigma_{\infty i}^0(l_{0i})$ соответственно из (18), (21). Эти оценки имеют вид

$$\lim_{l_{0i}/r_1 \rightarrow 0} \sigma_{\infty i}^* = \lim_{l_{0i}/r_1 \rightarrow 0} \sigma_{\infty i}^0 = \frac{k\sigma_m}{n}, \quad \lim_{l_{0i}/r_1 \rightarrow 0} (\chi_{0i} + \chi_{1i}) = 1, \quad i = 1, 2, 3; \quad (22)$$

$$\sigma_{\infty i}^0 \sim Y_i \frac{k}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{r_1}{2l_{0i}}} \sigma_m, \quad \frac{l_{0i}}{r_1} \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3; \quad (23)$$

$$\sigma_{\infty i}^* \sim \left(1 - \frac{5}{8\pi} \frac{\sigma_{m\Delta}}{\sigma_m} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right)^{-1} Y_i \frac{k}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{r_1}{2l_{0i}}} \sigma_m, \quad \frac{l_{0i}}{r_1} \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3. \quad (24)$$

В случае отсутствия трещины ($l_{0i}/r_1 \rightarrow 0$) прочность тела прямо пропорциональна напряжениям σ_m с учетом поврежденности материала как для достаточного, так и для необходимого критерия прочности (22). Для необходимого критерия прочности (23) для длинных трещин $l_{0i}/r_1 \rightarrow \infty$ прочность тела прямо пропорциональна напряжениям σ_m

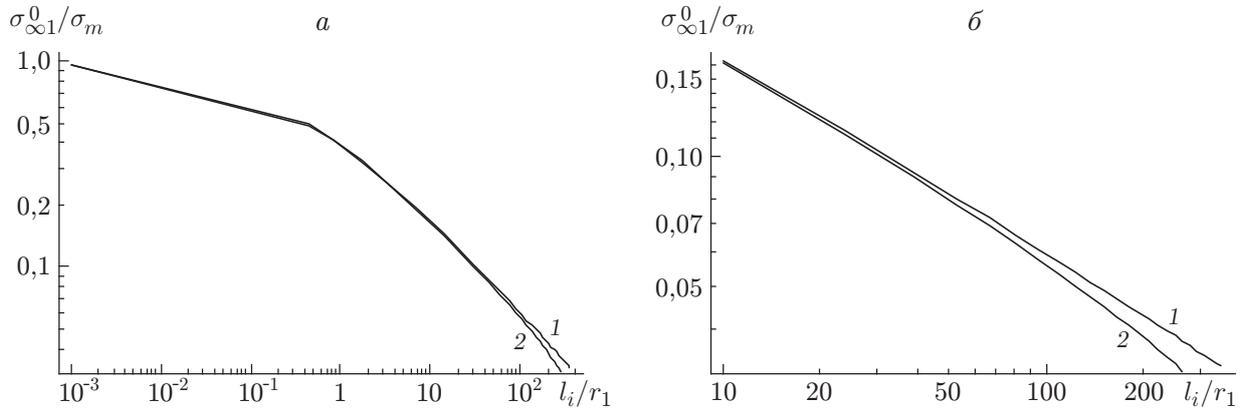


Рис. 2. Диаграммы хрупкого разрушения $\sigma_{\infty 1}^0/\sigma_m$ для образцов первого (1) и третьего (2) типов, построенные в разных масштабах при $i = 1, 3$ соответственно

с учетом поврежденности материала и обратно пропорциональна квадратному корню из относительной длины трещины l_{0i}/r_1 в структурированном материале (в выражениях (13) для Y_i принято, что отношение l_i/b является конечной величиной). В достаточном критерии прочности (24), в отличие от необходимого критерия (23) для длинных трещин $l_{0i}/r_1 \rightarrow \infty$, появляется множитель, зависящий от свойств материала в зоне предразрушения при неупругом деформировании (в выражениях (13) для Y_i принято, что отношение l_i/b является конечной величиной). Для коротких трещин ($l_{0i}/r_1 \rightarrow 0$) отсутствует зависимость оценок для $\sigma_{\infty i}^*$, $\sigma_{\infty i}^0$ от типа образца. Для длинных трещин ($l_{0i}/r_1 \rightarrow \infty$) оценки для $\sigma_{\infty i}^*$, $\sigma_{\infty i}^0$ зависят от типа образца.

Полученные предельные соотношения (22) и оценки (23), (24) позволяют утверждать, что кривые разрушения, соответствующие необходимым (21) и достаточным (18) критериям, обладают некоторой универсальностью при описании процесса разрушения. Поэтому соотношения (18), (21) можно рассматривать как структурные формулы для критических напряжений $\sigma_{\infty i}^*$, $\sigma_{\infty i}^0$ соответственно.

Результаты расчетов для критических напряжений $\sigma_{\infty 1}^0/\sigma_m$ при хрупком разрушении бездефектных материалов представлены на рис. 2 в двойных логарифмических координатах в разных масштабах. Кривые 1, 2 соответствуют соотношениям (21) при $n = k = 1$ для образцов первого ($i = 1$) и третьего ($i = 3, b/r_1 = 870$) типов. Максимальное различие этих кривых имеет место при глубоких пропилах в образцах третьего типа, когда $l_{03}/r_1 \approx 200$, что свидетельствует о влиянии конечности ширины образца на критический параметр $\sigma_{\infty 1}^0/\sigma_m$.

Очевидно, что при одной и той же длине трещины l_0 $\sigma_{\infty i}^*(l_i^*)/\sigma_m > \sigma_{\infty i}^0(l_{0i})/\sigma_m$ (см. соотношения (13)). На рис. 3 приведены диаграммы квазихрупкого разрушения для образцов первого типа ($i = 1$) в двойных логарифмических координатах (см. соотношение (13) для $i = 1$).

Рассмотрим поведение нелинейной системы, когда нагружение, такое что $\sigma_{\infty} < \sigma_{\infty i}^0$, соответствует неравенствам в достаточном критерии (3), (4). При таком слабом нагружении в рамках предлагаемой модели нелинейные эффекты не проявляются, длина исходной трещины l_i не меняется: $l_i \equiv l_{0i}$.

В случае если в достаточном критерии (3), (4) в первом соотношении (3) используется равенство, а во втором соотношении (4) — неравенство, имеет место докритическое состояние системы. Рассмотрим случай постепенного догружения в интервале нагрузок $\sigma_{\infty i}^0 < \sigma_{\infty} < \sigma_{\infty i}^*$, при котором имеет место устойчивое увеличение длины фиктивной

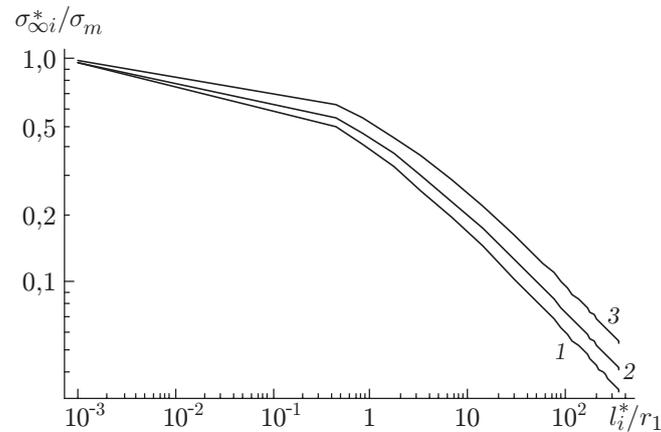


Рис. 3. Диаграммы квазихрупкого разрушения $\sigma_{\infty i}^*(l_i^*)/\sigma_m$:
 1 — хрупкий материал ($(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 0$); 2, 3 — квазихрупкие материалы
 (2 — $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 2$; 3 — $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 4$)

трещины, когда $0 \leq \Delta_i < \Delta_i^*$ и $l_i = l_{0i} + \Delta_i$. Первое соотношение в достаточном критерии (3), (4) определяет продвижение вершины фиктивной трещины.

Если в соотношениях (3), (4) реализуются равенства, то система переходит в критическое состояние. Ближайшая к середине трещины структура разрушается, поскольку $\Delta_i = \Delta_i^*$ и $l_i^* = l_{0i} + \Delta_i^*$. Неустойчивость критического состояния нелинейной системы очевидна при $\sigma_{\infty i} = \sigma_{\infty i}^*$. С помощью соотношения (4) в достаточном критерии (3), (4) контролируется обрыв силовых связей в ближайшей к середине реальной трещины структуре зоны предразрушения. Таким образом, критические нагрузки по необходимому $\sigma_{\infty i}^0$ и достаточному $\sigma_{\infty i}^*$ критериям разрушения являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы при квазихрупком разрушении.

Диаграммы для квазихрупких материалов (см. рис. 3), характеризующие состояние нелинейных систем на плоскости $(l_i/r_1, \sigma_{\infty i}/\sigma_m)$, представлены в виде пар кривых 1 и 2, 1 и 3 соответственно при $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 2$ и $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 = 4$. С помощью кривых 1 и 2 или 1 и 3 плоскость $(l_i/r_1, \sigma_{\infty i}/\sigma_m)$ разбивается на три подобласти: подобласть I расположена левее и ниже кривой 1, подобласть II заключена между кривыми 1 и 2 или 1 и 3, подобласть III расположена правее и выше кривой 2 или 3. В подобласти I длина исходной трещины не меняется (трещина устойчива), в подобласти II — увеличивается на длину зоны предразрушения (трещина подрастает, оставаясь устойчивой), в подобласти III — увеличивается катастрофически (трещина неустойчива). Предлагаемые диаграммы разрушения хорошо согласуются с результатами экспериментов, приведенными в работе [13] на рис. 1, а.

Несущая способность образцов (конструкций) с трещинами оценивается с использованием соотношений типа (18) или (21) в широком диапазоне относительных длин трещин l_{0i}/r_1 для хрупких или квазихрупких материалов. Кривые на рис. 3 можно рассматривать как критические кривые разрушения (см. [8. С. 75–76]) для хрупких и квазихрупких материалов соответственно. Натурный эксперимент, проведенный для подходящего набора относительных длин трещин l_{0i}/r_1 , позволяет оценить сопротивление конструкций с трещинами разрушению и апробировать структурные формулы (18), (21).

ЗАМЕЧАНИЕ. Далее анализируются результаты экспериментов по осевому растяжению плоского образца, изготовленного из хрупкого материала, с двумя коллинеарными краевыми трещинами, когда отсутствует запись продвижения вершины трещины. В случае если осуществляется запись продвижения вершины трещины при квазихрупком разрушении, целесообразно использовать плоский образец с одной краевой трещиной.

2. Диаграмма разрушения хрупкого материала. Для апробации предложенных критериев проведены натурные эксперименты с образцами третьего типа ($i = 3$). В качестве материала использовался сферопласт ЭДС-7А, имеющий хрупкий тип разрушения [14].

Сферопласт представляет собой композитный материал, состоящий из эпоксидно-диановой смолы со стеклянными микросферами в качестве наполнителя [15]. Для рассматриваемого сферопласта ЭДС-7А средний диаметр микросфер составляет $(30 \div 35) \cdot 10^{-6}$ м, а толщина их стенок — приблизительно 10^{-6} м. Объемная доля сферических включений достигает 60 %. В материале имеется большое количество осколков разрушенных микросфер. Поскольку материал имеет сложную структуру, механизм его разрушения зависит от многих факторов и может меняться как при изменении условий нагружения, так и вследствие наличия различных концентраторов [16–18]. Ниже в качестве концентраторов рассматриваются две коллинеарные трещины в образцах третьего типа ($i = 3$).

Плоские образцы толщиной 4,9 мм изготавливались в форме лопаток, что позволяло закреплять их концы в зажимах испытательной машины Zwick/Roell Z100. Ширина рабочей части образца составляла $b = 26$ мм. Следует отметить, что все поверхности образца шлифовались; при этом повреждались внешние поверхности стеклянных микросфер, вследствие чего при малейшей нагрузке они разрушались. При разрушении микросфер повреждалась смола между ними и формировался трещиноподобный дефект (глубина этого дефекта приблизительно равна 0,05 мм). В середине рабочей части образца третьего типа плоской фрезой (толщина фрезы 0,2 мм) симметрично выполнялись пропилы, которые имитировали краевые трещины глубиной $l_{03} = 0,3; 0,6; 3,0; 4,5; 6,0; 9,0$ мм. Длины трещин менялись в широком диапазоне. Вследствие того что микросферы повреждались фрезой, к пропилам добавлялся трещиноподобный дефект глубиной приблизительно 0,05 мм. Кроме того, испытывались образцы без видимых повреждений. Вследствие наличия на поверхности гладкого образца поврежденных микросфер целесообразно рассматривать образец с трещиноподобными дефектами, для которых $l_{03}/r_1 \approx 1$.

Результаты выполненных экспериментов приведены в таблице (P — разрушающая нагрузка в ньютонах для трещиноподобного дефекта соответствующей длины; длины трещин l_{03} указаны в миллиметрах с учетом толщины поврежденного слоя, приблизительно равной 0,05 мм; относительные длины трещин l_{03}/r_1 , за исключением значения $l_{03}/r_1 = 1$, указаны с учетом толщины поврежденного слоя образца; $\langle P \rangle$ — осредненная нагрузка; $\sigma_{\infty 3}^0$ — разрушающие напряжения в мегапаскалях (напряжения вычислялись по сечению образцов без трещин); $\langle \sigma_{\infty 3}^0 \rangle$ — осредненные напряжения). Как правило, для краевых трещин различной длины l_{03} выполнялось три эксперимента, для которых в таблице приведены разрушающие нагрузки и разрушающие напряжения. Из таблицы следует, что различие разрушающих нагрузок P и их средних значений $\langle P \rangle$ не превышало 10 %. Следует отметить, что схемы разрушения образцов с трещинами и гладких образцов существенно различались: образцы с трещинами разрушались по перемычке между трещинами, а гладкие образцы — в области перехода от рабочей части образца к захвату, т. е. в зоне концентратора напряжений. Поэтому при обработке экспериментальных данных, приведенных в первой строке таблицы ($l_{03}/r_1 = 1$), значения разрушающих нагрузок P были увеличены на 10 %, т. е. $1,1 \langle \sigma_{\infty 3}^0 \rangle = 30,47$ МПа для $l_{03}/r_1 = 1$.

С учетом оценок (22), (23) обработка экспериментальных данных проводилась в соответствии с формулой (21) следующим образом (рассматривался материал без повреждений: $n = k = 1$): 1) с использованием экспериментальных данных $1,1 \langle \sigma_{\infty 3}^0 \rangle = 30,47$ МПа при $l_{03}/r_1 = 1$ (см. таблицу) из соотношения (21) вычислялась величина $\sigma_m = \langle \sigma_{\infty 3}^0 \rangle (\chi_{03} + \sqrt{2} Y_3)$; 2) с учетом экспериментальных данных $\langle \sigma_{\infty 3}^0 \rangle = 3,4$ МПа (см. таблицу), когда величины l_{03} и σ_m известны, из соотношения (21) вычислялась величина

Разрушающие нагрузки и напряжения для образцов с трещинами различной длины

l_{03} , мм	l_{03}/r_1	P , Н	P , Н	P , Н	$\langle P \rangle$, Н	$\sigma_{\infty 3}^0$, МПа	$\sigma_{\infty 3}^0$, МПа	$\sigma_{\infty 3}^0$, МПа	$\langle \sigma_{\infty 3}^0 \rangle$, МПа
—	1,00	3591	3466	—	3528	28,2	27,2	—	27,7
0,35	4,74	2288	2469	2522	2426	17,9	19,4	19,8	19,0
0,65	8,80	2042	1905	1976	1974	16,0	14,9	15,5	15,5
3,05	41,30	932	1002	918	951	7,3	7,8	7,2	7,4
4,55	61,60	752	748	645	715	5,9	5,9	5,1	5,6
6,05	81,80	645	555	618	606	5,0	4,4	4,8	4,7
9,05	122,40	412	447	458	439	3,2	3,5	3,6	3,4

$l_{03}/r_1 = [(\sigma_m/\langle \sigma_{\infty 3}^0 \rangle - \chi_{03})/Y_3]^2/2$. Заметим, что коэффициенты χ_3 , Y_3 зависят от длины трещины.

Таким образом, получен эффективный размер структуры $r_1 = 0,0739$ мм, хорошо согласующийся с размером микросфер и прослоек между ними. По этому эффективному размеру вычислялись относительные длины трещин во второй графе таблицы, кроме значения $l_{03}/r_1 = 1$. В проведенных экспериментах относительные длины трещин изменялись на два порядка.

С помощью полученных результатов обработки экспериментов была построена кривая в соответствии со структурной формулой (21) и эффективным размером структуры $r_1 = 0,0739$ мм, когда $n = k = 1$. По результатам испытаний двух образцов (гладких или почти без трещин и с достаточно большими трещинами) на основе структурной формулы (21) построена критическая диаграмма разрушения [1, 8] в широком диапазоне относительных длин трещин. На рис. 4 приведены эти кривые в обычных и двойных логарифмических координатах и нанесены экспериментальные точки, соответствующие данным таблицы. Полученные значения критических параметров для растянутых плоских образцов с двумя коллинеарными краевыми трещинами соответствуют теоретическим критическим кривым разрушения. Следует отметить, что все экспериментальные точки, за исключением крайних (эти точки использовались при обсчете экспериментов), расположены выше указанной теоретической кривой. Последнее вполне естественно, если принять во внимание расположение кривых 1, 2 на рис. 1.

Остается открытым вопрос о более точном, чем использованное приближенное соотношение (11), представлении решения. В случае если используется подход, развитый в

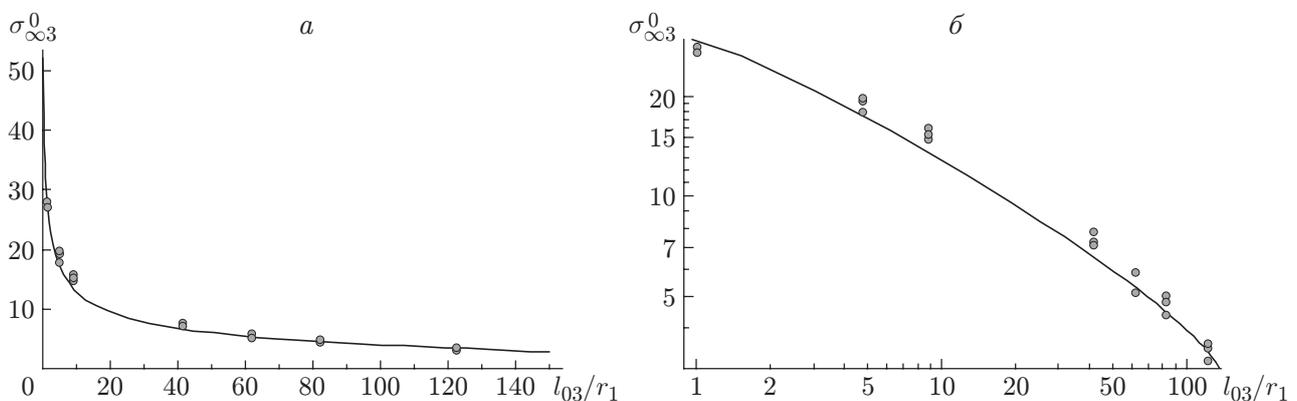


Рис. 4. Критические диаграммы хрупкого разрушения $\sigma_{\infty 3}^0$ сферопласта и критические точки, соответствующие натурному эксперименту:

a — обычные координаты, *b* — двойные логарифмические координаты

работе [19], можно ожидать, что и для разных условий испытаний возможно построение более точных разложений решений с учетом геометрии образцов и условий их испытания.

3. Обсуждение результатов. В предлагаемой модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [6, 7] для первого класса решений (2) учитывается поведение материала в зоне предразрушения, причем поперечник этой зоны определяется из дополнительных соображений; например, в данной работе он отождествляется с поперечником зоны пластичности. Таким образом, предлагаемая модель отличается от общепринятой когезионной модели [20] тем, что зоной предразрушения является материальный объект.

При построении структурных формул (18)–(21) и диаграмм разрушения для тел с краевыми трещинами при хрупком и квазихрупком разрушении использовались приближенные представления решений как для поля напряжений (11) в окрестности вершин трещин, так и для раскрытия трещин (17). Практический интерес представляют внутренние и краевые трещины в телах конечных размеров, но для таких случаев пока не существует замкнутых форм решений. Исключением является представление точного решения в виде простого соотношения (6) для задачи о трещине нормального отрыва в бесконечной однородной пластине (его использование обсуждается в [10]). Поэтому необходимо уделять большое внимание построению решений, учитывающих высшие формы разложения в асимптотических представлениях полей смещений и напряжений [19].

Известны несоответствия механического поведения реальных тел с трещинами общепринятой когезионной модели [20], описывающей только простейшие случаи разрушения (напомним, что в когезионной модели отсутствует сингулярная составляющая решения [8]). Существенные несоответствия имеют место при прочностном расчете сварных соединений с трещинами [21], так как в когезионной модели не учитываются особенности расположения основного материала и материала сварного шва в окрестности вершин трещин. В предлагаемой модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [6, 7] учитывается возможность того, что зона предразрушения зависит от расположения разных материалов в окрестности вершины трещины; например, в биматериале эта зона может быть односторонней [22].

Заключение. В широком диапазоне относительных длин краевых трещин построены диаграммы разрушения квазихрупких материалов со структурой. Предложены структурные формулы для расчета критических параметров разрушения. Получены простые аналитические представления критических параметров разрушения для двух предельных случаев, когда длины трещин пренебрежимо малы или достаточно велики. С помощью структурной формулы для случая хрупкого разрушения проведена обработка результатов натуральных экспериментов. Наблюдается хорошее соответствие теоретических критических параметров полученным значениям этих параметров для образцов, изготовленных из хрупкого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Корнев В. М.** Оценочная диаграмма квазихрупкого разрушения тел с иерархией структур. Многомасштабные необходимые и достаточные критерии разрушения // Физ. мезомеханика. 2010. Т. 13, № 1. С. 47–59.
2. **Neuber G.** Kerbspannunglehre: Grunlagen fur Genaue Spannungsrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1937.
3. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
4. **Корнев В. М.** Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 153–161.

5. **Корнев В. М.** Распределение напряжений и раскрытие трещин в зоне предразрушения (подход Нейбера — Новожилова) // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7, № 3. С. 53–62.
6. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
7. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
8. **Керштейн И. М.** Основы экспериментальной механики разрушения / И. М. Керштейн, В. Д. Клюшников, Е. В. Ломакин, С. А. Шестериков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
9. **Броек Д.** Основы механики разрушения. М.: Высш. шк., 1980.
10. **Neimitz A.** Jump-like crack growth models of theory of critical distances. Are they correct? // ESIS Newsletter. N 44-2008. P. 20–26.
11. **Саврук М. П.** Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов. Киев: Наук. думка, 1988. Т. 2. С. 620.
12. **Справочник** по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. Т. 1.
13. **Taylor D.** The theory of critical distances // Engng Fract. Mech. 2008. V. 75. P. 1696–1705.
14. **Демешкин А. Г., Корнев В. М.** Об изломе траектории трещин при обобщенном напряженном состоянии // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 205–213.
15. **Красникова Т. В.** Пеноматериалы на основе полимерных связующих и микросфер / Т. В. Красникова, Е. Б. Петриленкова. Л.: Ленингр. дом науч.-техн. пропаганды, 1971.
16. **Кржечковский П. Г.** К механике разрушений сферопластиков // Пробл. прочности. 1982. № 11. С. 110–115.
17. **Карпов Е. В.** Разрушение сферопластовых образцов с различными типами концентраторов напряжений // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 170–179.
18. **Аннин Б. Д., Демешкин А. Г., Карпов Е. В.** Различные механизмы разрушения сферопласта // Тр. Центр. науч.-исслед. ин-та им. А. Н. Крылова. 2010. № 52. С. 13–20.
19. **Berto F., Lazzarin P.** On higher order terms in the crack tip stress field // Intern. J. Fract. 2010. V. 161. P. 221–226.
20. **Cornec A., Scheider I., Schwalbe K.-H.** On the practical application of the cohesive model // Engng Fract. Mech. 2003. V. 70. P. 1963–1987.
21. **Lin G., Meng X.-G., Cornec A., Schwalbe K.-H.** The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints // Intern. J. Fract. 1999. V. 96. P. 37–54.
22. **Корнев В. М., Астапов Н. С.** Модель разрушения кусочно-однородной среды при расслоении упругопластических структурированных материалов // Механика композиц. материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 3. С. 347–360.

*Поступила в редакцию 14/V 2010 г.,
в окончательном варианте — 22/XII 2010 г.*