

УДК 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЧНОГО ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КРИВИЗНЫ БАЛКИ

Х. М. Седиги, К. Х. Ширази

Университет Шахида Чамрана, Ахваз, Иран
E-mails: hmsedighi@gmail.com, k.shirazi@scu.ac.ir

Предложена новая формулировка задачи о колебаниях балки на упругом основании на основе нелинейной теории пятого порядка, построенной с использованием точного выражения для кривизны балки. Проведено исследование мод поперечных колебаний балки, которые определяются собственными частотами системы. С помощью аналитического метода разложения по параметру решено частотное уравнение. Показано, что для описания колебаний балки на упругом основании достаточно использовать первый член в разложении. Выполнена оценка точности предложенного метода путем сравнения полученных на его основе результатов с результатами численного решения.

Ключевые слова: нелинейность пятого порядка, метод разложения по параметру, упругое основание, нелинейные колебания балки.

Введение. При решении прикладных задач представляет интерес изучение поведения балочных конструкций при больших деформациях. Многие конструкции и их элементы (лопасти вертолетов, антенны космических кораблей, крылья самолетов, высотные здания, большие пролеты мостов, колонны буровых машин и т. п.) можно рассматривать как балки. В работах [1–17] получены дифференциальные уравнения в частных производных и различные краевые условия задачи о поперечных колебаниях балки. Исследовались нелинейные частоты балки, сведения о которых необходимы при расчете многих конструкций. Для того чтобы получить характеристики конструкций в случае нелинейных колебаний, нужно провести точный анализ задачи. Уравнения движения большинства моделей, описывающих нелинейную динамику гибких балок, содержат нелинейные члены третьего порядка. Для того чтобы получить новую информацию, необходимы уравнения движения, содержащие нелинейные члены более высокого порядка. Существует небольшое количество работ, в которых исследуются уравнения, содержащие нелинейные члены высокого порядка [5].

В последнее время достигнут существенный прогресс в построении аналитических решений нелинейных уравнений без малых параметров. При этом использовались различные классические методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные колебания, при наличии больших параметров: метод энергетического баланса и вариационный метод [18], преобразование Лапласа [2], метод Гамильтона [19], метод многомасштабной декомпозиции [20], метод минимакса [21], итерационный метод возмущения [22], метод непрерывных возмущений [23], многостадийный метод декомпозиции

Адомиана [24], итерационный вариационный метод [3], метод многих масштабов [25], монотонные итерационные схемы [26], решения типа решений Навье и Леви [27, 28]. В разных методах используются различные способы исключения малых параметров.

С помощью метода разложения по параметру [29] точно и достаточно просто решается большой класс нелинейных задач. Приближения этого метода быстро сходятся к решению. Как правило, для достижения большой точности достаточно использовать несколько приближений. Метод разложения по параметру применяется при решении различных инженерных задач.

В работе [1] показаны преимущества метода разложения по параметру, вариационного итерационного метода, метода Гамильтона, метода минимакса, метода энергетического баланса решения уравнения задачи о поперечных колебаниях консоли. В работе [30] с использованием модифицированного метода разложения по параметру вычислялось приближенное значение периода нелинейного осциллятора с дискретно распределенными массами. В [31] метод разложения по параметру применялся для изучения сильнонелинейного осциллятора. В [6–8] методом разложения по параметру исследовались колебания консоли при наличии “мертвых” зон и краевых условий для нагрузок.

Также показана эффективность использования метода разложения по параметру при анализе нелинейной задачи о колебаниях массы, прикрепленной к натянутой упругой проволоке [32], и при решении задачи об устойчивости и свободных колебаниях микробалок [33].

Целью данной работы является получение методом разложения по параметру аналитического решения геометрически нелинейной задачи о колебаниях балки Эйлера — Бернулли с учетом точного выражения для кривизны балки и с сохранением нелинейного члена пятого порядка. Для получения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения из уравнения в частных производных используется метод Галеркина.

Уравнение движения. Рассмотрим свободно опертую балку длиной l , лежащую на упругом основании и нагруженную сжимающей силой P (рис. 1). Пусть I — момент инерции балки, m — масса балки на единицу ее длины, E — модуль упругости материала балки, k_f — жесткость упругого основания, w — поперечное смещение балки. Дифференциальное уравнение равновесия балки в деформированном состоянии имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{EIw''(x, t)}{[1 - w'^2(x, t)]^{1/2}} \right) + Pw''(x, t) + k_f w(x, t) + m\ddot{w}(x, t) = 0,$$

где $w''(x, t)/\sqrt{1 - w'^2(x, t)}$ — “точное” выражение для кривизны [34]. С использованием аппроксимации

$$\frac{w''(x, t)}{[1 - w'^2(x, t)]^{1/2}} \simeq w''(x, t) \left(1 + \frac{1}{2} w'^2(x, t) + \frac{3}{8} w'^4(x, t) \right)$$

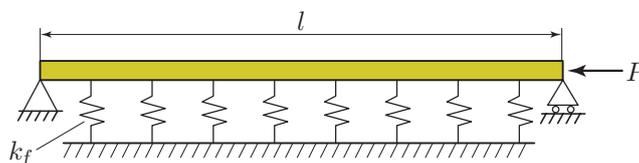


Рис. 1. Однородная свободно опертая балка, покоящаяся на упругом основании

нелинейное дифференциальное уравнение записывается в следующем виде:

$$EIw^{(4)}\left(1 + \frac{1}{2}w'^2 + \frac{3}{8}w'^4\right) + 3EIw''''w'w'' + \frac{9}{2}EIw''''w'^3w'' + EIw''''^3 + \frac{9}{2}EIw''^2w''^3 + Pw'' + k_f w + m\ddot{w} = 0. \quad (1)$$

Краевые условия для уравнения (1) имеют вид

$$w(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad w(l, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0.$$

Положим

$$\varphi(x) = \sin(\pi x/l).$$

Здесь $\varphi(x)$ — первая мода свободно опертой балки.

Используя метод Бубнова — Галеркина, получаем

$$\int_0^l \left[EIw^{(4)}\left(1 + \frac{1}{2}w'^2 + \frac{3}{8}w'^4\right) + 3EIw''''w'w'' + \frac{9}{2}EIw''''w'^3w'' + EIw''''^3 + \frac{9}{2}EIw''^2w''^3 + Pw'' + k_f w + m\ddot{w} \right] \varphi(x) dx = 0.$$

В безразмерных переменных

$$\tau = \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} t, \quad \bar{q} = \frac{q}{l}$$

нелинейное дифференциальное уравнение для \bar{q} имеет вид

$$\frac{d^2 \bar{q}(\tau)}{d\tau^2} + \gamma_1 \bar{q}(\tau) + \gamma_2 (\bar{q}(\tau))^3 + \gamma_3 (\bar{q}(\tau))^5 = 0, \quad (2)$$

где

$$\gamma_1 = \pi^4 - \frac{Pl^2\pi^2}{EI} + \frac{k_f l^4}{EI}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{8} \pi^6, \quad \gamma_3 = \frac{3}{64} \pi^8. \quad (3)$$

Аналитический метод решения. Рассмотрим уравнение колебаний балки Эйлера — Бернулли (2) с начальными условиями

$$q(0) = A, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Свободное колебание системы без затухания является периодическим и может быть представлено фундаментальной системой функций

$$\cos(m\omega\tau), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Обозначим через ω круговую частоту. Необходимо определить зависимость $\omega(A)$, где A — начальная амплитуда. При использовании метода разложения по параметру вводится параметр $p \in [0, 1]$, по которому выполняется разложение. В соответствии с этим методом решение уравнения (2) будем искать в виде

$$q(\tau) = q_0(\tau) + pq_1(\tau) + p^2 q_2(\tau) + \dots \quad (4)$$

Выражения для коэффициентов 1 и γ_1 в уравнении (2) представляются в аналогичном виде [29]:

$$1 = 1 + pa_1 + p^2 a_2 + \dots, \quad \gamma_1 = \omega^2 - pb_1 - p^2 b_2 + \dots, \quad 1 = pc_1 + p^2 c_2 + \dots, \quad (5)$$

где константы a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) подлежат определению. При $p = 0$ уравнение (2) становится линейным дифференциальным уравнением, для которого можно построить аналитическое решение и вычислить его значение при $p = 1$. Подставляя (5), (4) в уравнение (2), получаем

$$(1 + pa_1)(\ddot{q}_0 + p\dot{q}_1) + (\omega^2 - pb_1)(q_0 + pq_1 + p^2q_2) + (pc_1 + p^2c_2)[\gamma_2(q_0 + pq_1)^3 + \gamma_3(q_0 + pq_1)^5] = 0. \quad (6)$$

Сохраняя в уравнении (6) члены при одинаковых степенях параметра p , получаем линейные дифференциальные уравнения, первое из которых имеет вид

$$\ddot{q}_0(\tau) + \omega^2 q_0(\tau) = 0, \quad q_0(0) = A, \quad \dot{q}_0(0) = 0. \quad (7)$$

Решением задачи (7) является функция

$$q_0(\tau) = A \cos(\omega\tau). \quad (8)$$

Подставляя решение (8) в правую часть второго уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(\tau) + \omega^2 q_1(\tau) = & -\left(\frac{3}{4}c_1\gamma_2A^3 + \frac{5}{8}c_1\gamma_3A^5 - a_1A\omega^2 - b_1A\right)\cos(\omega\tau) - \\ & -\left(\frac{1}{4}c_1\gamma_2A^3 + \frac{5}{16}c_1\gamma_3A^5\right)\cos(3\omega\tau) - \frac{1}{16}c_1\gamma_3A^5\cos(5\omega\tau). \end{aligned} \quad (9)$$

Для того чтобы исключить из уравнения (9) секулярный член, необходимо приравнять к нулю коэффициент при $\cos(\omega\tau)$:

$$c(\omega) = \frac{3}{4}c_1\gamma_2A^3 + \frac{5}{8}c_1\gamma_3A^5 - a_1A\omega^2 - b_1A = 0. \quad (10)$$

Сохраняя в аппроксимациях (5) только один член и полагая $p = 1$, находим

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \omega^2 - \gamma_1, \quad c_1 = 1. \quad (11)$$

Из (10), (11) получаем зависимость

$$\omega(A) = \pm\sqrt{\gamma_1 + (3/4)\gamma_2A^2 + (5/8)\gamma_3A^4}, \quad (12)$$

где параметры $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определены в (3). Из (8) с учетом (12) получаем

$$q(\tau) \approx q_0(\tau) = A \cos(\sqrt{\gamma_1 + (3/4)\gamma_2A^2 + (5/8)\gamma_3A^4} \tau). \quad (13)$$

Решая уравнение (9), находим $q_1(t)$. Таким образом, удерживая только два члена в разложении (4), получаем

$$\begin{aligned} q(\tau) = q_0(\tau) + q_1(\tau) = & A \cos(\omega\tau) - \frac{1}{96} \frac{A^3 \cos(\omega\tau)(3\gamma_2 + 4\gamma_3A^2)}{\omega^2} + \\ & + \frac{1}{384} \frac{A^3(12\gamma_2 \cos(3\omega\tau) + 15\gamma_3A^2 \cos(3\omega\tau) + \gamma_3A^2 \cos(5\omega\tau))}{\omega^2} - \\ & - \frac{A^3 \sin(\omega\tau)}{384} \frac{12\gamma_2 \sin \omega + 16A^2\gamma_3 \sin \omega - 36\gamma_2 \sin(3\omega) - 45\gamma_3A^2 \sin(3\omega) - 5\gamma_3A^2 \sin(5\omega)}{\omega^2 \cos \omega}. \end{aligned}$$

Результаты исследования и их обсуждение. Для балки, сжатой осевой силой и лежащей на упругом основании, проведено сравнение аналитического решения, полученного с использованием аппроксимации (13), и численного решения при различных начальных условиях (рис. 2). На рис. 2 приведена зависимость безразмерной амплитуды \bar{q} от безразмерного времени $\omega\tau$. Численное решение получено путем интегрирования уравнения (2)

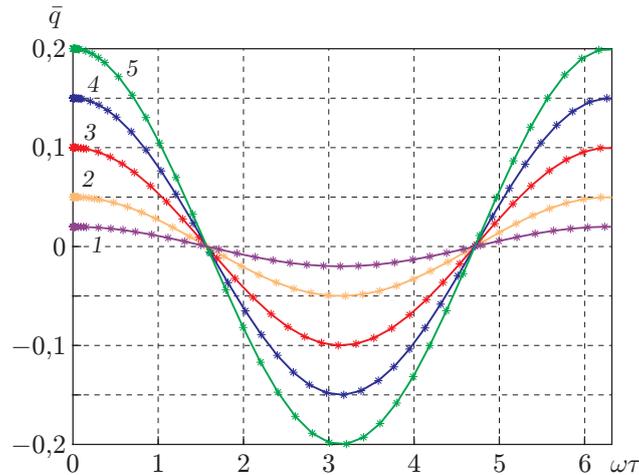


Рис. 2. Аналитическое (линии) и численное (точки) решения задачи:
 1 — $A = 0,02$, $\dot{q}(0) = 0$, 2 — $A = 0,05$, $\dot{q}(0) = 0$, 3 — $A = 0,1$, $\dot{q}(0) = 0$, 4 — $A = 0,15$,
 $\dot{q}(0) = 0$, 5 — $A = 0,2$, $\dot{q}(0) = 0$

методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Из приведенных результатов следует, что при построении аналитического решения достаточно сохранить только первый член ряда в разложении (4). Заметим, что период также определяется точно, несмотря на осцилляцию амплитуды. При построении решений использовались следующие данные: осевая нагрузка $P = 1000$ Н, модуль упругости $E = 200$ ГПа, момент инерции $I = 22,5 \cdot 10^{-8}$ м⁴, модуль упругости основания $k_f = 8,3 \cdot 10^5$ Н/м², длина балки $l = 1$ м, масса балки на единицу ее длины $m = 23,5$ кг/м.

Для балки Эйлера — Бернулли уравнение колебаний Эйлера — Лагранжа имеет следующий вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EIw''(x, t)) + Pw''(x, t) + k_f w(x, t) + m\ddot{w}(x, t) = 0.$$

Используя метод Бубнова — Галеркина, для первой моды колебаний получаем уравнение

$$\frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} + \gamma_1 \bar{q}(\tau) = 0,$$

где

$$\gamma_1 = \pi^4 - \frac{Pl^2\pi^2}{EI} + \frac{k_f l^4}{EI}.$$

На рис. 3 приведена зависимость безразмерной амплитуды от безразмерного времени при различном количестве удержанных нелинейных членов в выражении (13). Из (13) следует, что нелинейная собственная частота является функцией амплитуды, а значит, точность аппроксимации частоты в классической теории балки ($\gamma_2 = \gamma_3 = 0$) и при кубической аппроксимации кривизны ($\gamma_3 = 0$) уменьшается.

Из результатов, приведенных на рис. 3, следует, что при увеличении начальной амплитуды различие результатов, полученных с помощью классической теории балки и теории, в которой используется аппроксимация кривизны балки пятого порядка, увеличивается. Это различие становится незначительным при стремлении начальной амплитуды к нулю.

Также изучено влияние аппроксимаций третьего и пятого порядков в выражении (13) на собственную частоту. Установлено, что с увеличением амплитуды различие результатов, полученных с помощью классической теории балки, теории, в которой используется

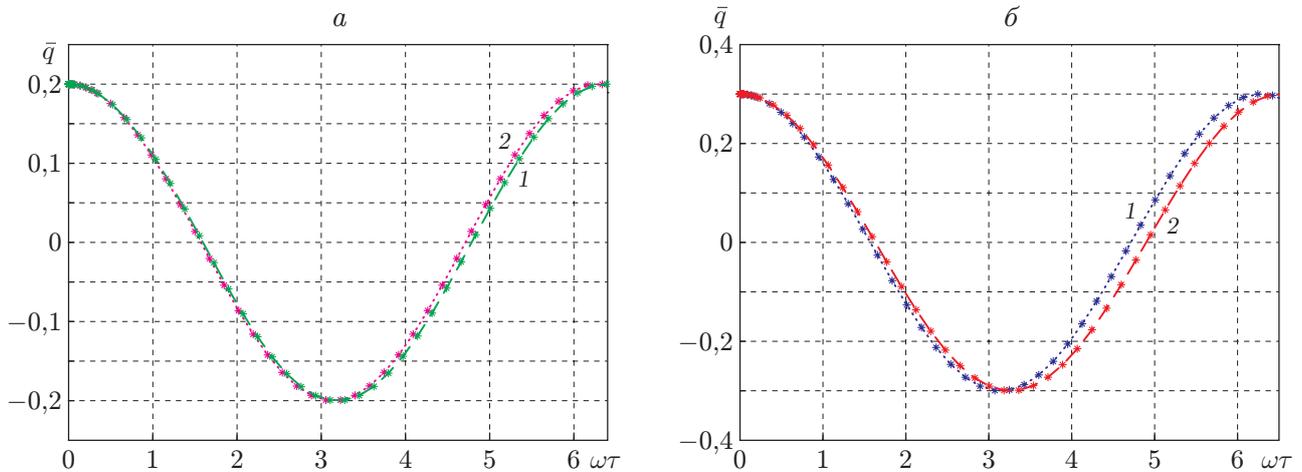


Рис. 3. Влияние на динамику балки нелинейных членов при $A = 0,2$ (а) и $A = 0,3$ (б):
 1 — классическая теория балки, 2 — теория с учетом нелинейных членов пятого порядка

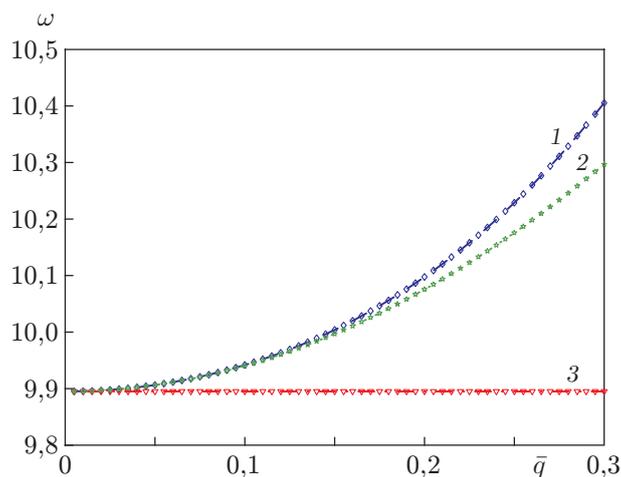


Рис. 4. Зависимость безразмерной частоты от безразмерной амплитуды, вычисленная по различным теориям:
 1 — нелинейная теория пятого порядка, 2 — нелинейная теория третьего порядка, 3 — классическая теория балки

аппроксимация третьего порядка, и теории, в которой используется аппроксимация пятого порядка, увеличивается (рис. 4).

Таким образом, для того чтобы адекватно описать нелинейное поведение балки при больших смещениях, в уравнениях движения необходимо учитывать нелинейные члены высокого порядка. При движении свободно опертых гибких балок при больших амплитудах существенным является влияние нелинейных эффектов. На рис. 5 представлена зависимость погрешности результатов δ , полученных по различным теориям, от безразмерной амплитуды.

На рис. 6 представлена зависимость безразмерной собственной частоты от параметра γ_1 при удержании в уравнении нелинейного члена пятого порядка для различных значений безразмерной амплитуды A . Видно, что при увеличении амплитуды A погрешность определения собственной частоты по классической теории балки возрастает. Относительная погрешность результатов, полученных при различных значениях A , показана на рис. 7.

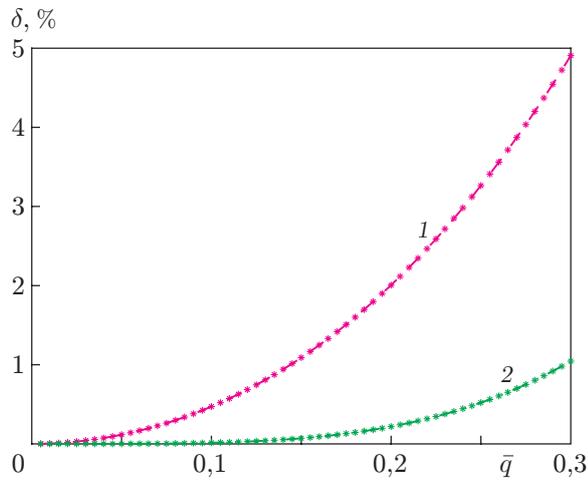


Рис. 5

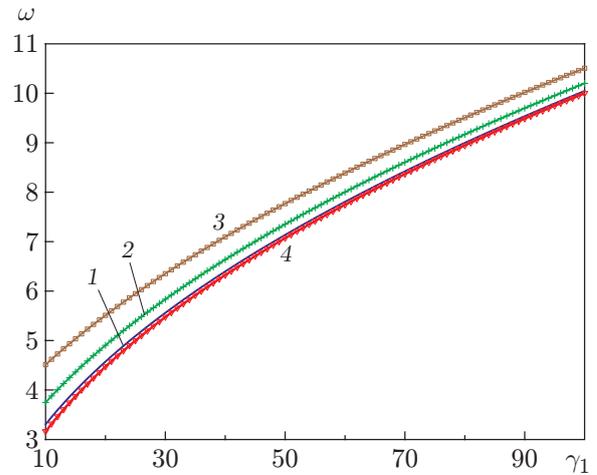


Рис. 6

Рис. 5. Относительная погрешность определения собственной частоты по классической теории балки (1) и нелинейной теории третьего порядка (2) по сравнению с результатами, полученными с использованием нелинейной теории пятого порядка

Рис. 6. Зависимость безразмерной частоты от параметра γ_1 при различных значениях амплитуды A :

1–3 — теория с использованием аппроксимации пятого порядка в выражении для кривизны балки (1 — $A = 0,1$, 2 — $A = 0,2$, 3 — $A = 0,3$) 4 — классическая теория балки

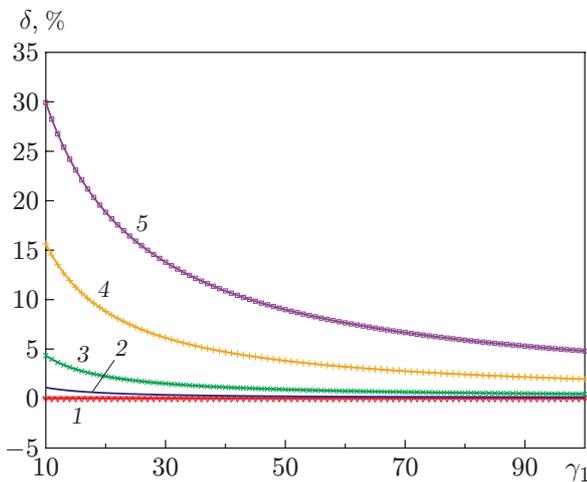


Рис. 7

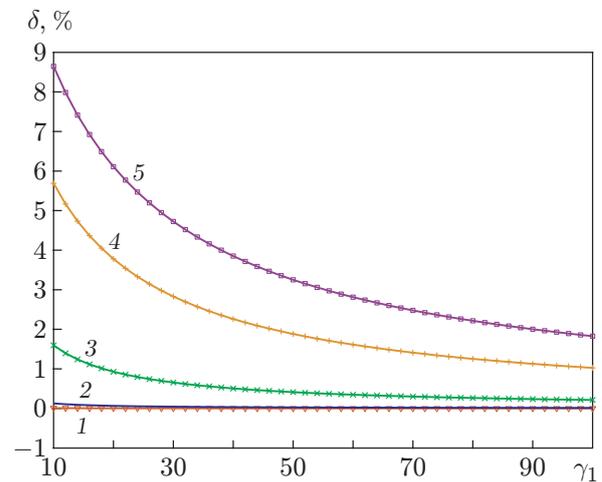


Рис. 8

Рис. 7. Относительная погрешность определения собственной частоты по классической теории балки по сравнению с результатами, полученными с использованием нелинейной теории пятого порядка:

1 — $A = 0,01$, 2 — $A = 0,05$, 3 — $A = 0,1$, 4 — $A = 0,2$, 5 — $A = 0,3$

Рис. 8. Относительная погрешность определения собственной частоты по нелинейной теории третьего порядка по сравнению с результатами, полученными с использованием нелинейной теории пятого порядка:

1 — $A = 0,05$, 2 — $A = 0,1$, 3 — $A = 0,2$, 4 — $A = 0,3$, 5 — $A = 0,35$

На рис. 8 показана относительная погрешность результатов, полученных по нелинейной теории третьего порядка, по сравнению с результатами, полученными по нелинейной теории пятого порядка.

Следует отметить, что предложенный в данной работе метод можно использовать в случае балки с другими краевыми условиями, выбрав соответствующим образом функцию $\varphi(x)$.

Заключение. В работе предложен новый аналитический метод решения нелинейного уравнения колебаний покоящейся на упругом основании балки, полученного с использованием аппроксимации пятого порядка. Показано, что при больших амплитудах результаты вычисления собственной частоты балки по классической теории балки и теории с удержанием нелинейного члена третьего порядка могут содержать погрешности по сравнению с результатами вычислений по теории с удержанием нелинейного члена пятого порядка.

Предлагаемое аналитическое решение может иметь большое значение при изучении влияния параметров балки и начальных условий на ее нелинейную динамику. Проведено сравнение полученного аналитического решения с численным решением. Предлагаемый метод может быть использован при анализе сильнонелинейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Noghrehabadi A.** Application of recent powerful analytical approaches on the non-linear vibration of cantilever beams // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 13, N 7/8. P. 487–494. DOI: 10.1515/ijnsns-2012-0030.
2. **Rafieipour H., Lotfavar A., Mansoori M. H.** New analytical approach to nonlinear behavior study of asymmetrically LCBs on nonlinear elastic foundation under steady axial and thermal loading // Lat. Amer. J. Solids Structures. 2012. V. 9. P. 531–545.
3. **Barari A., Kaliji H. D., Ghadami M., Domairry G.** Non-linear vibration of Euler — Bernoulli beams // Lat. Amer. J. Solids Structures. 2011. V. 8. P. 139–148.
4. **Cha P. D., Rinker J. M.** Enforcing nodes to suppress vibration along a harmonically forced damped Euler — Bernoulli beam // J. Vibrat. Acoust. 2012. V. 134, N 5. P. 051010. DOI: 10.1115/1.4006375.
5. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Zare J.** An analytic solution of transversal oscillation of quintic nonlinear beam with homotopy analysis method // Intern. J. Non-Linear Mech. 2012. V. 47. P. 777–784. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.(2012).04.008.
6. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** A new approach to analytical solution of cantilever beam vibration with nonlinear boundary condition // J. Comput. Nonlinear Dynamics. 2012. V. 7. P. 034502. DOI: 10.1115/1.4005924.
7. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Zare J.** Novel equivalent function for deadzone nonlinearity: Applied to analytical solution of beam vibration using He's parameter expanding method // Lat. Amer. J. Solids Structures. 2012. V. 9. P. 443–451.
8. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Reza A., Zare J.** Accurate modeling of preload discontinuity in the analytical approach of the nonlinear free vibration of beams // Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci. 2012. V. 226, N 10. P. 2474–2484. DOI: 10.1177/0954406211435196.
9. **Motaghian S. E., Mofid M., Alanjari P.** Exact solution to free vibration of beams partially supported by an elastic foundation // Scient. Iranica A. 2011. V. 18, N 4. P. 861–866.
10. **Nikkhah Bahrami M., Khoshbayani Arani M., Rasekh Saleh N.** Modified wave approach for calculation of natural frequencies and mode shapes in arbitrary non-uniform beams // Scient. Iranica B. 2011. V. 18, N 5. P. 1088–1094.

11. **Amani J., Moeini R.** Prediction of shear strength of reinforced concrete beams using adaptive neuro-fuzzy inference system and artificial neural network // *Scient. Iranica A.* 2012. V. 19, N 2. P. 242–248. DOI: 10.1016/j.scient.(2012).02.009.
12. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Noghrehabadi A. R., Yildirim A.** Asymptotic investigation of buckled beam nonlinear vibration // *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Engng.* 2012. V. 36, N M2. P. 107–116.
13. **Jang T. S., Baek H. S., Paik J. K.** A new method for the non-linear deflection analysis of an infinite beam resting on a non-linear elastic foundation // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2011. V. 46. P. 339–346.
14. **Arvin H., Bakhtiari-Nejad F.** Non-linear modal analysis of a rotating beam // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2011. V. 46. P. 877–897.
15. **Awrejcewicz J., Krysko A. V., Soldatov V., Krysko V. A.** Analysis of the nonlinear dynamics of the Timoshenko flexible beams using wavelets // *J. Comput. Nonlinear Dynamics.* 2012. V. 7, N 1. P. 011005.
16. **Andreas U., Placidi L., Rega G.** Soft impact dynamics of a cantilever beam: equivalent SDOF model versus infinite-dimensional system // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2011. V. 225, N 10. P. 2444–2456. DOI: 10.1177/0954406211414484.
17. **Campanile L. F., Jähne R., Hasse H.** Exact analysis of the bending of wide beams by a modified elastica approach // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2011. V. 225, N 11. P. 2759–2764. DOI: 10.1177/0954406211417753.
18. **Bagheri S., Nikkar A., Ghaffarzadeh H.** Study of nonlinear vibration of Euler — Bernoulli beams by using analytical approximate techniques // *Lat. Amer. J. Solids Structures.* 2014. V. 11. P. 157–168.
19. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** Asymptotic approach for nonlinear vibrating beams with saturation type boundary condition // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2013. V. 227, N 11. P. 2479–2486. DOI: 10.1177/0954406213475561.
20. **Kolpakov A. G.** On the analysis of a plate with a local shape perturbation // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53, N 4. P. 616–625.
21. **Yazdi M. K., Ahmadian H., Mirzabeigy A., Yildirim A.** Dynamic analysis of vibrating systems with nonlinearities // *Comm. Theoret. Phys.* 2012. V. 57, N 2. P. 183–187.
22. **Kamali Eigoli A., Vossoughi G. R.** A periodic solution for friction drive microrobots based on the iteration perturbation method // *Scient. Iranica B.* 2011. V. 18, N 3. P. 368–374.
23. **Shadloo M. S., Kimiaefar A.** Application of homotopy perturbation method to find an analytical solution for magneto hydrodynamic flows of viscoelastic fluids in converging/diverging channels // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2011. V. 225. P. 347–353.
24. **Koochi A., Kazemi A. S., Tadi Beni Y., et al.** Theoretical study of the effect of Casimir attraction on the pull-in behavior of beam-type NEMS using modified Adomian method // *Physica E. Low-dimensional Systems Nanostructures.* 2010. V. 43, N 2. P. 625–632.
25. **Hammad B. K., Nayfeh A. H., Abdel-Rahman E. M.** On the use of the subharmonic resonance as a method for filtration // *J. Comput. Nonlinear Dynamics.* 2011. V. 6, N 4. P. 041007. DOI: 10.1115/1.4003031.
26. **Hasanov A.** Some new classes of inverse coefficient problems in non-linear mechanics and computational material science // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2011. V. 46, N 5. P. 667–684.
27. **Baferani A. H., Saidi A. R., Jomehzadeh E.** An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2011. V. 225, N 3. P. 526–536. DOI: 10.1243/09544062JMES2171.

28. **Naderi A., Saidi A. R.** Buckling analysis of functionally graded annular sector plates resting on elastic foundations // Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci. 2011. V. 225, N 2. P. 312–325.
29. **He J. H., Shou D. H.** Application of parameter-expanding method to strongly nonlinear oscillators // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2007. V. 8. P. 121–124.
30. **Liu H. M.** Approximate period of nonlinear oscillators with discontinuities by modified Lindstedt — Poincare method // Chaos, Solitons Fractals. 2005. V. 23, N 2. P. 577–579.
31. **Xu L.** He's parameter-expanding methods for strongly nonlinear oscillators // J. Comput. Appl. Math. 2007. V. 207. P. 148–154.
32. **Xu L.** Application of He's parameter-expansion method to an oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire // Phys. Lett. 2007. V. 368. P. 259–262. DOI: 10.1016/j.physleta.2007.04.004.
33. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** Vibrations of micro-beams actuated by an electric field via parameter expansion method // Acta Astronaut. 2013. V. 85. P. 19–24. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.11.014.
34. **Kounadis A. N., Mallis J., Sbarouni A.** Postbuckling analysis of columns resting on an elastic foundation // Arch. Appl. Mech. 2006. V. 75. P. 395–404. DOI: 10.1007/s00419-005-0434-1.

*Поступила в редакцию 3/XII 2012 г.,
в окончательном варианте — 11/II 2013 г.*
