

УДК 539.376; 539.42

## ПРИМЕНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИ АНАЛИЗЕ ДЛИТЕЛЬНОГО ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛОВ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ (ОБЗОР)

А. М. Локощенко

Институт механики Московского государственного университета  
им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва  
E-mail: loko@imec.msu.ru

Приведен аналитический обзор результатов, полученных с использованием кинетической теории ползучести и длительной прочности при анализе длительного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния. Отмечается вклад выдающихся советских ученых Л. М. Качанова и Ю. Н. Работнова, которые ввели понятие поврежденности материалов и разработали основы кинетической теории. Различные варианты этой теории используются в исследованиях российских и зарубежных ученых. Рассмотрена возможность применения кинетической теории при моделировании особенностей деформирования и разрушения металлов в условиях ползучести с использованием скалярных, векторных и тензорных параметров поврежденности, а также их комбинаций.

**Ключевые слова:** длительная прочность, ползучесть, сложное напряженное состояние, время до разрушения, поврежденность, кинетическая теория, скалярный параметр, векторный параметр, тензорный параметр, анизотропия.

**Введение.** Во многих практических задачах различные конструкции эксплуатируются в условиях высокотемпературной ползучести при сложном напряженном состоянии. Примерами таких конструкций могут служить трубопроводы, диски и лопатки газовых турбин, элементы ядерных энергосиловых установок, детали авиационных конструкций и т. д. Основной проблемой, возникающей при расчетах таких конструкций на прочность, является недопущение их разрушения, поэтому особое значение приобретает проблема длительной прочности металлов, из которых изготовлены эти конструкции. При исследовании данной проблемы используются два подхода. Первый из них — критериальный — основан на установлении критериев сопротивления металлов длительному разрушению, в которых используется понятие так называемого эквивалентного напряжения. Этот подход обычно используется при анализе длительной прочности металлов в случае не меняющихся во времени компонент тензора напряжений. Аналитический обзор исследований, выполненных с помощью критериального подхода, приведен в [1, 2].

В конце 50-х гг. XX в. выдающиеся советские ученые Л. М. Качанов и Ю. Н. Работнов пришли к выводу, что используемых в то время терминов механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций и вектор перемещений) недостаточно для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-08-00008).

© Локощенко А. М., 2012

в условиях ползучести. Ими был предложен второй подход к исследованию длительной прочности, названный кинетическим. Этот подход основан на использовании введенного Л. М. Качановым [3] и Ю. Н. Работновым [4] параметра поврежденности и разработанной впоследствии Ю. Н. Работновым [5] кинетической теории ползучести и длительной прочности.

Основой второго подхода является введение скалярного параметра поврежденности  $\omega(t)$ , характеризующего состояние материала при произвольном значении времени  $t$ . Исходному состоянию материала ( $t = 0$ ) соответствует значение  $\omega = 0$ , при разрушении поврежденность  $\omega(t^*)$  становится равной единице. При рассмотрении длительной прочности в случае одноосного растяжения Л. М. Качанов дополнил уравнение ползучести дифференциальным кинетическим уравнением, характеризующим изменение параметра  $\omega$  во времени [3], а Ю. Н. Работнов ввел параметр  $\omega$  в уравнение ползучести (для учета влияния процесса накопления поврежденности на процесс ползучести) [6]. С использованием второго подхода существенные результаты получены А. А. Ильюшиным, С. А. Шестериковым, О. В. Сосниным, А. А. Лебедевым, П. А. Павловым и другими учеными.

Работы Л. М. Качанова и Ю. Н. Работнова послужили основой для развития механики континуальных повреждений в Европе, в основном при исследовании процессов ползучести металлов. Значительный вклад в развитие теории накопления повреждений внесла английская школа механиков (Ф. А. Лекки, Д. Р. Хэйхерст и др.). Определенные успехи были достигнуты в работах польских (М. Хржановский, В. А. Трампчинский), шведских (Г. Броберг, Дж. Хальт) и японских (С. Мураками) ученых. Во Франции основы механики континуальных повреждений сформулированы в виде теории с использованием понятий термодинамики (Ж. Лемэтр).

В начале 80-х гг. XX в. механика континуальных повреждений начала активно развиваться в США (Д. Крайчинович и др.). С тех пор данная область исследований находится в центре внимания во всем мире.

В последние 50 лет значительное развитие получила механика рассеянных повреждений (continuum damage mechanics (CDM)). Накопление повреждений рассматривается как процесс постепенного разрушения материала. Во многих работах при изучении сложного напряженного состояния рассматриваются параметры поврежденности, имеющие не только скалярный, но и векторный, а также тензорный характер. С использованием современных вариантов кинетической теории можно описывать деформирование и длительное разрушение металлов при непропорциональном нагружении, учитывать анизотропию свойств металлов, моделировать технологические задачи и т. д.

**1. Монографии.** В монографии [5] Ю. Н. Работнова сформулированы общие положения феноменологического подхода к описанию ползучести и длительной прочности, предложены соотношения для такого подхода и подробно проанализированы конкретные варианты определяющих уравнений, основанные на концепции эффективного напряжения, которое вводится как в кинетическое соотношение для параметра поврежденности  $\omega$ , так и в основное уравнение состояния. С учетом эффективного напряжения можно описать явление длительной прочности и предсказать ряд наблюдаемых в экспериментах эффектов. В случае пространственного напряженного состояния поврежденность предлагается считать скалярной или тензорной величиной [5].

В монографии [7] Л. М. Качанова формулируются феноменологические соотношения для определения длительной прочности в условиях сложного напряженного состояния. Решено большое количество конкретных задач для исследования как хрупкого, так и смешанного разрушения. Показаны возможности скалярного и векторного представлений параметров поврежденности. При решении задач учитывались анизотропия материала, движение фронта разрушения, перераспределение напряжений в процессе хрупкого разрушения и другие эффекты.

В ряде монографий (см., например, [8–13]) проблемы длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии рассмотрены в рамках кинетической теории. В [8] изложены основы теории ползучести металлов в условиях одноосного и сложного напряженных состояний. Большое внимание уделяется изучению проблемы ползучести при постоянных и циклических нагрузках. Приведены результаты экспериментальных и теоретических исследований циклической ползучести различных металлов при нестационарных нагружениях вплоть до разрушения. В [9, 10] подведен итог экспериментально-теоретических исследований ползучести и длительной прочности различных металлов при стационарных и нестационарных напряженных состояниях, проведен анализ применимости энергетического варианта кинетической теории. В [11] разработан математический аппарат, используемый в тензорном подходе, в котором соотношения для компонент девиатора повреждений представлены в интегральной форме. В [12] в рамках механики деформируемого твердого тела рассмотрены теоретические и прикладные задачи ползучести металлов. Для решения проблемы длительной прочности при сложном напряженном состоянии применяется кинетическая теория Работнова с использованием тензорного параметра поврежденности. В работе [1] подробно описаны принципиально различные способы определения реальной поврежденности металлов и методы измерения этой поврежденности. В [13] изложен подход к оценке напряженно-деформированного состояния тел при высоких температурах, объединяющий теории пластичности и ползучести на основе модели анизотропного упрочнения. Анализ результатов известных испытаний позволил сделать вывод о том, что скалярный параметр поврежденности при сложном напряженном состоянии зависит от величины среднего напряжения.

**2. Обзоры.** В данном пункте представлены аналитические обзоры исследований возможностей кинетической теории, выполненные в разные годы учеными различных стран. За последние 30 лет все известные обзоры проведены зарубежными исследователями, в этих обзорах отмечена роль только двух российских ученых: Л. М. Качанова и Ю. Н. Работнова, упоминания о достижениях других отечественных ученых практически отсутствуют.

В работе [14] выполнен достаточно полный анализ развития теории ползучести и длительной прочности металлов в 60–70-х гг. XX в. На основе проведенного анализа сделан вывод, что для описания процессов ползучести и длительной прочности конструкционных металлов в рамках механики сплошной среды наиболее перспективным является предложенное Ю. Н. Работновым [5] уравнение состояния с системой кинетических уравнений для определения параметров, характеризующих исследуемое состояние. При этом рассмотрены различные варианты кинетических уравнений.

Следует отметить, что после обзора различных подходов, выполненного в [14], другие обзоры отечественными учеными не проводились. В последние десятилетия иностранными учеными опубликован ряд обзорных работ по данной тематике, в которых практически отсутствует информация о работах ученых из СССР и стран СНГ.

В 1985 г. Ж. Лемэтр привел классификацию методов континуальной механики повреждений, разработанных за предшествующие 10 лет [15]. В случае изотропного разрушения в качестве меры поврежденности вводился скаляр, в случае анизотропного разрушения — вектор или тензор (второго или четвертого порядка). Рассмотрены случаи упругости, упругопластичности и упруговязкопластичности с соответствующими уравнениями состояния, учитывающими кинетику накопления поврежденности. Предложена классификация основных типов критериев разрушения. Приведены результаты расчетов для случаев упругого, упругопластического и упруговязкопластического деформирования конструкций.

Д. Крайчинович выполнил анализ развития кинетической теории в 1970–1990-х гг. [16–18]. В [16] приведен обзор типичных задач механики, в которых используется понятие рассеянной поврежденности. С физической точки зрения повреждения представлены в виде сфероидальных пустот и плоских микротрещин. При описании кинематики роста повреждений установлен закон накопления поврежденности в виде уравнения, связывающего приращение тензоров поврежденности и деформаций. Это уравнение содержит матрицу жесткости, учитывающую не только накапливаемые, но и накопленные ранее повреждения. В [17] изучаются такие проблемы, как однородность и изотропия, масштабный фактор, влияние границ зерен в поликристаллических материалах и различных фаз в композитных материалах, осреднение при измерении деформации и смещений и др. Рассмотрены некоторые феноменологические и физические модели материала, основанные на данной концепции. В [18] проанализированы достижения, недостатки и пути развития механики повреждений.

В обзоре [19] на основе взаимосвязи механики разрушения с термодинамикой необратимых процессов, а также с учетом влияния анизотропии изучено механическое поведение материалов, имеющих повреждения.

Дж. Беттен рассмотрел широкий класс моделей, описывающих ползучесть изотропных и анизотропных материалов [20]. С помощью тензорного параметра поврежденности описаны различные особенности явления ползучести и длительной прочности при сложном напряженном состоянии.

Хуа-Танг Яо с соавторами [21] проанализировали развитие кинетической теории ползучести и длительной прочности материалов начиная с основополагающих работ Л. М. Качанова и Ю. Н. Работнова. Обзор [21] посвящен исследованию ползучести и длительной прочности как в теоретическом (феноменологическом или структурном), так и в прикладном аспекте. Большое внимание уделено анализу структурных механизмов ползучести (рост пор, учет диффузионных процессов и др.).

**3. Краткий обзор экспериментальных исследований.** Все теоретические исследования основаны на результатах экспериментального изучения особенностей поведения металлов при различных программах нагружения. Наиболее часто приводятся результаты высокотемпературных испытаний трубчатых образцов при постоянных растягивающих и знакопеременных касательных напряжениях в условиях ползучести вплоть до разрушения. Такие испытания проводили В. А. Трампчинский, Д. Р. Хэйхерст и Ф. А. Лекки [22], Ф. Триваудей и П. Делобелл [23] и др. В монографиях О. В. Соснина с соавторами [9] и А. Ф. Никитенко [10] приведены результаты испытаний трубчатых образцов из различных металлов при стационарных и нестационарных сложных напряженных состояниях (растяжение и кручение). Л. И. Огородов и П. А. Павлов с соавторами исследовали ползучесть и длительную прочность конструкционных жаропрочных сплавов при температурах от 511 до 800 °С при действии растягивающей силы, крутящего момента, внутреннего давления и их комбинаций по различным стационарным и нестационарным программам [24–29]. М. М. Або эль Ата и И. Финни проводили испытания трубчатых медных образцов при температуре 110 °С в условиях постоянного давления на поверхность образцов и нестационарного осевого напряжения, меняющегося от положительного значения, соответствующего растяжению, до отрицательного значения, соответствующего сжатию, и наоборот [30]. Ф. Вэйкили-Тахами с соавторами исследовали длительное разрушение труб с днищами, подвергнутых одновременному действию растягивающей силы и внутреннего давления [31]. В ряде рассмотренных работ при анализе результатов механических испытаний изучаются структурные изменения материала в процессе ползучести.

В указанных публикациях представлены результаты испытаний металлов и сплавов, нагружаемых по различным программам. Данные об испытаниях при сложном напряжен-

ном состоянии в условиях переменной температуры отсутствуют. Таким образом, имеющихся экспериментальных данных недостаточно для определения времени до разрушения при произвольных температурно-силовых программах нагружения.

**4. Скалярный параметр поврежденности.** Следует отметить, что использование скалярного параметра поврежденности позволяет моделировать поведение металлов наиболее простым способом, поэтому варианты кинетической теории со скалярным параметром поврежденности и в настоящее время не утратили актуальность. В данном пункте рассмотрены результаты, полученные при использовании скалярного параметра поврежденности.

При моделировании длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния предлагаются различные типы кинетических уравнений.

О. В. Соснин предложил использовать для описания изучаемых явлений энергетический подход [32–34]: в качестве скалярного параметра  $\omega$  принимается величина рассеянной энергии  $A(t)$ , в качестве условия длительной прочности рассматривается равенство  $A(t^*) = A^* = \text{const}$ . Этот подход позволяет формулировать постановку задач для стационарного и нестационарного пространственных напряженных состояний. В работах О. В. Соснина и его учеников (А. Ф. Никитенко, Б. В. Горева, И. В. Любашевской и др.) показано, что экспериментальные данные и теоретические оценки процесса ползучести хорошо согласуются вплоть до момента разрушения. Энергетический подход обсуждался и развивался также в работах других ученых. В результате проведения большого числа экспериментальных исследований П. А. Павлов и Е. Ю. Неделько определили траектории нагружения, при которых предельное значение рассеянной энергии  $A^*$  приблизительно постоянно [29]. А. А. Золочевский в рамках энергетического подхода предложил форму кинетического уравнения для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию [35].

В ряде работ ползучесть и длительная прочность металлов и элементов конструкций описываются с помощью скалярного параметра поврежденности, зависящего от эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ , в качестве которого, как правило, принимаются различные комбинации (обычно линейные) максимального главного напряжения  $\sigma_{\max}$  и интенсивности напряжений  $\sigma_u$ . В [36] исследуемые явления рассматриваются на основе вероятностной теории. В [37, 38] определяется время до разрушения цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления в агрессивной среде при различных граничных условиях. В [39] предложен метод определения остаточной кратковременной прочности в произвольный момент времени. В работе [40] А. М. Отмэн и Д. Р. Хэйхерст описывают кривые ползучести в широком диапазоне, включающем все три стадии вплоть до разрушения, а в [41] на основе результатов испытаний образцов с концентраторами напряжений формулируют критерий длительной прочности. Ф. А. Лекки с соавторами выполнили исследования, в которых определялись нижняя и верхняя оценки времени до разрушения, устанавливалась связь феноменологического понятия поврежденности с параметрами структуры и т. д. [42–44].

В ряде работ особенности рассматриваемых явлений моделируются путем введения нескольких скалярных кинетических параметров. При моделировании ползучести вплоть до разрушения К. Ху и Д. Р. Хэйхерст использовали кинетическую теорию с двумя скалярными параметрами, один из которых необходим для описания неустановившейся ползучести, а другой — для описания ускоряющейся стадии ползучести [45]. Ф. Вэйкили-Тахами с соавторами предложили вариант теории Работнова с двумя кинетическими параметрами, один из которых характеризует накопление пор в материале трубы, а другой представляет собой степень старения материала [31]. А. М. Отмэн с соавторами при описании влияния концентрации напряжений в растягиваемом цилиндрическом стержне на длитель-

ную прочность используют кинетическую теорию с двумя параметрами, один из которых характеризует разупрочнение, вызываемое перемещением и взаимодействием дислокаций, а другой описывает возникновение и рост пустот на границах между зёрнами [46]. В [47] З. Л. Ковалевский с соавторами рассмотрели обобщение теории Работнова с тремя скалярными параметрами поврежденности.

А. Р. Ржаницын вместо общепринятого скалярного параметра поврежденности  $\omega$  ввел скалярный параметр объективной прочности  $r$ , характеризующий мгновенную прочность материала в заданный момент времени [48]. При этом предполагалось, что параметр  $r$  (аналогично параметру  $\omega$ ) удовлетворяет некоторому кинетическому уравнению, связывающему скорость изменения прочности с самой прочностью и эквивалентным напряжением  $\sigma_e$ , зависящим от максимального главного напряжения  $\sigma_{\max}$  и интенсивности напряжений  $\sigma_u$ . В [48] также показано, что параметры  $\omega$  и  $r$  связаны конечным соотношением.

В работах Ю. В. Суворовой и М. Б. Ахундова [49], Л. И. Огородова [24], В. В. Москвитина [50] и др. предлагается рассматривать модели, в которых процессы деформирования и разрушения описываются операторами наследственного типа.

К. Барк и Ф. А. Коцарелли с помощью второго закона термодинамики вывели достаточно общую систему уравнений для деформации, энтропии и поврежденности [51]. В [51] показано, что, выбирая форму выражения для свободной энергии Гиббса, можно получить кинетическое уравнение для поврежденности материала, зависящей от времени и компонент тензора деформаций. С помощью законов термодинамики в частном случае можно получить уравнения Качанова и Работнова для поврежденности. Ж. Лемэтр с соавторами изучили накопление повреждений в теле с использованием скалярных параметров состояния в рамках термодинамики необратимых процессов, при этом основное внимание уделялось взаимодействию процессов ползучести и усталости [52, 53].

С. А. Шестериков с соавторами, применив подход Работнова для учета дробной модели ползучести, получили условие длительного разрушения, при котором предельное значение параметра поврежденности меньше единицы [54].

Ж. Пайюдер-Кэбот и З. П. Базант предложили заменять локальную скорость выделения энергии повреждений на ее пространственное среднее значение по выбранному объему тела [55]. Такая замена приводит к хорошей сходимости результатов в рассмотренных численных примерах. Р. П. Гоел предположил, что компоненты тензора скоростей ползучести имеют потенциал, и рассмотрел несколько типов кинетических соотношений. С помощью этих соотношений определена нижняя граница времени до разрушения толстостенной трубы при кручении и полой сферы, находящейся под действием внутреннего давления [56]. В. Воеводский, решив задачу Ламе как при постоянном, так и при циклическом внутреннем давлении, получил верхнюю и нижнюю оценки времен до разрушения [57]. А. Беналлал с соавторами исследовали длительное разрушение толстостенной упруговязкопластической сферы под действием увеличивающегося внутреннего давления [58]. Ф. Вэйкили-Тахами с соавторами получили решение задачи о трубе с днищами, подвергнутой одновременно действию растягивающей силы и внутреннего давления [31]. П. Дж. Бадден при исследовании длительной прочности длинного цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления, рассмотрел два этапа разрушения: начальный этап заканчивается в тот момент, когда параметр  $\omega$  достигает значения  $\omega = 1$  в какой-либо точке, второй этап, на котором происходит распространение фронта разрушения, заканчивается полным разрушением цилиндра [59].

М. Хржановский и Дж. Мадей при построении изохронных кривых длительной прочности в случае плоского напряженного состояния используют кинетическое уравнение, с помощью которого можно оценить прочность при кратковременном нагружении и остаточную кратковременную прочность в произвольный момент времени [60].

С. Мураками и М. Мицуно обобщили теорию Работнова на случай распухания металлов при нейтронном облучении и описали ползучесть нержавеющей стали при различных условиях облучения и переменных напряжениях [61].

В ряде работ не только приведены результаты феноменологического исследования ползучести и длительной прочности металлов, но и выполнен анализ изменения структуры металлов в процессе ползучести.

Б. Ф. Дайсон с соавторами при анализе результатов испытаний цилиндрических образцов с выточками показали, что при малых напряжениях межзеренные трещины возникают в окрестности шейки и распространяются к центру образца, при больших напряжениях распространение трещин происходит в противоположном направлении [62]. Д. Р. Хэйхерст с соавторами с использованием параметра поврежденности  $\omega$  на основе анализа результатов испытаний полых цилиндров с внутренним и внешним надрезами объяснили механизм роста трещины в условиях ползучести [63]. Б. Дж. Кэйн на основе анализа известных экспериментальных данных (для нержавеющей стали) сделал вывод о межкристаллитном характере разрушения [64]. При этом образование пор на границах зерен определяется максимальным главным напряжением  $\sigma_{\max}$ , тогда как скорость трещинообразования зависит также от величины интенсивности напряжений  $\sigma_u$ . В. Твергаард при анализе влияния вида напряженного состояния на длительную прочность поликристаллов учитывал диффузионный рост пор на границах зерен и скольжение вдоль границ зерен [65]. Ф. Триваудей и П. Делобелл провели статистический анализ ориентаций трещин в разрушенных образцах [23]. В качестве предельного значения параметра поврежденности  $\omega^*$  при растяжении принимается отношение суммы длин всех поперечных трещин на фиксированной площади образца к сумме длин всех поперечных межзеренных границ на той же площади (следует отметить, что это определение меры поврежденности предложено ранее [66]). В [23] показано, что вблизи области места разрушения значение  $\omega^* \approx 0,3$ . В [67] при изучении трехосного растяжения проводится феноменологическое исследование, дополненное металлографическим анализом; рассматриваются условия образования микротрещин на границах зерен.

**5. Векторный параметр поврежденности.** Очевидно, что наиболее простые соотношения имеют место при использовании скалярного параметра поврежденности. Однако ориентация дефектов, определяющих накопление повреждений (полости, микропоры, микротрещины), обусловлена нагрузками, под действием которых эти дефекты возникают. Как известно, обычно микротрещины развиваются приблизительно перпендикулярно максимальному из главных напряжений. Увеличение этих микротрещин приводит к разрушению межзеренных связей в поликристалле, в результате чего происходит разрыв. Для описания разрушений такого типа недостаточно использовать скалярный параметр поврежденности, необходимо также использовать векторный или тензорный параметр поврежденности. Ниже рассмотрены варианты кинетической теории с использованием векторного параметра поврежденности или с комбинацией скалярного и векторного параметров.

Среди ученых, работавших в данном направлении, в первую очередь следует отметить Л. М. Качанова, предложившего учитывать как величину повреждения  $\omega$ , так и его направление [7, 68, 69]. Скорость накопления поврежденности  $\dot{\omega}$  в каждой плоскости зависит от нормального напряжения, действующего в этой плоскости; локальное разрушение происходит, когда величина  $\omega$  в каком-либо направлении достигает предельного значения; полное разрушение наступает после прохождения фронта разрушения через рассматриваемое тело.

В работе И. В. Наместниковой и С. А. Шестерикова [70] предложен другой подход. В качестве параметра поврежденности принимается величина  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ , где  $\omega_i$

связаны с главными напряжениями  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) следующими зависимостями:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \begin{cases} f(\sigma_i, \omega_i), & \sigma_i > 0, \\ 0, & \sigma_i \leq 0. \end{cases}$$

Эти зависимости описывают накопление проекций вектора поврежденности на направления главных напряжений в процессе ползучести. Величина вектора поврежденности удовлетворяет естественным условиям  $\omega(0) = 0$ ,  $\omega(t^*) = 1$ . В. А. Пелешко задает поврежденность для каждого направления в векторном пространстве напряжений [71]. В [72] с помощью векторного подхода описано явление анизотропной поврежденности.

В цикле работ [73–77] выполнено обобщение модели, предложенной в [70]. С этой целью вводится коэффициент прочностной анизотропии материала и учитываются компоненты вектора поврежденности, накапливаемые в процессе кратковременного квазистатического нагружения, а также взаимная зависимость компонент  $\omega_i$ . В [73–77] используется введенный в [78] коэффициент прочностной анизотропии  $\alpha_0$ , определяемый для трубчатых образцов как отношение осевого и поперечного нормальных напряжений, приводящих при растяжении в этих направлениях к разрушению образца за одно и то же время  $t^*$ . В [79] приведены значения  $\alpha_0$ , полученные при анализе серии испытаний с использованием различных критериев длительной прочности. Впервые экспериментально получено [73] и с помощью предложенной модели определено время до разрушения при стационарном сложном напряженном состоянии при различных программах кратковременного нагружения. Отмечено, что при одних и тех же значениях  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_u$ , т. е. при одних и тех же значениях эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ , различным видам напряженного состояния могут соответствовать различные значения времени до разрушения  $t^*$ . Предложен ряд кинетических уравнений, описывающих этот результат.

В некоторых работах используются и скалярный, и векторный параметры поврежденности.

С. А. Шестериков с соавторами отметили, что в процессе ползучести при сложном напряженном состоянии фактически появляется анизотропия свойств материала с накопленной поврежденностью, и предложили модель, в которой комбинируются скалярный и векторный подходы [80]. Скалярный параметр может быть использован для моделирования поведения материалов, в которых либо расширяются сферические поры, либо максимальное главное напряжение значительно больше остальных главных напряжений. Отмечено, что в случае развития трещиновидных дефектов при описании длительного разрушения следует использовать векторный подход. А. А. Чижик и Ю. К. Петреня, наоборот, считают, что в области микропор параметр поврежденности является векторной величиной, а в области клиновидных трещин — скаляром [81].

О. К. Морачковский использует скалярный параметр для описания установившейся и ускоряющейся стадий ползучести, а векторный параметр для описания процесса ползучести на неустановившейся стадии [82]. М. Хржановский и Дж. Мадей при описании изохронных кривых применяют скалярный или векторный подход в зависимости от времени до разрушения [83]. Г. М. Хажинский использует в качестве скалярного параметра внутриверевную поврежденность, а в качестве векторного параметра — межверевную поврежденность [84]. Д. Р. Хэйхерст с соавторами при моделировании длительного разрушения различных сплавов в условиях сложного нагружения в качестве параметра  $\omega$  рассматривают часть объема, занятую порами [85, 86]. При этом для описания поведения алюминиевого сплава используется скалярный параметр  $\omega$ , при описании поведения медных образцов следует учитывать изменение направления (векторный параметр) максимального главного напряжения при изломе траектории нагружения.

**6. Тензорный параметр поврежденности.** При исследовании зависимости времени до разрушения от различных характеристик анизотропии материала (как исходной, так и приобретенной) часто используется тензорный параметр поврежденности, при этом рассматриваются тензоры второго, четвертого и восьмого рангов. Впервые тензорный параметр поврежденности предложен в классической монографии Ю. Н. Работнова [5], при этом в качестве характеристики напряженного состояния в [5, 87] принимается линейная комбинация  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_u$ .

В. П. Тамуж рассмотрел возможность построения теории длительной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью скалярного, векторного или тензорного параметра поврежденности [88]. Г. Альтенбах и П. Шис указали основные типы параметра поврежденности и рассмотрели возможность описания связи условий нагружения с поврежденностью на уровне структуры материала, а также учета различия свойств при растяжении и сжатии и анизотропии процесса накопления поврежденности [89].

В 1967 г. А. А. Ильюшин ввел понятия тензоров и мер повреждений, которые определяются с помощью функционалов для заданных процессов изменения во времени тензоров напряжений и моментов [90]. Этот подход развит в работе Э. Б. Завойчинской и И. А. Кийко: введен оператор повреждений, предложено обобщение механических теорий прочности, исследованы предельные процессы нагружения в пространстве Ильюшина [91]. Б. Е. Победра рассмотрел операторные определяющие соотношения среды, включающие меру поврежденности Ильюшина [92]. Возможные несовершенства материала учтены путем введения моментных напряжений, проведен термодинамический анализ процесса эволюционного разрушения материала. В. П. Тамуж и А. Ж. Лагздыньш использовали тензорный подход при моделировании накопления повреждений в виде круглых мелких трещин различной ориентации в изотропных [93] и анизотропных [94] средах. В. А. Копнов использовал предложенные в [90] интегральные операторы для получения феноменологических критериев длительной прочности анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии [95]. А. А. Лебедев и В. М. Михалевич с использованием математического аппарата, разработанного в [11, 96], сформулировали критериальные соотношения для накопленных повреждений в виде уравнения наследственного типа с разностным ядром [11, 96–98].

Дж. Беттен выделяет деформационную анизотропию и анизотропию, вызываемую накоплением повреждений [99, 100]. К. Л. Шоу и Дж. Ванг предложили тензорное уравнение для накопленных повреждений для анизотропной среды с учетом больших деформаций [101]. С. Р. Боднер предложил использовать в определяющем уравнении для анизотропной среды параметр поврежденности в виде тензора второго порядка [102].

С. Мураками с соавторами особое внимание уделили исследованию анизотропного характера тензорного параметра поврежденности, при этом использовалась комбинация методов механики сплошной среды и материаловедения [103–107]. Параметр поврежденности в виде тензора второго ранга характеризует, в частности, плотность пор в трех главных плоскостях. В качестве основных причин появления поврежденности материала рассматриваются зарождение и рост межзеренных пор, полостей и микротрещин. Для проверки полученных результатов проведены испытания для перфорированных пластин с различной ориентацией перфорации. Показано, что при малой плотности пор длительное разрушение можно описывать с помощью скалярного параметра поврежденности. В. И. Астафьев использовал тензорную меру поврежденности для описания развития пор, их слияния и превращения пор в микротрещины, расположенные на площадках, ортогональных направлению наибольшего главного напряжения [108].

Д. Крайчинович с соавторами построили теорию длительной прочности металлов с использованием параметра поврежденности в виде антисимметричного тензора второго

ранга [109–111]. В [111] рассматривается связь между микроструктурными параметрами поврежденности и макрохарактеристиками поликристаллических материалов. На основе термодинамического анализа процесса роста трещины Гриффитса получена связь между вероятностным разбросом характеристик диаграммы деформирования на микроуровне и процессом деформирования на макроуровне. В. А. Маньковский исследовал изменение поврежденности во времени с учетом ее случайного характера [112]. В результате исключения фактора случайности и использования тензорного подхода получен новый критерий длительности разрушения при сложном напряженном состоянии.

П. Делобелл с соавторами, анализируя результаты испытаний, проведенных при сложном нагружении, показали необходимость учета механизмов как изотропного, так и кинематического упрочнения материала, а также привели подробные данные об ориентации микротрещин, образующихся в ходе испытаний [113, 114].

Ж. Лемэтр применил кинетическую теорию при решении задач обработки металлов, в частности задачи о глубокой вытяжке полос. Кроме того, Ж. Лемэтр установил, что при произвольном пути нагружения возможны различные предельные кривые разрушения [115].

**Заключение.** В данной работе приведен обзор экспериментально-теоретических исследований длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния. Особенность данного обзора состоит в том, что все исследования анализируются в рамках кинетической теории. Следует отметить, что большинство публикаций посвящено разработке новых теоретических моделей, однако основное внимание необходимо уделять экспериментальной проверке этих моделей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Локощенко А. М.** Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: Моск. гос. индустр. ун-т, 2007.
2. **Локощенко А. М.** Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 116–136.
3. **Качанов Л. М.** О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 8. С. 26–31.
4. **Работнов Ю. Н.** О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
5. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
6. **Работнов Ю. Н.** О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ. 1963. № 2. С. 113–123.
7. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
8. **Trampczynski W.** Badanie wpływu historii obciążenia na pękanie metali w złożonym stanie naprężenia. Warszawa, 1985. (Prace Inst. Podstawowych Probl. Tech. / PAN; N 36).
9. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986.
10. **Никитенко А. Ф.** Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997.
11. **Михалевич В. М.** Тензорні моделі накопичання пошкоджень. Вінниця: Універсум-Вінниця, 1998.
12. **Betten J.** Creep mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
13. **Хажинский Г. М.** Деформирование и длительная прочность металлов. М.: Науч. мир, 2008.

14. **Шестериков С. А., Локощенко А. М.** Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: ВИНТИ, 1980. С. 3–104. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 13).
15. **Lemaitre J.** Local approach of fracture // *Engng Fract. Mech.* 1986. V. 25, N 5/6. P. 523–537.
16. **Krajcinovic D.** The continuous damage theory: why, how and where? // *Spominski zbornik Antona Kuhlja*. Ljubljana: S. n., 1982. P. 95–109.
17. **Krajcinovic D.** On the basic structure of continuum damage models // *Fragmentation, form and flow in fractured media: Progr. F<sup>3</sup>-conf.*, Neve Ilan, 6–9 Jan. 1986. Bristol; Jerusalem: Hilger, 1986. P. 190–204.
18. **Krajcinovic D.** Damage mechanics accomplishments, trends and needs // *Intern. J. Solids Structures*. 2000. V. 37, N 1/2. P. 267–277.
19. **Chaboche J. L.** Continuum damage mechanics. Pt 1 // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. P. 59–64.
20. **Betten J.** Mathematical modelling of materials behavior under creep conditions // *Appl. Mech. Rev.* 2001. V. 54, N 2. P. 107–132.
21. **Yao Hua-Tang, Xuan Fu-Zhen, Wang Zhengdong, Tu Shan-Tung.** A review of creep analysis and design under multi-axial stress states // *Nuclear Engng Design*. 2007. V. 237. P. 1969–1986.
22. **Trampczynski W. A., Hayhurst D. R., Leckie F. A.** Creep rupture of copper and aluminum under non-proportional loading // *J. Mech. Phys. Solids*. 1981. V. 29, N 5/6. P. 353–374.
23. **Trivaudey F., Delobelle P.** High temperature creep damage under biaxial loading. Pt 1. Experiments // *Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol.* 1990. V. 112, N 4. P. 442–449.
24. **Огородов Л. И.** Экспериментально-теоретическое исследование процесса накопления повреждений и разрушения сталей и сплавов в условиях высокотемпературного нестационарного силового нагружения и одноосного напряженного состояния // *Проблемы прочности материалов и конструкций на транспорте: Сб. науч. докл. 3-й Междунар. конф.*, Санкт-Петербург, 25–26 янв. 1995 г. СПб.: Б. и., 1997. С. 39–47.
25. **Павлов П. А.** Ползучесть и длительное разрушение полимерных и металлических материалов при плоском напряженном состоянии и нестационарном термомеханическом нагружении // *Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии*. Киев: Ин-т пробл. прочности АН УССР, 1986. С. 184–195.
26. **Павлов П. А., Бронз В. Х.** Длительное разрушение конструкционного сплава ЭИ607А при плоском напряженном состоянии // *Пробл. прочности*. 1982. № 9. С. 39–41.
27. **Павлов П. А., Бронз В. Х., Новиков А. П.** Длительное разрушение сплава ЭИ607А при сложном термомеханическом нагружении // *Пробл. прочности*. 1986. № 11. С. 26–29.
28. **Павлов П. А., Курилович Н. Н.** Длительное разрушение жаропрочных сталей при нестационарном нагружении // *Пробл. прочности*. 1982. № 2. С. 44–47.
29. **Павлов П. А., Неделько Е. Ю.** Экспериментальное определение работы необратимой деформации при разрушении некоторых металлов // *Изв. вузов. Стр-во и архитектура*. 1981. № 9. С. 55–58.
30. **Або эль Ата М. М., Финни И.** Исследование законов суммирования повреждений при ползучести // *Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков*. 1972. Т. 94, № 3. С. 21–32.
31. **Vakili-Tahami F., Hayhurst D. R., Wong M. T.** High-temperature creep rupture of low alloy ferritic steel butt-welded pipes subjected to combined internal pressure and end loading // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*. 2005. V. 363. P. 2629–2661.
32. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов. Сообщ. 1 // *Пробл. прочности*. 1973. № 5. С. 45–49.

33. **Соснин О. В.** О варианте теории ползучести с энергетическими параметрами упрочнения // *Механика деформируемых тел и конструкций*. М.: Машиностроение, 1975. С. 460–463.
34. **Соснин О. В., Любашевская И. В., Новоселя И. В.** Сравнительные оценки высокотемпературной ползучести и разрушения конструкционных материалов // *ПМТФ*. 2008. Т. 49, № 2. С. 123–130.
35. **Золочевский А. А.** Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // *Изв. вузов. Машиностроение*. 1986. № 12. С. 7–10.
36. **Кулагин Д. А., Локощенко А. М.** Моделирование влияния агрессивной окружающей среды на ползучесть и длительную прочность металлов при сложном напряженном состоянии // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2004. № 1. С. 188–199.
37. **Локощенко А. М., Платонов Д. О.** Математическое моделирование длительной прочности цилиндрических оболочек в агрессивной среде при сложном напряженном состоянии. Ч. 1 // *Машиностроение и инж. образование*. 2006. № 3. С. 55–66.
38. **Локощенко А. М., Платонов Д. О.** Длительная прочность цилиндрической оболочки в агрессивной среде при условии массообмена // *Физ.-хим. механика материалов*. 2007. Т. 43, № 2. С. 17–24.
39. **Madej J.** Decrease of the residual strength during creep // *Engng Trans*. 1994. V. 42, N 3. P. 203–227.
40. **Othman A. M., Hayhurst D. R.** Multi-axial creep rupture of a model structure using a two parameter material model // *Intern. J. Mech. Sci*. 1990. V. 32, N 1. P. 35–48.
41. **Othman A. M., Hayhurst D. R.** Determination of low strain multi-axial creep rupture criteria using notched-bar data // *Eur. J. Mech. A. Solids*. 1993. V. 12, N 5. P. 609–629.
42. **Leckie F. A., Hayhurst D. R.** Creep rupture of structures // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1974. V. 340, N 1622. P. 323–347.
43. **Leckie F. A., Wojewodzki W.** Estimates of rupture life-constant load // *Intern. J. Solids Structures*. 1975. V. 11, N 12. P. 1357–1365.
44. **Leckie F. A., Hayhurst D. R.** Constitutive equations for creep rupture // *Acta Metallurgica*. 1977. V. 25, N 9. P. 1059–1070.
45. **Xu Q., Hayhurst D. R.** The evaluation of high-stress creep ductility for 316 stainless steel at 550 °C by extrapolation of constitutive equations derived for lower stress levels // *Intern. J. Pressure Vessels Piping*. 2003. V. 80. P. 689–694.
46. **Othman A. M., Dyson B. F., Hayhurst D. R., Lin J.** Continuum damage mechanics modelling of circumferentially notched tension bars undergoing tertiary creep with physically-based constitutive equations // *Acta metallurgica et materialia*. 1994. V. 42, N 3. P. 597–611.
47. **Kowalewski Z. L., Lin J., Hayhurst D. R.** Investigation of a high accuracy uni-axial creep testpiece with slit extensometer ridges // *Arch. Mech*. 1995. V. 47, N 2. P. 261–279.
48. **Ржаницын А. Р.** Теория длительной прочности при произвольном одноосном и двухосном нагружении // *Строит. механика и расчет сооружений*. 1975. № 4. С. 25–29.
49. **Суворова Ю. В., Ахундов М. Б.** Длительное разрушение изотропной среды в условиях сложного напряженного состояния // *Машиноведение*. 1986. № 4. С. 40–46.
50. **Москвитин В. В.** Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972.
51. **Burke K., Cozzarelli F. A.** On the thermodynamic foundations of strain-dependent creep damage and rupture in three dimensions // *Intern. J. Solids Structures*. 1984. V. 20, N 5. P. 487–497.
52. **Lemaitre J., Chaboche J.-L.** Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement // *J. méca. appl.* 1978. V. 2, N 3. P. 317–365.

53. **Lemaitre J., Sermage J. P.** One damage law for different mechanisms // *Comput. Mech.* 1997. V. 20, N 1/2. P. 84–88.
54. **Шестериков С. А., Лебедев С. Ю., Юмашева М. А.** Новые функциональные соотношения для описания процессов ползучести и длительной прочности // *Тр. 9-й конф. по прочности и пластичности, Москва, 22–26 янв. 1996 г. М.: Ин-т пробл. механики РАН, 1996. Т. 3. С. 130–134.*
55. **Pijaudier-Cabot G., Bazant Z. P.** Nonlocal damaged theory // *J. Engng Mech.* 1987. V. 113, N 10. P. 1512–1533.
56. **Goel R. P.** On the creep rupture of a tube and a sphere // *Trans. ASME.* 1975. V. E42, N 3. P. 625–629.
57. **Wojewodzki W.** Creep rupture of structures at elevated temperature and estimates of rupture life // *Rozprawy Inz.* 1978. V. 26, N 3. P. 515–540.
58. **Benallal A., Billardon R., Lemaitre J.** Failure analysis of structures by continuum damage mechanics // *Advances in fracture research: Proc. of the 6th Intern. conf. fract., New Dehli, 4–10 Dec. 1984. Oxford etc.: Pergamon Press, 1986. V. 5. P. 3669–3676.*
59. **Budden P. J.** The sensitivity of the creep rupture of a pressurized cylinder to variations in the multiaxial rupture surface // *Intern. J. Mech. Sci.* 1985. V. 27, N 1/2. P. 83–95.
60. **Chrzanowski M., Madej J.** Isochronous creep rupture curves in plane stress // *Mech. Res. Comm.* 1980. V. 7, N 1. P. 39–40.
61. **Murakami S., Mizuno M.** A constitutive equation of creep, swelling and damage under neutron irradiation applicable to multiaxial and variable states of stress // *J. Soc. Mater. Sci. (Jap.)* 1992. V. 41, N 463. P. 458–464.
62. **Dyson B. F., Loveday M. S.** Creep fracture in nimonic 80A under triaxial tensile stressing // *Creep in structures: Proc. of the 3rd symp., Leicester (UK), Sept. 8–12, 1980. Berlin etc.: Springer, 1981. P. 406–421.*
63. **Hayhurst D. R., Brown P. R., Morrison C. J.** The role of continuum damage in creep crack growth // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1984. V. 311, N 1516. P. 131–158.
64. **Cane B. J.** Creep damage accumulation and fracture under multiaxial stresses // *Advances in fracture research: Proc. of the 5th Intern. conf. fract., Cannes, 1981. Oxford etc.: Pergamon Press, 1982. V. 3. P. 1285–1293.*
65. **Tvergaard V.** On the stress state dependence of creep rupture // *Acta Metallurgica.* 1986. V. 34, N 2. P. 243–256.
66. **Локощенко А. М.** Исследование поврежденности материала при ползучести и длительной прочности // *ПМТФ.* 1982. № 6. С. 129–133.
67. **Hayhurst D. R., Felce I. D.** Creep rupture under tri-axial tension // *Engng Fract. Mech.* 1986. V. 25, N 5/6. P. 645–664.
68. **Качанов Л. М.** К вопросу о хрупких разрушениях в условиях ползучести при сложном нагружении // *Вестн. Ленингр. ун-та.* 1972. № 1. С. 92–96.
69. **Качанов Л. М.** Разрушения в условиях ползучести при сложном нагружении // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1972. № 5. С. 11–15.
70. **Наместникова И. В., Шестериков С. А.** Векторное представление параметра поврежденности // *Деформирование и разрушение твердых тел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 43–52.*
71. **Пелешко В. А.** Использование поверхности поврежденности для описания ползучести и длительной прочности при сложном нагружении // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2003. № 2. С. 124–138.

72. **Chow C. L., Yang X. J., Chu E.** Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading // *Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol.* 2001. V. 123, N 4. P. 403–408.
73. **Локощенко А. М.** Исследование длительной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью кинетического подхода // *Тр. Центр. котлотурбин. ин-та.* 1986. № 230. С. 107–109.
74. **Локощенко А. М., Назаров В. В.** Кинетический подход исследования длительной прочности металлов при двухосном растяжении // *Авиационная техника и технология.* 2005. № 10. С. 73–78.
75. **Локощенко А. М., Назаров В. В.** Анализ длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии с помощью критериального и кинетического подходов // *Аннот. докл. 9-го Всерос. съезда по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 22–28 авг. 2006 г. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2006. Т. 3. С. 135–136.*
76. **Локощенко А. М., Назаров В. В.** Длительная прочность металлов при равноосном плоском напряженном состоянии // *ПМТФ.* 2009. Т. 50, № 4. С. 150–157.
77. **Локощенко А. М.** Методы моделирования длительной прочности металлов при стационарном и нестационарном сложных напряженных состояниях // *Упругость и неупругость: Материалы междунар. науч. симп., посвящ. 100-летию со дня рожд. А. А. Ильюшина, Москва, 20–21 янв. 2011 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2011. С. 389–393.*
78. **Локощенко А. М.** Определение анизотропии при исследовании длительной прочности в условиях плоского напряженного состояния // *Пробл. прочности.* 1983. № 9. С. 71–73.
79. **Lokoshchenko A. M., Platonov D. O.** Creep rupture of anisotropic tubes under complex stress state // *Proc. of the 7th Intern. conf. “Biaxial/multiaxial fatigue and fracture”, Berlin, 28 June — 1 July 2004. Berlin: DVM, 2004. P. 567–571.*
80. **Дачева М. Д., Шестериков С. А., Юмашева М. А.** Поврежденность при сложном нестационарном напряженном состоянии // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 1998. № 1. С. 44–47.
81. **Чижик А. А., Петреня Ю. К.** Разрушение вследствие ползучести и механизмы микро-разрушения // *Докл. АН СССР.* 1987. Т. 297, № 6. С. 1331–1333.
82. **Морачковский О. К.** К вопросу о разрушении при ползучести анизотропных материалов // *Пробл. машиностроения.* 1978. № 6. С. 41–43.
83. **Chrzanowski M., Madej J.** Budowa granicznych krzywych zniszczenia w oparciu o koncepcje parametru uszkodzenia // *Mech. teor. stosow.* 1980. V. 18, N 4. P. 587–601.
84. **Хажинский Г. М.** О теории ползучести и длительной прочности металлов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1971. № 6. С. 29–36.
85. **Hayhurst D. R., Trampczynski W. A., Leckie F. A.** Creep rupture under non-proportional loading // *Acta Metallurgica.* 1980. V. 28. P. 1171–1183.
86. **Trampczynski W. A., Hayhurst D. R.** Creep deformation and rupture under non-proportional loading // *Creep in structures: Proc. of the 3rd symp., Leicester (UK), Sept. 8–12, 1980. Berlin etc.: Springer, 1981. P. 388–402.*
87. **Rabotnov Y. N.** Creep rupture // *Proc. of the 12th Intern. congr. of appl. mech. Stanford, Aug. 1968. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1969. P. 342–349.*
88. **Тамуж В. П.** Об одной возможности построения теории длительного разрушения // *Пробл. прочности.* 1971. № 2. С. 59–64.
89. **Altenbach H., Schiesse P.** Modelling of the constitutive behaviour of damaged materials // *Advances in fracture resistance and structural integrity: Selec. pap. 8th Intern. conf. fract., Kyiv, 8–14 June 1993. Oxford etc.: Pergamon Press, 1994. P. 51–57.*

90. **Ильюшин А. А.** Об одной теории длительной прочности // Инж. журн. Механика твердого тела. 1967. № 3. С. 21–35.
91. **Завойчинская Э. Б.** Введение в теорию процессов разрушения твердых тел: Учеб. пособие / Э. Б. Завойчинская, И. А. Кийко. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2004.
92. **Победря Б. Е.** О моделях повреждаемости раоновных сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 4. С. 128–148.
93. **Тамуж В. П., Лагздыньш А. Ж.** Вариант построения феноменологической теории разрушения // Механика полимеров. 1968. № 4. С. 638–647.
94. **Лагздинь А. Ж., Тамуж В. П.** К построению феноменологической теории разрушения анизотропной среды // Механика полимеров. 1971. № 4. С. 634–644.
95. **Копнов В. А.** Длительная прочность анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии // Пробл. прочности. 1982. № 2. С. 40–44.
96. **Михалевич В. М.** Тензорные модели длительной прочности. Сообщ. 3. Критериальные зависимости при нагружении с изменением напряженного состояния и направлений главных напряжений // Пробл. прочности. 1996. № 3. С. 101–112.
97. **Лебедев А. О., Михалевич В. М.** До теорії тривалої міцності // Доп. НАНУ. 1998. № 5. С. 57–62.
98. **Лебедев А. А., Михалевич В. М.** Критериальные соотношения для определения остаточного ресурса материалов // Пробл. прочности. 2006. № 4. С. 31–38.
99. **Betten J.** Net-stress analysis in creep mechanics // Ing.-Arch. 1982. V. 52, N 6. P. 405–419.
100. **Betten J.** Damage tensors in continuum mechanics // J. méc. théor. appl. 1983. V. 2, N 1. P. 13–22.
101. **Chow C. L., Wang J.** An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture // Engng Fract. Mech. 1987. V. 27, N 5. P. 547–558.
102. **Bodner S. R.** A procedure for including damage in constitutive equations for elastic-viscoplastic work-hardening materials // Physical non-linearities in structural analysis: Proc. of the IUTAM symp., Senlis, May 27–30, 1980. Berlin etc.: Springer, 1981. P. 21–28.
103. **Murakami S., Ohno N.** A continuum theory of creep rupture in multiaxial state of stress // Abstr. of the 15th Intern. congr. on theor. and appl. mech., Toronto, 1980. S. 1., s. a. P. 55.
104. **Murakami S., Ohno N.** A continuum theory of creep and creep damage // Creep in structures: Proc. of the 3rd symp., Leicester (UK), Sept. 8–12, 1980. Berlin etc.: Springer, 1981. P. 422–443.
105. **Murakami S., Imaizumi T.** Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // J. méc. théor. appl. 1982. V. 1, N 5. P. 743–761.
106. **Murakami S.** Mechanical modeling of material damage // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. P. 280–286.
107. **Liu Y., Kageyama Y., Murakami S.** Creep fracture modeling by use of continuum damage variable based on Voronoi simulation of grain boundary cavity // Intern. J. Mech. Sci. 1998. V. 40, N 2/3. P. 147–158.
108. **Астафьев В. И.** Описание процесса разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 4. С. 164–169.
109. **Krajcinovic D., Selvaraj S.** Creep rupture of metals. An analytical model // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 1984. V. 106, N 4. P. 405–409.
110. **Krajcinovic D.** Continuous damage mechanics revisited: basic concepts and definitions // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52, N 4. P. 829–834.
111. **Krajcinovic D., Rinaldi A.** Statistical damage mechanics. Pt 1. Theory // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2005. V. 72, N 1. P. 76–85.

112. **Маньковский В. А.** Критерии поврежденности и длительной прочности конструкционных материалов // Машиноведение. 1985. № 1. С. 87–94.
113. **Delobelle P., Tuivaudey F., Oytana C.** High temperature creep damage under biaxial loading: inco 718 and 316 (17–12 sph) steels // Nuclear Engng Design. 1989. V. 114, N 3. P. 365–377.
114. **Trivaudey F., Delobelle P.** High temperature creep damage under biaxial loading. Pt 2. Model and simulations // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 1990. V. 112, N 4. P. 450–455.
115. **Lemaitre J.** A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits // Proc. of the 4th Intern. conf. on mech. behav. mater., Stockholm, 15–19 Aug. 1983. Oxford etc.: Pergamon Press, 1984. V. 2. P. 1059–1065.

*Поступила в редакцию 23/XI 2011 г.*

---