

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИН СО СЛОЖНЫМ КОНТУРОМ

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложена методика исследования динамического деформирования идеальных жесткопластических пластин со сложным контуром на вязкоупругом основании, которая позволяет оптимизировать процесс импульсной штамповки. В качестве параметров оптимизации используются амплитуда импульсной нагрузки, коэффициенты вязкоупругого сопротивления основания, поверхностная плотность материала пластины, форма и характер закрепления сторон. Приведены численные примеры для односвязных и двусвязных пластин. Показана возможность достижения одной и той же остаточной формы штампуемой пластины при разных наборах управляющих параметров процесса.

В связи с разработкой и использованием импульсных методов обработки металлов [1–4] необходимы исследования механизмов деформирования заготовки в процессе ее превращения в деталь и определение зависимости окончательных параметров изделия от формы заготовки и внешнего воздействия.

Процесс деформирования зависит от многих факторов, в частности, от свойств материала заготовки и способа крепления ее границ, свойств сопротивляющегося основания, характера динамического нагружения. Изменяя только способ крепления сторон пластины, можно получать различные формы остаточного прогиба, не меняя при этом распределения по поверхности пластины действующей нагрузки.

В данной работе предлагается методика исследования динамического деформирования жесткопластических пластин со сложным контуром на вязкоупругом основании. Решение задачи проводится в два этапа. На первом этапе решается прямая задача: определяется форма остаточного прогиба пластины, находящейся на произвольном вязкоупругом основании, при воздействии на нее импульсной нагрузки. На втором этапе решается обратная задача: по заданному остаточному прогибу определяются оптимальные параметры деформирования.

Рассмотрим идеальную жесткопластическую пластину со сложным контуром под действием равномерно распределенной по поверхности произвольной динамической кратковременной нагрузки интенсивности $P(t)$. Контур пластины может быть окружностью, правильным многоугольником, правильным многоугольником со скругленными вершинами или кусочно-гладкой кривой, полученной из него изменением взаимного расположения круговых и прямолинейных участков, а также неправильным полигональным контуром, в который можно вписать окружность. Считаем, что контур пластины шарнирно оперт или зацементирован. Все эти пластины имеют сходное динамическое поведение, которое подробно рассмотрено в [5, 6]. Будем также рассматривать следующие двусвязные пластины: правильную полигональную пластину; кольцевую пластину; правильную полигональную пластину со скругленными вершинами или пластину, полученную из нее изменением взаимного расположения круговых и прямолинейных участков контура; неправильную полигональную пластину, в контур которой можно вписать окружность. Внешний и внутренний контуры пластины шарнирно опертые или зацементированы. Эти двусвязные пластины имеют сходное динамическое поведение [7, 8].

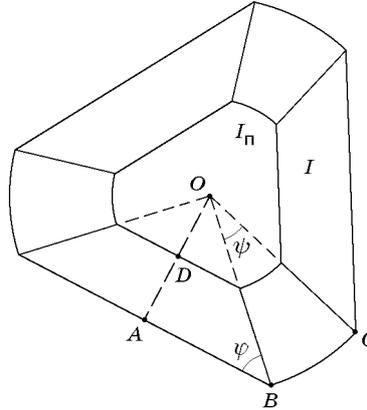


Рис. 1

В работах [5–8] получены общие уравнения движения пластин. В настоящей работе исследуется влияние вязкоупругого основания на процесс пластического динамического формоизменения.

При достаточно высоких нагрузках динамика пластин может сопровождаться возникновением, развитием и исчезновением зоны интенсивного пластического деформирования I_n , движущейся поступательно.

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Односвязные пластины. На рис. 1 изображена правильная полигональная пластина со скругленными вершинами ($|AO| = r$, $|AD| = \delta r$, $\angle OBA = \varphi$, $\angle BOC = \psi$, $\angle OAB = \pi/2$, r — радиус окружности, вписанной в полигональный контур, или радиус круглой пластины). При $\varphi = \pi/2$ это круглая пластина, при $\psi = 0$ — правильная полигональная. Уравнения, описывающие движение таких пластин, имеют вид [5, 6]

$$\delta^3(4 - 3\delta)(\ddot{\alpha} + k_2\dot{\alpha} + k_1\alpha) = 2p_1\delta^2(3 - 2\delta) - m_0; \quad (1.1)$$

$$(\delta\dot{\alpha}) + \delta(k_2\dot{\alpha} + k_1\alpha) = p_1, \quad (1.2)$$

где $p_1 = P/r$; $m_0 = M(2 - \eta)$ для правильных полигональных пластин, круглых, а также неправильных пластин, в контур которых можно вписать окружность; $m_0 = M(\operatorname{ctg} \varphi + \psi)(2 - \eta)/(\operatorname{ctg} \varphi + \psi/\sin^2 \varphi)$ для полигональных пластин со скругленными вершинами; $M = 12M_0t_0^2/(\rho r^3)$; ρ — поверхностная плотность материала пластины; M_0 — предельный изгибающий момент; $\eta = 0$ для защемленного контура; $\eta = 1$ для шарнирно опертого; α — угол поворота жесткой области I вокруг опорной стороны контура; $\delta(\tau)$ — безразмерная функция, характеризующая размер центральной пластической области I_n ; точка обозначает дифференцирование по параметру τ ; $\tau = t/t_0$; t — текущее время; t_0 — характерное время; $k_1 = K_1^0 t_0^2/\rho$; $k_2 = K_2^0 t_0^2/\rho$; K_1^0 , K_2^0 — коэффициенты упругого и вязкого сопротивления основания.

В силу сделанного в [9] вывода о возможности замены произвольной нагрузки $p_1(\tau)$ эквивалентной ей постоянной нагрузкой для простоты анализа будем рассматривать прямоугольный импульс нагрузки

$$p_1(\tau) = p_1 = \text{const}, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad p_1(\tau) = 0, \quad \tau > 1. \quad (1.3)$$

Начальные условия для α имеют вид

$$\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0. \quad (1.4)$$

Чтобы определить величину δ_0 в начальном условии

$$\delta(0) = \delta_0, \quad (1.5)$$

необходимо решить дополнительную задачу, о которой сказано ниже. Для задачи Коши (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) выполнены условия теоремы существования и единственности [10], поэтому во время действия нагрузки величина δ будет оставаться постоянной: $\delta(\tau) = \delta(0) = \delta_0$.

Пусть $p_1 > p_1^0$, где $p_1^0 = m_0/2$ — предельная нагрузка, определенная в [6]. Тогда из уравнения (1.2) следует равенство $\delta(\ddot{\alpha} + k_2\dot{\alpha} + k_1\alpha) = p_1$. С учетом этого равенства из уравнения (1.1) получим

$$\delta^2(2 - \delta) = m_0/p_1 = 2p_1^0/p_1. \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что $\delta < 1$ при $p_1 > 2p_1^0$ и $\delta \geq 1$ при $p_1 \leq 2p_1^0$. Таким образом, при нагрузке $p_1 > 2p_1^0$ (“высокие” нагрузки) движение пластины начнется при наличии пластической зоны и будет описываться системой (1.1), (1.2) при начальных условиях (1.4), (1.5), где δ_0 определяется из (1.6) и не зависит от сопротивления основания. При нагрузке $p_1^0 < p_1 \leq 2p_1^0$ (“средние” нагрузки), поскольку величина δ не может быть больше единицы, движение пластины начнется при отсутствии пластической зоны и будет описываться уравнением (1.1) при $\delta = 1$ и начальных условиях (1.4). Рассмотрим подробнее оба вида нагружения.

“Средняя” нагрузка ($p_1^0 < p_1 \leq 2p_1^0$). В первой фазе ($0 \leq \tau \leq 1$, $p_1 = \text{const} > 0$, $\delta \equiv 1$) движение описывается уравнением $\ddot{\alpha} + k_2\dot{\alpha} + k_1\alpha = 2(p_1 - p_1^0)$ при начальных условиях (1.4).

Вторая фаза ($1 < \tau \leq \tau_1$) — движение пластины с момента снятия нагрузки до ее остановки. При этом $\delta \equiv 1$, $p_1 = 0$, поведение пластины описывается уравнением $\ddot{\alpha} + k_2\dot{\alpha} + k_1\alpha = -2p_1^0$, для которого начальные условия $\alpha(1)$ и $\dot{\alpha}(1)$ определяются в конце первой фазы. Время τ_1 определяется из условия $\dot{\alpha}(\tau_1) = 0$. Все прогибы в точке (x, y) определяются по формуле $w(x, y, \tau) = \alpha(\tau)d(x, y)/r$, где $d(x, y)$ — расстояние от точки (x, y) до опорной стороны звена I ; $w = W/r$; W — прогиб пластины. Величина остаточного прогиба в центре пластины w_f вычисляется по следующим формулам:

$$w_f = A - B \exp(-k_2 T) - 2p_1^0 T k_2^{-1} \quad \text{при } k_1 = 0, \quad k_2 \neq 0, \quad (1.7)$$

где $T = -\ln[2p_1^0/(Bk_2^2)]/k_2$; $A = 2(p_1^0/k_2 + p_1)/k_2$; $B = 2[p_1(\exp(k_2) - 1) + p_1^0]/k_2^2$;

$$w_f = A \exp(\lambda_1 T) + B \exp(\lambda_2 T) - 2p_1^0/k_1 \quad \text{при } k_1 \neq 0, \quad k_2 \neq 4k_1, \quad (1.8)$$

где $\lambda_{1,2} = (-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1})/2$; $A = 2\lambda_2[-p_1 + p_1^0 + p_1 \exp(-\lambda_1)]/[k_1(\lambda_2 - \lambda_1)]^{-1}$; $B = 2\lambda_1[-p_1 + p_1^0 + p_1 \exp(-\lambda_2)]/[k_1(\lambda_1 - \lambda_2)]^{-1}$; $T = \ln[-B\lambda_2/(A\lambda_1)]/(\lambda_1 - \lambda_2)$;

$$w_f = (A + BT) \exp(\lambda_3 T) - 2p_1^0 \quad \text{при } k_1 \neq 0, \quad k_2 = 4k_1, \quad (1.9)$$

где $\lambda_3 = -k_2/2$; $A = -2(p_1 - p_1^0)$; $B = 2\lambda_3[p_1 - p_1^0 + p_1 \exp(-\lambda_3)]$; $T = -(A\lambda_3 + B)/\lambda_3$;

$$w_f = A \cos(\lambda_4 T) + B \sin(\lambda_4 T) - 2p_1^0/k_1 \quad \text{при } k_1 \neq 0, \quad k_2 = 0, \quad (1.10)$$

где $\lambda_4 = \sqrt{k_1}$; $A = -2(p_1 - p_1^0 + p_1 \cos \lambda_4)/k_1$; $B = 2p_1 \sin \lambda_4/k_1$; $T = \text{arctg}(B/A)/\lambda_4$;

$$w_f = p_1^2(1 - p_1^0/p_1)/p_1^0 \quad \text{при } k_1 = k_2 = 0. \quad (1.11)$$

“Высокая” нагрузка ($p_1 > 2p_1^0$). В первой фазе ($0 \leq \tau \leq 1$, $p_1 = \text{const} > 0$) движение описывается уравнением (1.1) при начальных условиях (1.4), (1.5), где $\delta = \delta_0$ определяется из (1.6).

Во второй фазе ($1 < \tau \leq \tau_1$, $p_1 = 0$) движение описывается системой

$$\delta^3(4 - 3\delta)(\ddot{\alpha} + k_2\dot{\alpha} + k_1\alpha) = -2p_1^0, \quad (\delta\dot{\alpha}) + \delta(k_2\dot{\alpha} + k_1\alpha) = 0, \quad (1.12)$$

из которой следует $\dot{\delta} = 2p_1^0/[\dot{\alpha}\delta^2(4 - 3\delta)] > 0$. В этой фазе функция $\delta(\tau)$ возрастает. Момент времени τ_1 определяется из условия $\delta(\tau_1) = 1$ и соответствует моменту полного стягивания пластической зоны в точку.

В третьей фазе ($\tau_1 < \tau \leq \tau_2$, $p_1 = 0$, $\delta \equiv 1$) движение описывается уравнением (1.1) при $\delta = 1$ до полной остановки пластины в момент τ_2 , который определяется из условия $\dot{\alpha}(\tau_2) = 0$.

Все прогибы определяются из уравнения $\dot{w}(x, y, \tau) = d(x, y)\dot{\alpha}(\tau)/r$ для точек $(x, y) \in I$ и уравнения $\dot{w}(x, y, \tau) = \delta(\tau)\dot{\alpha}(\tau)$ для точек $(x, y) \in I_{\text{п}}$.

Во всех фазах движения, кроме второй для случая “высокой” нагрузки, уравнения движения пластины имеют аналитические решения. Во второй фазе “высокой” нагрузки система (1.12) приводится к виду

$$\dot{\alpha} = \nu, \quad \dot{\nu} = -2p_1^0/[\delta^3(4 - 3\delta)] - k_2\nu - k_1\alpha, \quad \dot{\delta} = 2p_1^0/[\nu\delta^2(4 - 3\delta)]$$

и решается численно методом Рунге — Кутты.

По изложенной методике проведены расчеты движения различных односвязных пластин в вязкоупругой среде. Анализ результатов расчетов позволяет сделать следующие выводы.

1. Вязкоупругое сопротивление среды не влияет на механизм развития движения пластины. Движение пластины на вязкоупругом основании имеет те же фазы, что и движение пластины без сопротивления среды [5, 6]. При достаточно высоких нагрузках динамика пластин на вязкоупругом основании, как и в случае отсутствия сопротивления среды, сопровождается возникновением, развитием и исчезновением зоны интенсивного пластического деформирования.

2. Вязкоупругое сопротивление среды приводит к уменьшению величины остаточных прогибов и времени движения пластины, а также к существенному изменению формы остаточных прогибов. На рис. 2 изображены кривые остаточного прогиба в сечении $y = 0$ квадратной шарнирно опертой пластины при $p_1 = 3p_1^0$ ($\bar{w} = Wr^2\rho/(M_0t_0^2)$) (кривая 1 — $k_1 = k_2 = 0$; 2 — $k_1 = 0,5$; $k_2 = 0$; 3 — $k_1 = 3$; $k_2 = 1$).

3. В случае $p_1/p_1^0 = \text{const}$ при изменении p_1^0 в m раз остаточный прогиб изменяется во столько же раз. Это свойство позволяет использовать квадратную шарнирно опертую пластину в качестве некоторой модельной конструкции для расчета любых рассматриваемых односвязных пластин в сопротивляющейся среде, поскольку изменение способа крепления или количества сторон влияет только на величину предельной нагрузки.

Двусвязные пластины. На рис. 3 изображена двусвязная правильная полигональная пластина со скругленными вершинами ($|OA_1| = r$, $|A_1D_1| = \delta r$, $|A_1D_2| = \xi r$, $|A_1A_2| = \lambda r$, $\angle OA_1B_1 = 90^\circ$, $\angle OB_1A_1 = \varphi$, $\angle B_1OC_1 = \psi$). При $\varphi = \pi/2$ это кольцевая пластина,

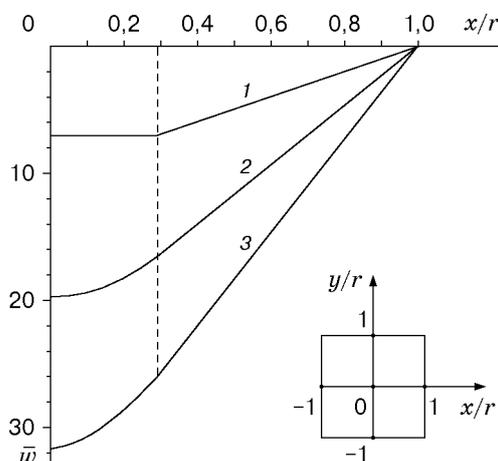


Рис. 2

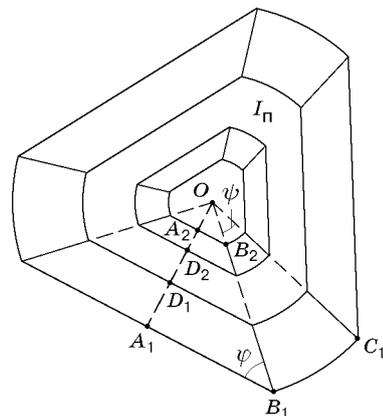


Рис. 3

а при $\psi = 0$ — двусвязная правильная полигональная пластина. Уравнения, описывающие движение таких пластин, имеют вид [7, 8]

$$\delta \dot{\alpha}_1 = (\lambda - \xi) \dot{\alpha}_2; \quad (1.13)$$

$$\delta^3(4 - 3\delta)(\ddot{\alpha}_1 + k_2 \dot{\alpha}_1 + k_1 \alpha_1) = 2p_1 \delta^2(3 - 2\delta) - m_1; \quad (1.14)$$

$$(\lambda - \xi)^3(4 - 3\xi - \lambda)(\ddot{\alpha}_2 + k_2 \dot{\alpha}_2 + k_1 \alpha_2) = 2p_1(\lambda - \xi)^2(3 - 2\xi - \lambda) - m_2; \quad (1.15)$$

$$(\delta \dot{\alpha}_1)' = p_1 - \delta(k_2 \dot{\alpha}_1 + k_1 \alpha_1). \quad (1.16)$$

В случае вырождения области I_{Π} вместо (1.16) выполняется условие

$$\delta = \xi. \quad (1.17)$$

В (1.13)–(1.18) $m_j = 12M(2 - \eta_j)(1 - \lambda_j)$ ($j = 1, 2$) для двусвязных правильных полигональных пластин, кольцевых и неправильных пластин, в контур которых можно вписать окружность; $m_j = 12M(1 - \lambda_j)[\text{ctg } \varphi(2 - \eta_j) + \psi(2 - \theta_j)]/(\text{ctg } \varphi + \psi/\sin^2 \varphi)$ ($j = 1, 2$) для пластин со скругленными вершинами; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \lambda$; $M = 12M_0 t_0^2/(\rho r^3)$; $\eta_j = 0$, $\theta_j = 0$ для защемленного контура, $\eta_j = 1$, $\theta_j = 1$ для шарнирно опертого; $j = 1$ соответствует внешнему контуру, $j = 2$ — внутреннему; α_j — угол поворота жесткой области I_j вокруг опорной стороны контура; λ — безразмерная величина, характеризующая размер отверстия пластины; $\delta(\tau)$, $\xi(\tau)$ — безразмерные функции, определяющие размер внутренней пластической области I_{Π} .

Как и в случае односвязных пластин, для простоты будем рассматривать прямоугольный импульс нагрузки (1.3).

Начальные условия для α_i , $\dot{\alpha}_i$ имеют вид

$$\dot{\alpha}_i(0) = \alpha_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (1.18)$$

Чтобы определить величины $\delta_{\text{н}}$, $\xi_{\text{н}}$ в начальных условиях

$$\delta(0) = \delta_{\text{н}}, \quad \xi(0) = \xi_{\text{н}}, \quad (1.19)$$

необходимо решить дополнительные задачи, о которых сказано ниже.

При рассматриваемой постоянной нагрузке систему (1.13)–(1.17) можно проинтегрировать, считая δ , ξ постоянными. Так как для задачи Коши (1.14)–(1.18) выполнены условия теоремы существования и единственности [10], то в течение времени действия нагрузки величины δ , ξ будут оставаться постоянными: $\delta = \delta(0) = \delta_{\text{н}}$, $\xi = \xi(0) = \xi_{\text{н}}$.

Пусть $p_1 > p_0$, где p_0 — предельная нагрузка, определенная в [7, 8]: $p_0 = m_1/[2\delta_0^2(3 - 2\delta_0)]$, $m_1(\lambda - \delta_0)^2(3 - 2\delta_0 - \lambda) = m_2\delta_0^2(3 - 2\delta_0)$. Тогда из (1.13), (1.16) следует $\delta(\ddot{\alpha}_1 + k_2 \dot{\alpha}_1 + k_1 \alpha_1) = p_1$, $(\lambda - \xi)(\ddot{\alpha}_2 + k_2 \dot{\alpha}_2 + k_1 \alpha_2) = p_1$. С учетом этих равенств из (1.14), (1.15) получим

$$\delta^2(2 - \delta) = m_1/p_1, \quad (\lambda - \xi)^2(2 - \lambda - \xi) = m_2/p_1. \quad (1.20)$$

Из (1.20) следует, что $\xi > \delta_* > \delta$ при $p_1 > p_*$ и $\xi \leq \delta$ при $p_1 \leq p_*$, где p_* , δ_* определены из уравнений $m_1(\lambda - \delta_*)^2(2 - \delta_* - \lambda) = m_2\delta_*^2(2 - \delta_*)$, $p_* = m_1/[\delta_*^2(2 - \delta_*)]$. Таким образом, при нагрузке $p_1 > p_*$ (“высокие” нагрузки) движение пластины начнется при наличии развитой пластической зоны I_{Π} и будет описываться системой (1.13)–(1.16) при начальных условиях (1.18), (1.19), где $\xi_{\text{н}}$, $\delta_{\text{н}}$ определяются из (1.20). При нагрузке $p_0 < p_1 \leq p_*$ (“средние” нагрузки), поскольку $\delta \leq \xi$, движение пластины начнется при отсутствии пластической зоны I_{Π} и будет описываться системой уравнений (1.13)–(1.15), (1.17) при начальных условиях (1.18), (1.19), где $\xi_{\text{н}} = \delta_{\text{н}}$. В этом случае $\delta_{\text{н}}$ определяется следующим образом. Из (1.13), (1.17) следует $\delta(\ddot{\alpha}_1 + k_2 \dot{\alpha}_1 + k_1 \alpha_1) = (\lambda - \xi)(\ddot{\alpha}_2 + k_2 \dot{\alpha}_2 + k_1 \alpha_2)$. Тогда из последнего равенства и (1.14), (1.15) получим уравнение для $\delta_{\text{н}}$

$$\frac{2p_1\delta_{\text{н}}^2(3 - 2\delta_{\text{н}}) - m_1}{\delta_{\text{н}}^2(4 - 3\delta_{\text{н}})} = \frac{2p_1(\lambda - \delta_{\text{н}}^2)(3 - 2\delta_{\text{н}}^2 - \lambda) - m_2}{(\lambda - \delta_{\text{н}}^2)(4 - 3\delta_{\text{н}} - \lambda)}. \quad (1.21)$$

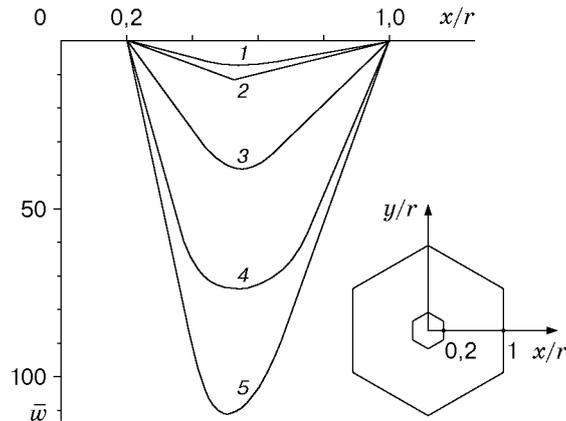


Рис. 4

Рассмотрим подробнее оба вида нагружения.

“Средняя” нагрузка ($p_0 < p_1 \leq p_*$). В первой фазе ($0 \leq \tau \leq 1, p_1 = \text{const} > 0$) движение описывается системой уравнений (1.14), (1.15), (1.18), (1.19), где δ_n определяется из (1.21). Первая фаза заканчивается в момент снятия нагрузки.

Во второй фазе ($1 < \tau \leq \tau_1, p_1 = 0$) движение происходит по инерции до остановки в момент τ_1 и описывается системой уравнений (1.13), (1.17) и

$$\delta^3(4 - 3\delta)(\ddot{\alpha}_1 + k_2\dot{\alpha}_1 + k_1\alpha_1) = -m_1, \quad (\lambda - \xi)^3(4 - 3\xi - \lambda)(\ddot{\alpha}_2 + k_2\dot{\alpha}_2 + k_1\alpha_2) = -m_2. \quad (1.22)$$

Эта система решается численно методом Рунге — Кутты. Время τ_1 определяется из условия $\dot{\alpha}_i(\tau_1) = 0$ ($i = 1, 2$). Из расчетов следует, что $\dot{\delta}(\tau_1) = 0$.

“Высокая” нагрузка ($p_1 > p_*$). В первой фазе ($0 \leq \tau \leq 1, p_1 = \text{const} > 0$) движение описывается системой (1.13), (1.14), где δ_n, ξ_n определяются из (1.20). Первая фаза заканчивается в момент снятия нагрузки.

Во второй фазе ($1 < \tau \leq \tau_1, p_1 = 0$) движение описывается системой уравнений (1.13), (1.22) и $(\delta\dot{\alpha}_1)' = -\delta(k_2\dot{\alpha}_1 + k_1\alpha_1)$, из которой следует, что $\dot{\delta} = m_1/[\dot{\alpha}_1\delta^2(3 - 2\delta)] > 0$ и $\dot{\xi} = -m_2/[\dot{\alpha}_2(\lambda - \xi)^2(4 - 3\xi - \lambda)] < 0$. Таким образом, функция $\delta(\tau)$ возрастает, а $\xi(\tau)$ убывает. Момент τ_1 определяется из условия $\delta(\tau_1) = \xi(\tau_1)$, соответствующего полному стягиванию зоны I_n в отрезок прямой. Система уравнений (1.13), (1.22) решается численно методом Рунге — Кутты.

Третья фаза ($\tau_1 < \tau \leq \tau_2$) — движение пластины до остановки, которое описывается системой (1.13), (1.17), (1.22), решаемой численно. Время τ_2 определяется из условия $\dot{\alpha}_i(\tau_2) = 0$ ($i = 1, 2$). Из расчетов следует, что $\dot{\delta}(\tau_2) = 0$.

Во всех фазах прогиб в точках $(x, y) \in I_i$ ($i = 1, 2$) определяется по формуле

$$w(\tau) = \frac{d_i(x, y)}{r} \int_{\tau_k}^{\tau} \delta(s)\dot{\alpha}_1(s) ds + w(\tau_k), \text{ где } d_i(x, y) \text{ — расстояние от точки } (x, y) \text{ до опорной}$$

стороны звена I_i ; τ_k — время начала фазы. Для точек $(x, y) \in I_n$ прогибы вычисляются из уравнения $\dot{w} = \delta\dot{\alpha}_1$.

На рис. 4 изображены кривые остаточных прогибов в сечении $y = 0$, образующихся при движении правильной полигональной двусвязной пластины с $\lambda = 0,8$ в сопротивляющейся среде в случае, когда оба контура шарнирно оперты ($P_1 = Pr^2/M_0$) (кривая 1 — $P_1 = 50,55, k_1 = 1, k_2 = 5$; 2 — $P_1 = 17,7, k_1 = 0, k_2 = 0,5$; 3 — $P_1 = 50,55, k_1 = k_2 = 0,5$; 4 — $P_1 = 90, k_1 = k_2 = 0,5$; 5 — $P_1 = 50,55, k_1 = k_2 = 0$).

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

При решении прямой задачи отмечено, что вязкоупругое сопротивление существенно влияет на форму остаточных прогибов. Изменяя величины действующей нагрузки и коэффициенты сопротивления, можно получить достаточно широкий диапазон форм остаточных прогибов. Остаточный прогиб зависит также от предельной нагрузки p_1^0 и, следовательно, от формы и способа крепления сторон пластины. Можно определить функцию U , которая каждому набору величин $\mathbf{f} = (p_1^0, p_1, k_1, k_2)$ ставит в соответствие некоторую характеристику остаточной формы Π : $U(\mathbf{f}) = \Pi$.

Характеристика Π может включать много определяющих величин: остаточные прогибы в любой точке пластины; углы в точках закрепления пластины между поверхностью деформированной пластины и линией горизонта; площадь поверхности и объем наполнения деформированной пластины и др. Например, если необходимо отштамповать деталь с заданным объемом наполнения, то в качестве характеристики Π следует принять $\Pi = V$,

где $V = \int_0^{t_f} \iint_S \dot{w}(\tau, s) ds d\tau$ (t_f — время деформирования пластины; S — поверхность;

ds — элемент поверхности). Если требуется получить наибольший или наименьший объем наполнения, то в качестве Π принимается $\Pi = \max V$ или $\Pi = \min V$ соответственно.

Все величины, входящие в характеристику Π , определяются свойствами, которыми должна обладать отштампованная деталь. Меняя набор величин \mathbf{f} , получим различные формы остаточных прогибов.

Сформулируем математически обратную задачу: по заданной характеристике Π требуется найти величины \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = U^{-1}(\Pi). \quad (2.1)$$

Таким образом, появляется возможность управлять процессами деформирования, а именно по заданной характеристике Π определять набор \mathbf{f} , обеспечивающий необходимую форму отштампованной детали. Решение таких задач проводится с использованием ЭВМ.

Обратная задача (2.1) решается методом локальных вариаций [11]. В качестве примера решения обратной задачи (2.1) рассматривается следующая задача. Предельная нагрузка p_1^0 считается фиксированной. Необходимая форма прогиба задается тремя характерными параметрами: максимальным прогибом w_{\max} , прогибом w_δ , величиной $0 < \delta_c < 1$ для односвязных пластин (рис. 5) и $0 < \delta_c \leq \delta_0 < 1$ для двусвязных пластин (рис. 6). Величина δ_c выбирается так, что отрезок KN на рис. 5, 6 является отрезком прямой. При этом, если для односвязных пластин $w_\delta = \delta_c w_{\max}$, то рассматриваются “средние” нагрузки и k_1, k_2 определяются из уравнений (1.7)–(1.11). Если $\delta_c w_{\max} < w_\delta \leq w_{\max}$, то амплитуда прямоугольного импульса нагрузки p_1 однозначно определяется по величине δ_c из уравнения (1.6). Случаи $w_\delta > w_{\max}$ и $\delta_c w_{\max} > w_\delta$ не рассматриваются, поскольку такие формы остаточного прогиба в рамках принятой модели не могут быть получены. Эти случаи изображены на рис. 5 (форма прогиба 1 соответствует случаю $w_\delta > w_{\max}$, 2 — $\delta_c w_{\max} > w_\delta$, 3 — $w_\delta = \delta_c w_{\max}$). Для двусвязных пластин при $\delta_c w_{\max}/\lambda < w_\delta \leq w_{\max}$ амплитуда p_1 определяется из первого уравнения в (1.20). Остаточные формы прогиба, которые не могут быть получены в рассматриваемой модели, изображены на рис. 6 (форма прогиба 1 соответствует случаю $w_\delta > w_{\max}$, 2 — случаю $\delta_c w_{\max}/\lambda < w_\delta$).

Следует отметить, что остаточный прогиб при учете сопротивления основания не должен превышать остаточный прогиб в тех же точках пластины без учета сопротивления при одних и тех же нагрузках. Этому условию можно удовлетворить, увеличивая время действия нагрузки t_0 .

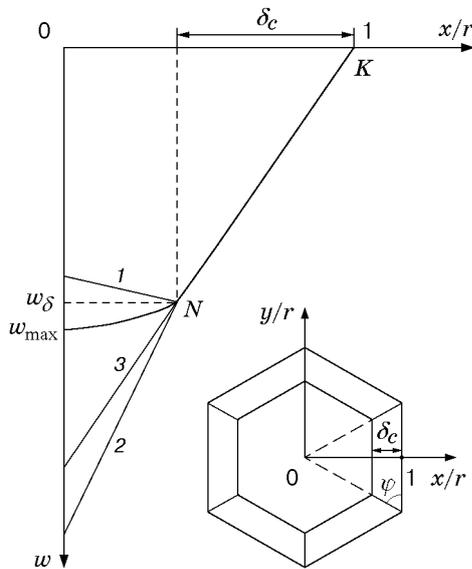


Рис. 5

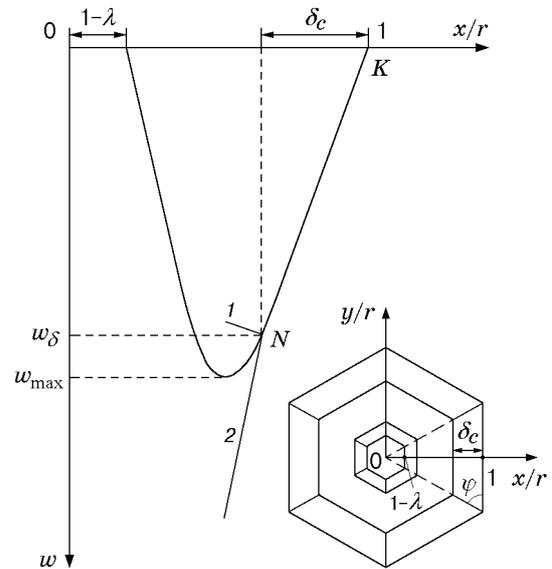


Рис. 6

Решение обратной задачи методом локальных вариаций зависит от начальных приближений [11], что определяет неединственность решения задачи (2.1). Один и тот же остаточный прогиб может быть получен при различных сопротивлениях основания. Например, для шарнирно опертой пластины одним и тем же значениям $\bar{w}_\delta = 4,4$; $\bar{w}_{\max} = 4,4$; $\delta_c = 0,72$ соответствуют параметры $P_1 = 18$, $k_1 = 8$, $k_2 = 0$ и $P_1 = 18$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, а для двусвязной шарнирно опертой по обоим контурам с $\lambda = 0,8$ пластины значениям $\bar{w}_\delta = 7$; $\bar{w}_{\max} = 8$; $\delta_c = 0,383$ соответствуют параметры $P_1 = 50,59$, $k_1 = 5,9$, $k_2 = 3$ и $P_1 = 50,59$, $k_1 = 1,8$, $k_2 = 5$.

Неединственность решения обратной задачи (2.1) позволяет выбирать параметры сопротивления оснований, обеспечивающие нужный остаточный прогиб пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Импульсная** обработка металлов давлением. М.: Машиностроение, 1977.
2. **Johnson W.** Review of metal working plasticity // Metallurgia Metal Forming. 1972. V. 39, N 5. P. 147–151.
3. **Johnson W., Poynton A., Singh H., Travis F. M.** Experiments in the underwater explosive stretch forming of clamped circular blanks // Intern. J. Mech. Sci. 1966. V. 8. P. 237–270.
4. **Райнхарт Дж. С., Пирсон Дж.** Взрывная обработка металлов. М.: Мир, 1966.
5. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамический изгиб пластических полигональных плит // ПМТФ. 1988. № 4. С. 149–157.
6. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамика пластических полигональных пластин со скругленными углами // Пробл. прочности. 1991. № 9. С. 62–66.
7. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамическое поведение двусвязных полигональных пластических плит // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 5. С. 53–59.
8. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамика двусвязных пластин в пластическом состоянии с кусочно-гладкими опорными контурами // Прикл. механика. 1992. Т. 28, № 4. С. 24–31.

9. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Влияние формы импульсной нагрузки на остаточные прогибы жесткопластических пластин сложной формы // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 6. С. 113–121.
10. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
11. **Черноузько Ф. Л., Баничук В. Н.** Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 28/II 2000 г.,
в окончательном варианте — 22/VIII 2000 г.*
