

УДК 532.5

ДИНАМИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ УГЛЫ СМАЧИВАНИЯ ПРИ РАСТЕКАНИИ КАПЛИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

О. В. Воинов

Институт механики многофазных систем СО РАН, 625000 Тюмень

Рассмотрена задача гидродинамики со свободной границей при осесимметричном расстекании капли вязкой жидкости по гладкой поверхности твердого тела под действием капиллярных сил в условиях слабого влияния гравитации. Для конечных углов наклона свободной поверхности задача при малых капиллярных числах асимптотическим методом приведена к более простой задаче гидродинамики в области с известной границей. Найдено выражение динамического краевого угла капли. Показано, что у одной капли существует несколько динамических краевых углов, кроме локального угла наклона границы вблизи линии контакта трех фаз. Значения углов вычислены при малых числах Рейнольдса и Бонда.

1. Задача динамики капли при немалых углах наклона свободной границы.

Рассматриваются осесимметричные течения в капле на плоской твердой поверхности под действием капиллярных сил в рамках уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости:

$$\rho du/dt = -\nabla p + \rho g + \mu \Delta u, \quad \operatorname{div} u = 0. \quad (1.1)$$

Задача ставится во «внешней» области на достаточном удалении от движущейся линии контакта трех фаз, что возможно, когда есть большой параметр $\ln(h_0/h_m) \gg 1$ (h_0 — характерная максимальная высота границы раздела жидкость — газ S_0 над твердой поверхностью, h_m — минимальная высота этой границы вблизи линии контакта).

Основание капли — круг неизвестного переменного радиуса $r_0(t)$, вдоль его периметра (линии контакта) высота границы $h = 0$ в рамках макроскопического описания на большом масштабе h_0 .

Рассмотрим плоское сечение капли вблизи точки x_0 линии контакта. Точки x_e свободной поверхности S_0 с координатами r и $y = h$ поставим в соответствие дугу $L_1(x_e)$ окружности (рис. 1), ортогональную касательной плоскости к S_0 в точке x_e и плоской поверхности твердого тела. За счет этого выделим малый объем жидкости вблизи линии

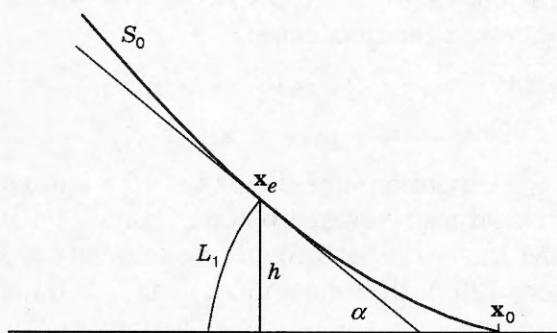


Рис. 1

контакта (смачивания), ограниченный от остальной жидкости поверхностью вращения с образующей $L_1(\mathbf{x}_e)$.

Характерная высота h_0 разделяет внешнюю и внутреннюю области асимптотического описания. Во внутренней области ($h \ll h_0$) малы числа Рейнольдса по расстоянию h границы раздела фаз от твердого тела. В случае малого капиллярного числа Са справедлива универсальная асимптотика угла $\alpha(h)$ наклона границы раздела [1–3] в пределе большого расстояния от линии смачивания ($h/h_m \rightarrow \infty$):

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha_m}^{\alpha} \frac{d\alpha}{Q(\alpha)} + \text{Ca} \ln \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_*} = \text{Ca} \ln \frac{h}{h'_m}, \quad \text{Ca} = \frac{\mu v_0}{\sigma}, \quad |\text{Ca}| \ll 1, \quad \ln(h/h'_m) \gg 1, \quad h \ll h_0 \quad (1.2)$$

($v_0 = dr_0/dt$ — скорость линии смачивания; σ, μ — коэффициенты поверхностного натяжения и динамической вязкости). Для случая границы раздела жидкость — газ $Q = \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)^{-1}$. Величины α_m, α_*, h'_m указаны в [1–4]; α_m — микроскопический угол; h'_m — величина порядка минимального масштаба h_m расстояния свободной границы от твердой поверхности (в рамках используемой модели макроскопического описания). Величина h'_m может иметь порядок размера молекулы, что подтверждает анализ экспериментов в [1, 2], а также вывод [3, 5, 6] о существовании прекурсационной смачивающей пленки только при очень малых динамических углах.

Заметим, что (1.2) соответствует теории второго порядка по Са. Линейное по Са слагаемое в левой части (1.2) аналогично, например, слагаемому в выражении $f + \text{Ca}f = \text{Ca} + \dots$, которое учитывает квадратичные поправки к f при малом Са.

Во втором приближении по малому параметру Са во внешней задаче можно ставить соответствующее (1.2) условие для угла наклона границы [4]

$$\alpha = \alpha_0 - 2\text{Ca} Q_0 \ln(h_0/h) + \dots, \quad h/h_0 \rightarrow 0, \quad Q_0 = Q(\alpha_0), \quad \ln(h_0/h) \ll \ln(h_0/h_m), \quad (1.3)$$

причем $\alpha_0(h_0)$ определено по формуле (1.2), неравенство ограничивает предельный переход в (1.3). Первое приближение по Са для границы раздела во внешней области отвечает $O(1)$.

При исключении из рассмотрения малой области вблизи линии контакта на ограничивающей ее дуге $L_1(\mathbf{x}_e)$ задаем скорость $\mathbf{u} = \mathbf{v}^{(0)} + \dots, \mathbf{x} \in L_1(\mathbf{x}_e), \mathbf{x}_e \rightarrow \mathbf{x}_0$, где \mathbf{x}_0 соответствует краю капли ($h = 0$), $\mathbf{v}^{(0)}$ — скорость при ползущем течении вязкой жидкости внутри угла α с движущейся стороной.

На твердой поверхности скорость равна нулю:

$$\mathbf{u} = 0, \quad y = 0.$$

Это условие, как и уравнения движения, используем только на достаточном удалении от линии контакта.

На границе раздела жидкость — газ S_0 отсутствует касательное напряжение p_τ , нормальная скорость жидкости совпадает со скоростью поверхности w и средняя кривизна H соответствует скачку нормальных напряжений:

$$(\mathbf{u}n) = w, \quad p_\tau = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0; \quad (1.4)$$

$$2\sigma H = p_n + p_0, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad (1.5)$$

где p_0 — давление в газе, p_n — нормальное напряжение в жидкости.

Как показано в [7], учет слагаемых второго порядка по Са в асимптотике угла наклона свободной границы приводит к повышению точности решения для случая $v_0 > 0$, если угол α меньше критического ($\alpha_k \approx 129^\circ$). При значениях угла $\alpha > \alpha_k$ обосновано только главное приближение по Са.

2. Асимптотическое описание динамики капли. Известно, что при малом капиллярном числе Са существует решение нестационарной задачи растекания капли, согласно

которому форма свободной поверхности капли близка к сфере [1]. В первом приближении по Са во внешней задаче для (1.1) свободная граница совпадает с сегментом сферы. Во втором приближении ее форма находится с учетом вязких напряжений ($\text{Ca} \neq 0$). Будем искать радиус поверхности в полярных координатах R, θ :

$$R = R_0 + R_1(\theta) + \dots, \quad |R_1| \ll R_0 \quad (2.1)$$

(θ — полярный угол, $\theta = 0$ — ось симметрии, $y = a_0 - R_0$ — центр полярной системы). В уравнение (2.1) может входить как параметр времени t . Малость отношения R_1/R_0 обеспечивается на достаточно большом времени ($t \rightarrow \infty$) за счет малого капиллярного числа ($\text{Ca} \rightarrow 0$) и преимущественной диссипации энергии вблизи линии смачивания, которая является причиной динамического краевого угла [1]. Детали начальных условий ($t = 0$) не существенны. Имеют значение только объем V капли и начальный радиус линии смачивания $r_0(0)$, который должен быть ограничен.

Примем, что сфера радиуса R_0 проходит через периметр ($r = r_0(t)$) основания капли, так что

$$R_1(\theta) = 0, \quad \theta = \theta_0. \quad (2.2)$$

При этом радиус основания капли $r_0 = R_0 \sin \theta_0$. Чтобы определить сферу, необходимо задать, кроме (2.2), второе условие. Рассмотрим три его варианта.

1. Радиус сферы равен радиусу кривизны поверхности капли на оси симметрии, определяемому нормальным напряжением в жидкости p_n и давлением p_0 в газе:

$$p_n \Big|_{\theta=0} + p_0 = -2 \frac{\sigma}{R_0}. \quad (2.3)$$

2. Высота сегмента сферы a_0 равна высоте капли (h при $\theta = 0$):

$$R_1 = 0, \quad \theta = 0. \quad (2.4)$$

3. Объем капли V равен объему шарового сегмента:

$$\frac{\pi}{2} a_0 \left(r_0^2 + \frac{1}{3} a_0^2 \right) = V. \quad (2.5)$$

Если форма капли — сегмент сферы, то все три сегмента сферы совпадают.

Необходимо решить задачу [1, 8] о течении жидкости внутри сегмента шара высотой $a_0 = R_0(1 - \cos \alpha_0)$ с изменяющимся краевым углом $\theta_0 = \alpha_0(t)$ на твердой поверхности (рис. 2). Согласно (1.4) на сегменте сферы касательное напряжение равно нулю, а нормальная скорость u_R пропорциональна скорости края сегмента v_0 и линейно зависит от h :

$$p_{R\theta} = 0, \quad u_R = \frac{2r_0 v_0}{r_0^2 + a_0^2} (a_0 - 2h) \quad \text{при} \quad R = R_0, \quad \theta < \theta_0, \quad v_0 = \frac{dr_0}{dt}, \quad h = R_0(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (2.6)$$

На твердом основании сегмента скорость равна нулю:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad R \cos \theta = R_0 \cos \theta_0, \quad \theta < \theta_0. \quad (2.7)$$

Из решения задачи гидродинамики вязкой жидкости (1.1), (2.6), (2.7) внутри раскающегося шарового сегмента (уравнение растекания приведено ниже) определяется нормальное напряжение p_n на сфере. При этом допустимо рассматривать течения при небольших числах Рейнольдса: $\text{Re} = a_0 v_0 / \nu \lesssim 1$ (в случае малых углов $\alpha \text{Re} \lesssim 1$). Для больших чисел Рейнольдса ($\text{Re} \gg 1$) из-за действия инерционных сил приближение сферы не оправдано, возможны большие отклонения формы поверхности капли от сферы, несмотря на малость капиллярного числа Са. 32

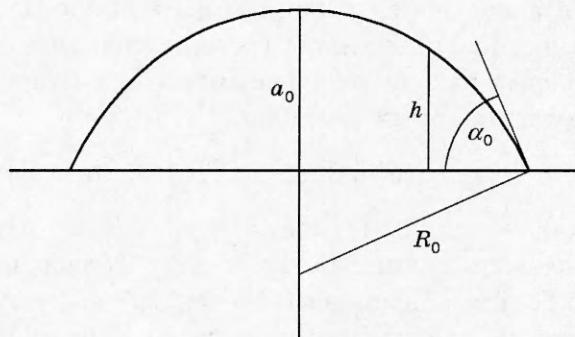


Рис. 2

Нормальное напряжение на сфере имеет вид

$$p_n = p_{RR} = \frac{\mu}{K_0} v_0 P(\theta) + \text{const}, \quad P(\theta) = P(\theta, \alpha_0, \text{Re}, t). \quad (2.8)$$

Безразмерное напряжение P в (2.8) в общем случае зависит от угла α_0 , числа Рейнольдса Re и времени. При конечном числе Рейнольдса в каждый момент времени, очевидно, важна предыстория нестационарного течения внутри шарового сегмента. В случае малого числа Рейнольдса ($\text{Re} \ll 1$) явная зависимость P от t отсутствует.

Для асимптотического сращивания внешнего решения с внутренней асимптотикой в общем виде достаточно учесть зависимость P только от угла θ , подразумевая зависимость от времени. Возмущение радиуса R_1 определяем из условия Лапласа (1.5), которое записывается в линеаризованном виде:

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dR_1}{d\theta} + 2R_1 \sin \theta = \left(\frac{p_n + p_0}{\sigma} + \frac{2}{R_0} \right) R_0^2 \sin \theta = f(\theta). \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.9), регулярное в точке $\theta = 0$, содержит одну произвольную постоянную D :

$$R_1 = \cos \theta \left\{ D + \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \int_0^\varphi f(\eta) \cos \eta d\eta \right\}. \quad (2.10)$$

Функция $f(\theta)$ содержит вторую произвольную постоянную D' :

$$f = \left[D' + \left(p_n - p_n \Big|_{\theta=0} \right) R_0^2 / \sigma \right] \sin \theta. \quad (2.11)$$

Отметим, что возмущение радиуса достаточно мало ($R_1 \ll a_0$), и справедливо (2.9), если изменение напряжения в центральной области капли мало по сравнению с капиллярным перепадом σ/R_0 и на краю капли угол наклона свободной границы мало отличается от угла на сфере:

$$|p_n(\theta) - p_n(0)| \ll \frac{\sigma}{R_0} \quad \text{при} \quad \theta_0 - \theta \sim \theta_0, \quad |\alpha - \theta| \ll \alpha_0 \quad \text{при} \quad \theta_0 - \theta \ll \theta_0. \quad (2.12)$$

Условие (2.12) нарушается в пределе $\theta \rightarrow \theta_0$, который рассматривается как промежуточный, ограниченный малыми возмущениями угла.

Основной интерес представляет возмущение угла наклона касательной вблизи края капли, входящее в краевое условие (1.3):

$$\alpha - \alpha_0 = -\frac{1}{R_0} \frac{dR_1}{d\theta} + \dots, \quad \theta \rightarrow \theta_0. \quad (2.13)$$

В результате определения постоянных в (2.10) и (2.11) с учетом (2.2) и (2.3)–(2.5), преобразования интегралов в выражении R_1 и при помощи (2.13) найдем следующие формулы угла α наклона свободной границы вблизи края капли:

$$1) \quad \alpha - \alpha_0 = -\frac{R_0}{\sigma \sin \alpha_0} \int_0^\theta \frac{\cos \theta}{\cos \alpha_0} (p_n(\theta) - p_n(0)) \sin \theta d\theta + \dots \quad (\theta \rightarrow \theta_0 = \alpha_0); \quad (2.14)$$

$$2) \quad \alpha - \alpha_0 = \frac{R_0}{\sin \alpha_0} \int_0^\theta \left\{ \cos \theta - (1 + \cos \alpha_0) \left[1 - \cos \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right) \right] \right\} \frac{\Delta p_n}{\sigma} \sin \theta d\theta + \dots \\ (\theta \rightarrow \theta_0), \quad \Delta p_n = p_n(\theta) - p_n(0); \quad (2.15)$$

$$3) \quad \alpha - \alpha_0 = \frac{1}{\sin \alpha_0} \int_h^{a_0} \left(2 \frac{h}{a_0} - 1 \right) \frac{\Delta p_n}{\sigma} dh + \dots \quad (h \rightarrow 0). \quad (2.16)$$

Применимость (2.14) ограничена для $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$.

Правые части (2.14)–(2.16) в случае напряжений, определяемых по (2.8) вязким течением, пропорциональны малому числу Са.

Проверим эффективность полученных формул на примере задачи о малом влиянии силы тяжести на растекание капли на горизонтальной поверхности. В поле силы тяжести $p_n = \rho gh + \text{const}$. Подставив p_n в (2.16), определим краевой угол α'_0 тяжелой капли

$$\alpha'_0 = \alpha_0 + \frac{B}{6} \frac{\sin \alpha_0}{(1 + \cos \alpha_0)^2}, \quad B = \frac{\rho g r_0^2}{\sigma}.$$

Эта формула отвечает первому члену разложения α'_0 по числу Бонда B в точке $B = 0$, ее можно использовать для учета слабого влияния гравитации на растекание.

При движении линии контакта по твердому телу асимптотика напряжения p_n при $\theta \rightarrow \theta_0$ ($h \rightarrow 0$) универсальна:

$$p_n = \frac{2}{h} \mu v_0 Q(\alpha) \sin \alpha + \dots$$

Этому выражению соответствуют расходимости в интегралах (2.14)–(2.16), выделяя которые, запишем

$$\alpha - \alpha_0 = \text{Ca} 2Q(\alpha_0) \left\{ -\ln \frac{a_0}{h} + C_1 \right\} + \dots \quad (2.17)$$

Значения постоянной C_1 в (2.17) для трех разных случаев выразим через функцию Φ , включающую безразмерное напряжение P (2.8):

$$\Phi(\theta) = \frac{P(\theta)}{2Q(\alpha_0)} - \frac{1}{h} R_0 \sin \alpha_0.$$

При этом:

$$1) \quad C_1 = 1 - \frac{1}{\sin \alpha_0} \int_0^{\alpha_0} \frac{\cos \theta}{\cos \alpha_0} \{ \Phi(\theta) - \Phi(0) \} \sin \theta d\theta; \quad (2.18)$$

$$2) \quad C_1 = (1 + \cos \alpha_0) \left\{ \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_0}{2} - 2 \ln \left(\cos \frac{\alpha_0}{2} \right) + \frac{\cos \alpha_0}{2} \left[\zeta(2) + \int_0^{\operatorname{tg}^2(\alpha_0/2)} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \right] \right\} + \\ + \frac{1}{\sin \alpha_0} \int_0^{\alpha_0} \left\{ \cos \theta - (1 + \cos \alpha_0) \left[1 - \cos \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right) \right] \right\} \Phi(\theta) \sin \theta d\theta; \quad (2.19)$$

$$3) \quad C_1 = 2 + \frac{1}{\sin \alpha_0} \int_0^{a_0} \left(2 \frac{h}{a_0} - 1 \right) \Phi(h) \frac{dh}{R_0}. \quad (2.20)$$

В формуле (2.19) $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана; первое слагаемое в (2.19) равно 1,645 при $\alpha_0 \rightarrow 0$ и 1,693 при $\alpha_0 = \pi/2$, т. е. практически не зависит от угла α_0 .

Согласуя (2.17) с асимптотическим условием (1.3) на краю капли, найдем

$$\alpha_0 = \alpha(h_0), \quad h_0 = a_0 \exp(-C_1), \quad (2.21)$$

где $\alpha(h_0)$ — значение угла наклона границы, определяемое общей асимптотикой (1.2).

При произвольных углах α_0 и числах Рейнольдса напряжение $p_n(\theta)$ затруднительно найти аналитически, но численный его расчет не представляет принципиальных трудностей, так как граница течения задается. Для малых углов при ползущем движении известно асимптотически точное выражение [1]

$$p_n = p_n \Big|_{\theta=0} + 2\mu v_0 Q_0 \sin \alpha_0 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{a_0} \right), \quad Q_0 \sin \alpha_0 = \frac{3}{2\alpha_0}, \quad \alpha_0 \ll 1.$$

Отсюда и из (2.8) следует, что все интегралы в (2.18)–(2.20) равны нулю. При этом получаются следующие значения C_1 в (2.21):

$$1) \quad C_1 = 1; \quad 2) \quad C_1 = \zeta(2) \approx 1,645; \quad 3) \quad C_1 = 2. \quad (2.22)$$

Три динамических краевых угла $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$, соответствующих (2.22), мало различаются, так как $\ln(h_0/h_m) \gg 1$. Для случая 3 известно решение с еще большей точностью [4]. Значение $C_1 = 1$ указано в [1], случай 2 рассмотрен в предварительной публикации [8].

Из трех углов наиболее важен динамический угол $\alpha_0 = \alpha_b$, определяемый по высоте a_0 и радиусу r_0 основания капли: $a_0 = r_0 \operatorname{tg}(\alpha_0/2)$. Его можно легко измерять в экспериментах, что намного проще по сравнению с измерениями локального угла и может дать более точную информацию о физике смачивания.

Угол $\alpha_0 = \alpha_c$ определяется через r_0 и радиус $R_{(e)}$ сферы эквивалентного объема:

$$r_0 = 2R_{(e)} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_0}{2} \right)^{-1/3}, \quad R_{(e)} = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}. \quad (2.23)$$

Дифференцирование (2.23) по t в сочетании с известной из (2.21) и (1.2) зависимостью скорости v_0 от угла α_0 и параметра h_0 дает уравнение растекания капли [1]

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = -\frac{v_0}{R_{(e)}} \left[(2 + \cos \alpha_0) \sin \frac{\alpha_0}{2} \right]^{4/3}, \quad \alpha_0 \equiv \alpha_c, \quad v_0 = v_0(\alpha_0, h_0), \quad (2.24)$$

по решению $\alpha_0(t)$ которого определяется $r_0(t)$. Формула (2.24) верна для ползущего движения. При конечном числе Рейнольдса уравнение (2.24) необходимо решать совместно с задачей нестационарного течения внутри шарового сегмента. Для немалого числа Рейнольдса выражение v_0 зависит не только от мгновенного значения α_0 , но и от истории течения в предыдущие моменты, сказывающейся на значении параметра C_1 , которое дает относительно малый вклад в решение до тех пор, пока справедлива модель границы раздела, близкой к сфере. Эта модель должна нарушаться при относительно большом числе Рейнольдса ($Re \gg 1$) или конечных числах Бонда. По мере растекания капли число Рейнольдса уменьшается — капля «забывает» не только о начальных условиях, но и об инерционных силах.

Таким образом, для растекания капли задача гидродинамики со свободной границей на основе метода асимптотического сращивания приближенно сведена к относительно простой задаче с известной границей.

Отметим целесообразность постановки обратных задач динамики смачивания: определения из экспериментальных данных параметра h'_m (и α_m) асимптотики (1.2) при различных скоростях смачивания. Приведенные выше формулы могут применяться для получения из экспериментов уточненной информации о роли течения на микроскопическом масштабе.

Работа выполнена при поддержке Российской фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01605). 7

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В.** Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С. 76–84.
2. **Воинов О. В.** Асимптотика свободной поверхности при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1422–1425.
3. **Воинов О. В.** Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. 1977. № 2. С. 92–99.
4. **Воинов О. В.** Краевые условия на движущейся линии контакта трех фаз в задачах для уравнений Навье — Стокса при смачивании твердых тел // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 5. С. 627–629.
5. **Hervet H., de Gennes P. G.** The dynamics of wetting of «dry» solid // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. II. 1984. Т. 299, N 9. P. 499–503.
6. **Де Жен П. Ж.** Смачивание: статика и динамика // Успехи физ. наук. 1987. Т. 151, вып. 4. С. 619–681.
7. **Воинов О. В.** К асимптотической теории динамики смачивания при малых капиллярных числах. Тюмень, 1995. Деп. в ВИНИТИ, № 3496-B95.
8. **Воинов О. В.** О растекании капли вязкой жидкости по горизонтальной поверхности. Тюмень, 1995. Деп. в ВИНИТИ, № 3495-B95.

Поступила в редакцию 16/XII 1996 г.