

УДК 532.592

## ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ В ГОРИЗОНТАЛЬНО КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ ЛОТКЕ

В. И. Букреев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: Bukreev@hydro.nsc.ru

Приведены результаты экспериментальной проверки предложенной Л. Н. Сретенским линейной теории гравитационных волн в лотке, частично заполненном водой и колеблющемся горизонтально по гармоническому закону. Показано, что эта теория предсказывает существование безграничного упорядоченного счетного множества режимов генерации неустойчивых волн. Экспериментально подтверждено, что волны неустойчивы, если частота колебаний лотка совпадает с какой-либо частотой нечетной моды стоячих волн. Установлено, что при четных собственных частотах колебаний лотка теория предсказывает амплитуды волн с точностью до постоянного слагаемого. Эксперимент показал, что в этом случае волны устойчивы и имеют минимальные амплитуды.

**Ключевые слова:** колебания лотка с водой, гравитационные волны, резонанс, кумулятивные струи.

DOI: 10.15372/PMTF20160205

**Введение.** В 1951 г. Л. Н. Сретенский опубликовал фундаментальный результат теории гидродинамической устойчивости [1]. В рамках линейной теории было показано, что в случае продольных горизонтальных гармонических колебаний прямоугольного лотка, частично заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, имеется упорядоченное счетное множество режимов генерации неустойчивых гравитационных волн. Волны неустойчивы, если частота колебаний лотка совпадает с частотой какой-либо нечетной собственной моды колебаний жидкости. Волны, образующиеся при четных собственных частотах колебаний лотка, линейная теория описывает с точностью до постоянного слагаемого, поскольку в этой теории амплитуда волн считается бесконечно малой величиной, не имеющей количественной меры.

Теория [1], приведенная также в монографии [2], находит применение, в частности, при решении таких важных прикладных проблем, как сухопутная, водная и воздушная перевозка жидких грузов, а также предотвращение плескания жидкого топлива в ракетных двигателях. Обзоры многочисленных работ, посвященных исследованию проблемы плескания жидких грузов, содержатся в [3, 4].

Одну из первых задач рассматриваемого научного направления, а именно задачу о движении тела с полостью, заполненной идеальной несжимаемой каплевой жидкостью, решил Н. Е. Жуковский [5]. Значительный вклад в развитие этого научного направления внес Н. Н. Моисеев. В число решенных им задач входит рассматриваемая в данной

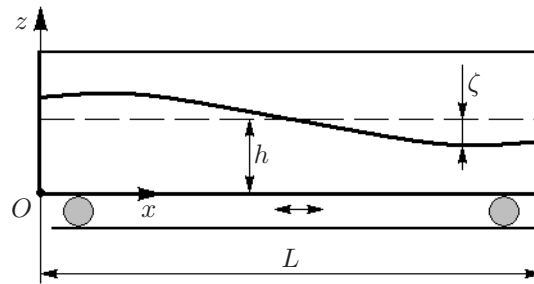


Рис. 1. Схема эксперимента

работе задача о движении капельной жидкости в частично заполненном колеблющемся контейнере [6, 7].

Известно большое количество работ, посвященных исследованию волн при вертикальном колебании контейнера, частично заполненного идеальной несжимаемой жидкостью (волн Фарадея) (см., например, [8]).

Экспериментальные работы [9, 10] содержат результаты исследования устойчивости волн в горизонтально колеблющемся лотке при частотах его колебаний в окрестности первой собственной моды колебаний содержащейся в нем воды. Экспериментальные данные, полученные при частотах колебаний лотка вплоть до частоты третьей собственной моды колебаний жидкости, приведены в работе [11]. Процесс затухания волн в подвижном лотке рассматривается в [12].

В настоящей работе приводятся результаты экспериментальной проверки теории [1, 2] при частотах колебаний лотка вплоть до частоты, равной частоте 15-й собственной моды колебаний содержащейся в нем воды. В [1, 2] анализируются как кинематические, так и динамические характеристики течения. Ниже рассматриваются только кинематические характеристики.

**1. Методика эксперимента.** Опыты выполнялись в прямоугольном горизонтальном лотке длиной 2 м, шириной 0,08 м и высотой 0,2 м, изготовленном из оргстекла. В некоторых опытах длина лотка составляла 1,04 м. Лоток в неподвижном положении заполнялся водопроводной водой (толщина слоя воды равна  $h$ ), а затем совершал продольные синусоидальные колебания с амплитудой  $a$  и круговой частотой  $\Omega$ . Используемая далее система координат  $Oxyz$ , колеблющаяся вместе с лотком, показана на рис. 1. Начало координат расположено в середине линии пересечения дна лотка с его левой торцевой стенкой.

Система, приводящая лоток в движение, включала электродвигатель постоянного тока и кривошипно-шатунный механизм, преобразующий вращательное движение вала двигателя в возвратно-поступательное движение шатуна. Большое значение отношения длины шатуна (0,97 м) к длине кривошипа (0,0115 м) обеспечивало синусоидальный характер колебаний лотка с погрешностью не более 1,2 %. Образующиеся при колебаниях лотка гравитационные волны регистрировались одновременно девятью волномерами резистивного типа, закрепленными на колеблющемся лотке. Волномеры располагались в продольной плоскости симметрии лотка в точках, соответствующих теоретическим узлам и пучностям стоячих волн, образующихся при колебаниях лотка. Сигналы волномеров регистрировались компьютером с частотой дискретизации  $100 \div 200$  отсчетов в секунду. В ряде опытов проводилась видеосъемка с частотой 25 и 125 кадр/с. Закон движения лотка регистрировался реохордом.

В рассматриваемой задаче кинематические характеристики движения воды определяются следующими шестью заданными независимыми безразмерными параметрами:

$$a^0 = \frac{a}{h}, \quad L^0 = \frac{L}{h}, \quad B^0 = \frac{B}{h}, \quad \Omega^0 = \frac{2\Omega L}{\pi\sqrt{gh}}, \quad \text{Stk} = a\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$$

( $L, B$  — длина и ширина лотка;  $\text{Stk}$  — критерий подобия Стокса;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости). Величина отклонения свободной поверхности от положения равновесия обозначается  $\zeta$ . В экспериментах эта величина зависела от указанных выше параметров, продольной координаты  $x$  и времени  $t$ . В безразмерных переменных данная зависимость имеет вид

$$\zeta^0 = \zeta^0(x^0, t^0, a^0, \Omega^0, L^0, B^0, a\sqrt{\Omega/\nu}),$$

где  $\zeta^0 = \zeta/h$ ;  $x^0 = x/L$ ;  $t^0 = t\sqrt{gh}/L$ .

## 2. Некоторые результаты теории гидродинамической устойчивости [1, 2].

В математических моделях [1, 2] течение считается двумерным (плоским) и вязкость жидкости не учитывается, поэтому параметры  $B^0$  и  $a\sqrt{\Omega/\nu}$  не входят в число критериев подобия. Потенциал скоростей движения жидкости  $\varphi$  в подвижной системе координат задается в виде [1, 2]

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{L} z\right) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

где

$$A_0 = LU_0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots),$$

$$A_n = \frac{4LU_0\xi}{\pi^2} \frac{1}{n^2(n \operatorname{sh}(rn) - \xi \operatorname{ch}(rn))} \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

$U_0$  — амплитуда скорости движения подвижной системы координат;  $\xi = L\Omega^2/(\pi g)$ ;  $r = \pi h/L$ ;  $n$  — номер собственной моды; штрих после знака суммы означает, что суммирование проводится только по нечетным значениям  $n$ .

Форма свободной поверхности задается формулой

$$\eta(x, t) = h - \frac{\Omega U_0}{g} \left( \left( \frac{1}{2} L - x \right) + \frac{4L\xi}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x/L)}{n^2(n \operatorname{th}(rn) - \xi)} \right) \sin(\Omega t).$$

Потенциал скоростей и амплитуда колебаний свободной поверхности стремятся к бесконечности, когда  $n$  принимает нечетные значения, удовлетворяющие условию

$$n \operatorname{sh}(rn) - \xi \operatorname{ch}(rn) = 0$$

или

$$L\Omega^2/(n\pi g) = \operatorname{th}(rn). \quad (1)$$

Если равенство (1) имеет место при четных значениях  $n$ , то коэффициент  $A_n$  с соответствующим номером остается произвольным и в формуле для потенциала скорости появляется дополнительное слагаемое с неопределенным коэффициентом [1, 2].

В линейной теории собственные частоты колебаний жидкости  $\omega_n$  определяются формулой

$$\omega_n^2 = gk_n \operatorname{th}(k_n h), \quad k_n = n\pi/L. \quad (2)$$

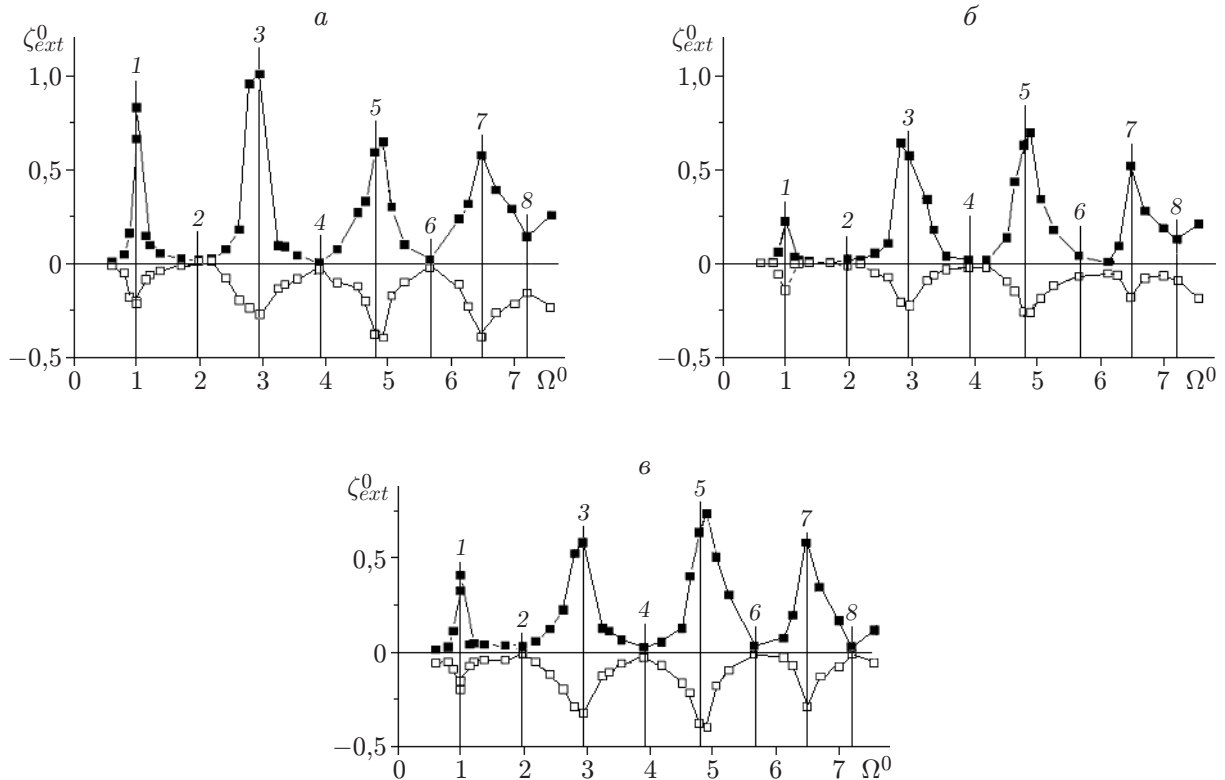


Рис. 2. Зависимость экстремальных амплитуд волн от частоты колебаний лотка ( $h = 0,065$  м,  $L = 2$  м):

$a$  —  $x^0 = 0,25$ ,  $б$  —  $x^0 = 0,50$ ,  $в$  —  $x^0 = 1,00$ ; темные точки — отклонения вверх от положения равновесия, светлые — отклонения вниз; вертикальные линии — значения собственных частот, вычисленные по точному дисперсионному соотношению (2); 1–8 — номера собственных мод

Когда длина лотка  $L$  существенно больше толщины слоя жидкости  $h$ , можно использовать формулу, полученную на основе длинноволнового приближения:

$$\omega'_n = k_n \sqrt{gh}.$$

**3. Результаты опытов.** Опыты проводились при  $L = 2,00; 1,04$  м,  $h = 0,065$  м,  $a = 1,15$  см,  $B = 8$  см,  $\nu = 0,01$  см<sup>2</sup>/с. Параметр  $\Omega$  принимал ряд значений в диапазоне  $0,70 \div 9,12$  рад/с. Если частота колебаний лотка  $\Omega$  совпадает с какой-либо собственной частотой колебаний жидкости  $\omega_n$  при нечетных значениях  $n$ , то согласно теории [1, 2] скорость жидкости и амплитуда волн стремятся к бесконечности. В действительности нелинейные эффекты ограничивают рост волн. Соответствующую количественную информацию можно получить из эксперимента.

На рис. 2 приведены экспериментально полученные зависимости величины отклонения свободной поверхности от положения равновесия  $\zeta_{ext}$  от частоты колебаний лотка при значениях параметра  $x^0 = 0,25; 0,50; 1,00$ . Используются безразмерные координаты  $\zeta_{ext}^0 = \zeta_{ext}/h$  и  $\Omega^0 = \Omega L/(\pi\sqrt{gh})$ .

Экспериментальные данные, приведенные на рис. 2, показывают, что величина отклонения свободной поверхности как вверх, так и вниз от положения равновесия имеет наибольшие значения при нечетных собственных частотах колебаний лотка. Эти результаты хорошо согласуются с условием существования резонансных режимов в теории [1, 2] при учете отмеченного выше влияния нелинейных эффектов. Как показано выше, линейная теория не дает значения амплитуд волн при четных значениях  $n$ .

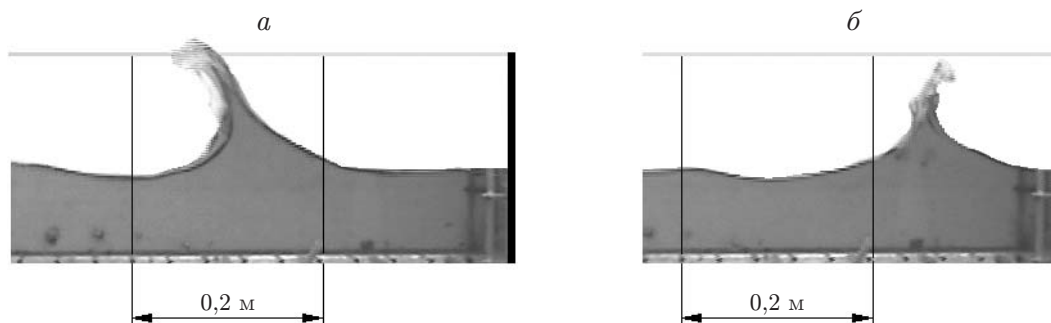


Рис. 3. Всплеск воды в различных резонансных режимах ( $h = 0,065$  м,  $L = 2$  м):  
 а —  $\Omega = \omega_5 = 6,17$  рад/с, б —  $\Omega = \omega_7 = 8,32$  рад/с

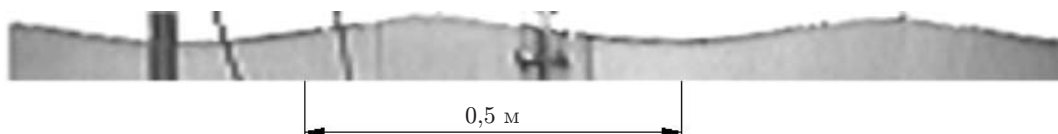


Рис. 4. Гладкая волна при  $\Omega = \omega_6$ ,  $h = 0,065$  м,  $L = 2$  м

В экспериментах установлено, что в резонансном режиме образуются бегущие волны, многократно отражающиеся от торцевых стенок лотка. При наложении встречных бегущих волн поочередно в левой и правой половинах лотка появлялись кумулятивные струи. Это явление имело место при всех реализованных нечетных значениях  $n$ , причем при  $n=1$  кумулятивные струи формировались на торцевых стенках лотка. Для этого частного случая используется термин “заплеск на стенку”. В экспериментах [9, 10] наблюдался только такой частный случай кумулятивной струи.

На рис. 3 показаны кумулятивные струи в двух резонансных режимах. Такие струи появлялись поочередно в правой и левой половинах лотка в местах расположения, соответствующих местам расположения ближайших к торцевым стенкам теоретических пучностей стоячих волн. На участках вне кумулятивных струй колебания свободной поверхности имели нерегулярный характер. Обрушение волн происходило только при отклонении свободной поверхности вверх от положения равновесия. Таким образом проявляется влияние конечной толщины слоя воды.

Если частота колебаний лотка совпадала с частотой какой-либо четной собственной моды колебаний воды, то амплитуда волн была минимальной и значительно меньшей, чем в резонансном режиме (рис. 4). (Вертикальный масштаб на рис. 4 в два раза больше горизонтального.)

На рис. 5 показана волна при частоте колебаний лотка, промежуточной между частотами 14-й и 15-й собственных мод колебаний воды. Фотография получена в момент максимального отклонения лотка от его среднего положения, когда вода еще сохраняет сплошность. Однако некоторые гребни волн находятся в предельном состоянии в смысле их устойчивости.

Пример записи колебаний свободной поверхности одновременно девятью волномерами приведен на рис. 6 ( $\tau = t_0/T$ ;  $t_0$  — время, отсчитываемое с момента прохождения лотком его крайнего левого положения;  $T$  — период колебаний). В данном случае колебания свободной поверхности на торцевых стенках лотка очень слабые и нерегулярные, что обусловлено отмеченным выше незначительным отклонением закона колебаний лотка от гармонического закона. В такие волны поступает очень небольшое количество энергии, что позволяет только поддерживать стационарный режим колебаний воды. Данное свой-

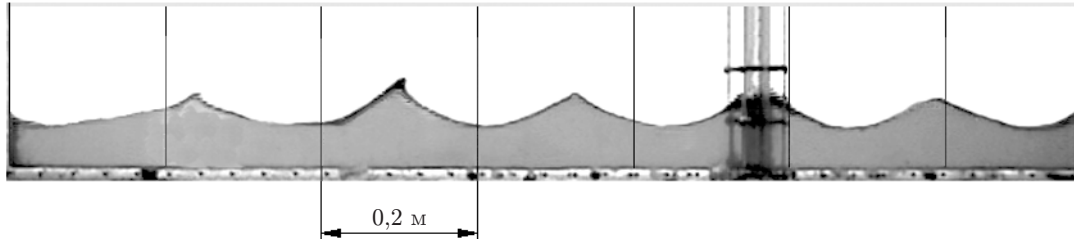


Рис. 5. Заострение гребня гладкой волны, находящейся в предельном состоянии, при  $\Omega = (\omega_{14} + \omega_{15})/2 = 14,44$  рад/с,  $h = 0,065$  м,  $L = 2$  м

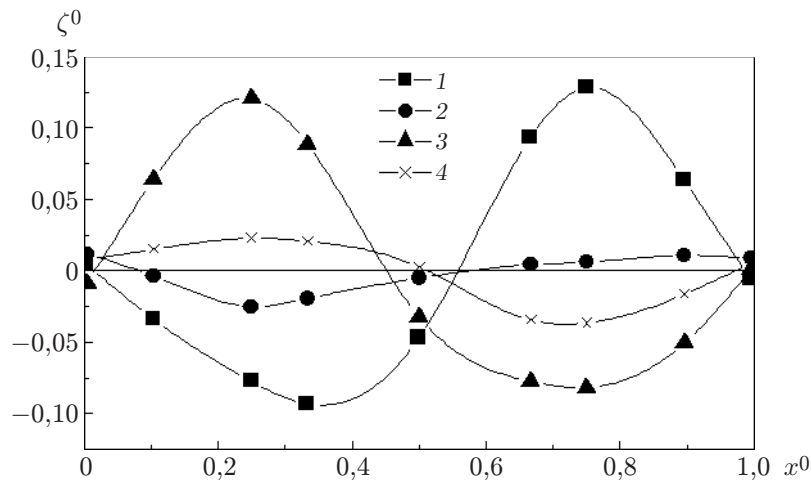


Рис. 6. Величина отклонения свободной поверхности от положения равновесия при  $\Omega = \omega_2 = 4,83$  рад/с:  
 1 —  $\tau = 0$ , 2 —  $\tau = 1/4$ , 3 —  $\tau = 1/2$ , 4 —  $\tau = 3/4$

ство оказывает влияние на форму функции  $\zeta_{ext}^0(\Omega^0)$  на рис. 2, где амплитуды волн при четных значениях  $n$  имеют минимальные значения.

При частотах колебаний лотка, превышающих частоту 16-й собственной моды колебаний жидкости, проверку теории [1, 2] затрудняли два фактора. Во-первых, чем выше частота, тем меньше соответствующий период. В этом случае требования к точности установки резонансной частоты и поддержанию стабильности режима колебаний становятся более жесткими. Во-вторых, чем выше частота, тем меньше длина волны и тем существеннее влияние вязкости жидкости на ее движение.

**Заключение.** Проведенные эксперименты подтвердили условия существования резонансных режимов генерации волн в рассмотренной задаче, полученные в линейной теории [1, 2]. Проверка теории выполнена при частотах колебаний лотка вплоть до частоты 15-й собственной моды колебаний воды. Получена экспериментальная информация о влиянии нелинейных эффектов на движение жидкости. Показано, что в резонансных режимах образуются кумулятивные струи, уносящие большое количество энергии.

Реализован режим колебаний, в котором амплитуда волн на торцевых стенках лотка настолько мала, что энергия практически не затрачивается на генерацию волн. Этот режим значительно отличается от резонансного режима, в котором большое количество энергии затрачивается на генерацию кумулятивных струй.

Автор выражает благодарность А. В. Чеботникову за помощь при выполнении опытов и подготовке рукописи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Сретенский Л. Н.** Колебания жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1951. № 10. С. 1483–1494.
2. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
3. **Faltinsen O. M.** Sloshing / O. M. Faltinsen, A. N. Timokha. Cambridge: Cambridge Univ. press, 2009.
4. **Ibrahim R. A.** Liquid sloshing dynamics. Theory and applications. Cambridge: Cambridge Univ. press, 2005.
5. **Жуковский Н. Е.** Движение твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Избранные сочинения. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. Т. 1. С. 31–153.
6. **Моисеев Н. Н.** Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85, № 4. С. 719–722.
7. **Моисеев Н. Н.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. М.: Наука, 1965.
8. **Калиниченко В. А., Нестеров С. В., Со А. Н.** Волны Фарадея в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 4. С. 83–91.
9. **Panigrahy P. K., Saha U. K., Maity D.** Experimental studies on sloshing behavior due to horizontal movement of liquids in baffled tanks // Ocean Engng. 2009. N 36. P. 213–222.
10. **Royon-Lebeaud A., Hopfinger E. J., Cartellier A.** Liquid sloshing and wave breaking in circular and square-base cylindrical containers // J. Fluid Mech. 2007. V. 447. P. 287–297.
11. **Bredmose H., Brocchini M., Peregrine D. H., Thais L.** Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves // J. Fluid Mech. 2003. V. 490. P. 214–249.
12. **Herczynski A., Weidman P. D.** Experiments on the periodic oscillation of free containers driven by liquid sloshing // J. Fluid Mech. 2012. V. 693. P. 216–242.

*Поступила в редакцию 11/VII 2014 г.,  
в окончательном варианте — 4/XII 2014 г.*

---