

**ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

*В. А. Сыровой*

(Москва)

В работах [1-3] введено понятие инвариантно-группового решения (Н-решения) и разработан общий метод их получения. В [4-6] исследованы групповые свойства уравнений моноэнергетического пучка заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда  $\eta$  в предположении об однозначности вектора скорости  $V$  и построены все существенно различные Н-решения. Ниже результаты [4-6] распространяются на случай пучка при наличии неподвижного фона плотности  $\rho_0$  (§ 1), а также на случай многоскоростных ( $V$  —  $s$ -значная функция) и многокомпонентных пучков (т. е. пучков, образованных частицами нескольких разновидностей) (§ 2). В § 1 получен ряд аналитических решений, описывающих некоторые нестационарные процессы в устройствах с плоской, цилиндрической и сферической геометрией, и среди них непрерывное периодическое решение для плоского диода с периодом, определяемым плотностью фона. Указано преобразование, содержащее произвольные функции от времени и сохраняющее уравнения Власова (§ 2). Уравнения, подвергнутые исследованию, могут рассматриваться как уравнения разреженной плазмы в магнито-гидродинамическом приближении, когда градиентами давления можно пренебречь по сравнению с силами электромагнитного происхождения.

**§ 1. Инвариантные решения уравнений пучка при наличии фона.** Уравнения пучка при наличии фона отличаются от уравнений, приведенных в [6] лишь дополнительным слагаемым в уравнении Пуассона

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = \rho + \rho_0 \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность частиц фона, причем  $\rho_0 > 0$ , если фон образован зарядами того же знака, что и заряд частиц пучка, и  $\rho_0 < 0$  — в противоположном случае. Основная группа уравнений пучка при наличии фона будет менее широкой, чем при  $\rho_0 = 0$  [6]; теперь имеет смысл  $X_1 + X_2$ , а не каждый из этих операторов в отдельности

$$X_1 + X_2 = r \nabla + V \nabla_v + 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.2)$$

Для остальных операторов сохраним те же обозначения, что и в [6]. В электростатическом случае по-прежнему имеют место преобразования с произвольными функциями от времени  $f, g, h$ .

Остановимся более подробно на плоских течениях.

**ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОДГРУПП**

		1-й класс	2-й класс		
1°.	$X_6$	4°.	$X_3 + aX_6$	7°.	$X_5 + aX_6$
2°.	$X_4$	5°.	$(X_1 + X_2) + aX_6$	3-й класс!	
3°.	$X_1 + X_2$	6°.	$X_3 + a(X_1 + X_2)$	8°.	$X_7 + Y_9$

(1.3)

**ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОДГРУПП**

		1-й класс		
1°.	$X_5, X_6$	4°.	$X_1 + X_2, X_4$	
2°.	$X_1 + X_2, X_6$	5°.	$X_3 + aX_6, (X_1 + X_2) + bX_6$	
3°.	$X_3 + a(X_1 + X_2), X_6$	6°.	$(X_1 + X_2) + aX_6, X_5$	

(1.4)

- 2-й класс
- 7°.  $X_4 + aX_6, X_5$     8°.  $X_4 + Y_7, X_5 + aX_6$     9°.  $X_4 + Z_7, (X_1 + X_2) + aX_6$
- 3-й класс
- 10°.  $X_8, X_9$     12°.  $(X_1 + X_2) + X_6, Z_8$   
 11°.  $X_1 + X_2, Y_8$     13°.  $X_1 + X_2, X_8 + Y_9$

Перечисленным подгруппам оптимальной системы (1.4) соответствуют Н-решения ранга 1, приведенные в таблице.

Н-решения, построенные на подгруппах 1° — 3°, описывают стационарные течения. Для всех решений имеем

$$\rho = J_5(\xi), \quad \mathbf{H} = \mathbf{J}_n(\xi)$$

Таблица Н-решений ранга 1

Н-решения 1-го класса				
№	условия на $a, b$	$\xi$	$\mathbf{v}$	$\varphi$
1°		$x$	$\mathbf{J}_v$	$J_4$
2°		$\psi$	$R\mathbf{J}_v$	$R^2J_4$
3°	$a = -b_2/b_1$	$q_1$	$e^{b_2q_1}\mathbf{J}_v$	$e^{2b_2q_1}J_4$
4°		$t$	$y\mathbf{J}_v$	$y^2J_4$
5°:1	$a = a', b = b'$	$q_1 - t$	$R\mathbf{J}_v$	$R^2J_4$
5°:2	$a = 0, b \neq 0$	$b \ln R - t$	$R\mathbf{J}_v$	$R^2J_4$
5°:3	$a \neq 0, b = 0$	$t - a\psi$	$R\mathbf{J}_v$	$R^2J_4$
5°:4	$a = 0, b = 0$	$t$	$R\mathbf{J}_v$	$R^2J_4$
6°	$a \neq 0$	$x^a e^{-t}$	$x\mathbf{J}_v$	$x^2J_4$

$$a' = -b_2/(b_1^2 + b_2^2), \quad b' = b_1/(b_1^2 + b_2^2)$$

Рассмотрим некоторые из Н-решений ранга 1.

Решение 4° описывает течение между параллельными плоскостями  $y = \text{const}$ .

Система ( $S/H$ ) в случае однородного магнитного поля

Н-решения 2-го класса ( $\mathbf{H} \neq 0, a \neq 0$ )

№	$\xi$	$\mathbf{v}$	$\varphi$
7°	$ax - t$	$\mathbf{J}_v$	$J_4$
8°	$ay - t$	$\mathbf{J}_v$	$\alpha x + J_4$
9°	$y^a e^{-t}$	$y\mathbf{J}_v$	$\alpha e^{t/a} x + y^2J_4$

Н-решения 3-го класса ( $\mathbf{H} = 0$ )

№	$\alpha, \beta$	$\xi$	$u$	$v$	$\varphi$
10°		$t$	$\frac{f'x}{f} + J_1$	$\frac{g'y}{g} + J_2$	$\frac{f''x^2}{2f} + \frac{g''y^2}{2g}$
11°	$\alpha \neq 0$	$t$	$\frac{\alpha x}{t} + yJ_1$	$yJ_2$	$\frac{\gamma x^2}{t^2} + y^2J_4$
12°	$\alpha \neq 0$	$ye^{-t}$	$\alpha x + yJ_1$	$yJ_2$	$\frac{\alpha^2 x^2}{2} + y^2J_4$
13°:1	$\alpha = 1$ $\beta = 0$	$t$	$\frac{f'f^{-1}x}{f} + (tx - fy)J_1$	$\frac{t^{-1}y}{f} + (tx - fy)J_2$	$\frac{1/2f''f^{-1}x^2}{f} + (tx - fy)^2J_4$
13°:2	$\alpha = 0$ $\beta = 1$	$t$	$\frac{f'f^{-1}x}{f} + (x - fy)J_1$	$(x - fy)J_2$	$\frac{1/2f''f^{-1}x^2}{f} + (x - fy)^2J_4$

$$\gamma = 1/2 \alpha (\alpha - 1)$$

$H_0$  имеет следующий вид:

$$J_1' + J_1J_2 = H_0J_2, \quad J_2' + J_2^2 = 2J_4 - H_0J_1, \quad J_5' + J_2J_5 = 0$$

$$2J_4 = J_5 + \rho_0 \tag{1.5}$$

Видно, что первое из этих уравнений удовлетворяется при  $J_1 = H_0$ . Исключая  $J_4, J_5$ , получим

$$J'' + 3JJ' + J^3 + \omega^2J = 0 \quad (J = J_2, \quad \omega^2 = H_0^2 - \rho_0) \tag{1.6}$$

Следует рассмотреть три случая: (1)  $\omega^2 > 0$ , т. е. либо  $\rho_0 < 0$ , либо  $0 < \rho_0 < H_0^2$ ; (2)  $\omega^2 < 0$ , т. е.  $\rho_0 > H_0^2$ ; (3)  $\omega = 0$ . Для первого из них решение определяется формулами

$$u = H_0 y, v = \frac{\omega \cos \tau}{\kappa + \sin \tau} y, \Phi = \frac{\kappa \omega^2}{2(\kappa + \sin \tau)} y^2, \rho = \frac{\kappa \omega^2}{\kappa + \sin \tau}, H = H_0 \quad (1.7)$$

$$(\tau = \omega t + \varepsilon, |\kappa| = |\gamma/\alpha| < 1, \alpha^2 = \gamma^2 + \omega^2)$$

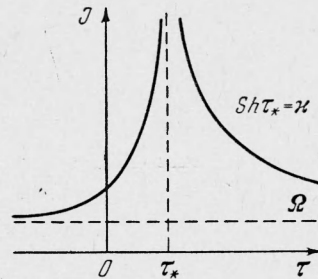
Видно, что при определении нормальной компоненты скорости добавление компенсирующего фона эквивалентно усилению магнитного поля, и наоборот, добавление фона того же знака — ослаблению магнитного поля — результат вполне естественный (ослабление или усиление  $E$  при фиксированном  $H$ ). Характер решения и вид траекторий такой же, как и решения (3.15) в работе [6] при  $\rho_0 = 0$ .

Во втором случае, решая (1.6), получаем

$$J^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \gamma^2} \frac{1 - \gamma^2 \operatorname{ch}^2 \tau + \Omega^2 \operatorname{sh}^2 \tau}{(\operatorname{sh} \tau - \kappa)^2} \quad (1.8)$$

( $\kappa = \gamma / \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ ,  $\omega = i\Omega$ ,  $\tau = \Omega t + \varepsilon$ ,  $\Omega^2 - \gamma^2 > 0$ )

$$J = \frac{\Omega}{1 - \Omega e^{-\tau}} \quad (\Omega = \gamma)$$



Фиг. 1

Вид функции  $J(\tau)$  при  $\Omega^2 - \gamma^2 > 0$  изображен на фиг. 1. Остальные параметры потока ведут себя таким же образом, претерпевая разрыв в точке  $\operatorname{sh} \tau = \kappa$  и монотонно убывая при  $|\tau| \rightarrow \infty$ ; при этом

$$J_1 = H_0, J_2 \rightarrow \Omega, J_4 \rightarrow 1/2 (\Omega^2 + H_0^2), J_5 \rightarrow 0$$

В третьем случае уравнение (1.6) совпадает с уравнением, описывающим изменение во времени скорости при электростатическом течении между параллельными плоскостями и  $\rho_0 = 0$  [6]. Решение определяется кривыми фиг. 3 [6] с той только разницей, что кривая для  $J_4$  должна быть поднята на  $H_0^2$ .

5°.4. Рассмотрим электростатическое решение этого вида. Система ( $S/H$ ) для него такова:

$$J' + J^2 = 2J_4, \quad J_5' + 2JJ_5 = 0$$

$$4J_4 = J_5 + \rho_0 \quad (J=J_1) \quad (1.9)$$

Исключая  $J_4, J_5$ , получим

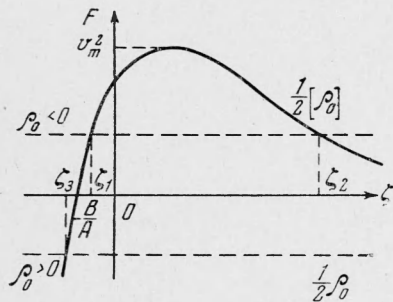
$$J'' + 4JJ' + 2J^3 - \rho_0 J = 0 \quad (1.10)$$

Решение (1.10) дается выражением

$$J^2 = 2(A\zeta + B)e^{-2\zeta} + 1/2 \rho_0 \quad (1.11)$$

причем  $t$  и  $\zeta$  связаны соотношением

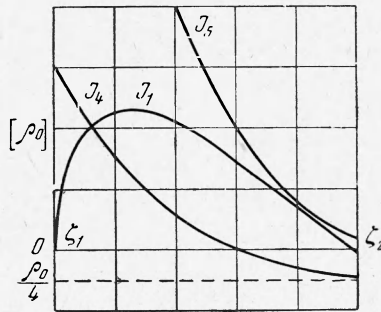
$$t = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{2(A\zeta + B)e^{-2\zeta} + 1/2 \rho_0}} \quad (1.12)$$



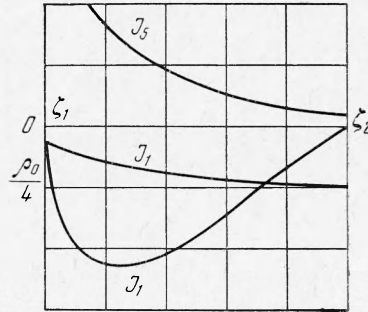
Фиг. 2

Нетрудно убедиться, что  $J_5(\zeta)$  задается той же кривой, что и на фиг. 4 [6], а  $J_4(\zeta)$  получается, если поднять соответствующую кривую фиг. 4 на  $1/4 \rho_0$ . Заметим, однако, что зависимость (1.12) отличается от  $t = t(\zeta)$ , приведенной в [6]. Решение (1.11) справедливо не при всех  $\zeta$ , а лишь для тех значений, для которых  $J^2 \geq 0$ . Фиг. 2 иллюстрирует сказанное. При

$\rho_0 > 0$  (фон того же знака, что и заряд частиц пучка) решение имеет смысл на интервале  $\zeta_3 \leq \zeta < \infty$ . Характер течения тот же, что и при  $\rho_0 = 0$  [6], с той только разницей, что  $J_1 \rightarrow \sqrt{1/2}\rho_0$ ,  $J_4 \rightarrow 1/4\rho_0$ ,  $J_5 \rightarrow 0$ . При  $\rho_0 < 0$  (компенсирующий фон) решение справедливо при  $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$ , причем на концах интервала скорость обращается в нуль (фиг. 3). При  $J_4 = 0$  плотность частиц пучка и плотность фона сравниваются. В дальнейшем  $J_5 < |\rho_0|$ ,  $J_4 < 0$ . При  $\zeta = \zeta_2$  в цилиндрическом диоде устанавливается



Фиг. 3



Фиг. 4

однородное распределение пространственного заряда с плотностью, меньшей плотности фона. Решение типа (1.11) может описывать процесс монотонного уменьшения плотности и из этого состояния. Действительно, для этого должно быть выполнено неравенство

$$v_m^2 = A \exp\left(\frac{2B}{A} - 1\right) > \frac{|\rho_0|}{2} \quad (1.13)$$

Для простоты будем считать, что  $A = B$ . Кроме (1.13), по условию  $J_5 < |\rho_0|$ . Отсюда получаем, что  $A$  должно удовлетворять неравенствам

$$\frac{1}{e} < \frac{A}{|\rho_0|} < 1$$

Решение при этом имеет вид, приведенный на фиг. 4. Можно показать, что решений вида (1.11) с  $J_5(\zeta_2) > |\rho_0|$  не существует.

10°. Решение системы ( $S/H$ ) приводит к результату

$$u = \frac{a + f'x}{f}, \quad v = \frac{b + g'y}{g}, \quad \varphi = \frac{f''x^2}{2f} + \frac{g''y^2}{2g}, \quad \rho = \frac{R_0}{fg} \quad (1.14)$$

причем для  $f(t)$  и  $g(t)$  имеет место уравнение

$$f''g + g''f = R_0 + \rho_0 fg$$

Таким образом, одна из функций  $f(t)$ ,  $g(t)$  может быть задана произвольно;  $a, b, R_0$  — произвольные постоянные. При  $g \equiv 0$  имеем

$$u = \frac{a + f'x}{f}, \quad \varphi = \frac{f''x^2}{2f}, \quad \rho = \frac{R_0}{f} \quad (1.15)$$

Для  $f(t)$  получаем уравнение

$$f'' - \rho_0 f = R_0$$

Случай компенсирующего фона  $\rho_0 = -\omega^2 < 0$  является более интересным. При этом

$$f = A \sin \tau + R_0 / \omega^2 \quad (\tau = \omega t + \delta; A, \delta = \text{const})$$

Требую, чтобы решение было непрерывным, приходим к неравенствам

$$A > 0, \quad |R_0| > A\omega^2$$

При выполнении этих условий решение (1.15) принимает вид

$$u = \frac{a + \omega x \cos \tau}{\kappa + \sin \tau}, \quad \varphi = -\frac{\omega^2 x^2 \sin \tau}{2(\kappa + \sin \tau)}, \quad \rho = \frac{R_0 / A}{\kappa + \sin \tau} \quad (1.16)$$

$$(|\kappa| = |R_0(A\omega^2)^{-1}| > 1; \kappa > 0, R_0 > 0; \kappa < 0, R_0 < 0)$$

Временная часть функций (1.16) представлена на фиг. 5 ( $I_1 = J_1 / \omega$ ,  $I_4 = J_4 / \omega^2$ ,  $I_5 = AJ_5 / R_0$ ); это — периодические функции с периодом  $T = 2\pi / \omega$ , определяемым плотностью фона.

Все, сказанное в [6] о возможности обобщения двумерных решений на пространственный случай, остается в силе. Из решений с недеформирующимися эквипотенциальными поверхностями, рассмотренными в [6], при наличии фона остается одно — инвариантное относительно подгруппы  $H \langle X_1 + X_2, X_3, X_4 \rangle$ , описывающее электростатическое течение между концентрическими сферами (1.17)

$$v_r = rJ_1(t), \quad \varphi = r^2J_4(t), \quad \rho = J_5(t)$$

Система ( $S/H$ ) для (1.17) такова:

$$J' + J^2 = 2J_4, \quad J_5' + 3JJ_5 = 0$$

$$6J_4 = J_5 + \rho_0 \quad (J = J_1) \quad (1.18)$$

Исключая  $J_4, J_5$ , получаем

$$J'' + 5JJ' + 3J^3 - \rho_0 J = 0 \quad (1.19)$$

Решение (1.19) имеет вид

$$J^2 = 2e^{-2\zeta} (Ae^{-\zeta} + B) + 1/3\rho_0 \quad (1.20)$$

причем  $t$  и  $\zeta$  связаны соотношением

$$t = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{2e^{-2\zeta} (Ae^{-\zeta} + B) + 1/3\rho_0}} \quad (1.21)$$

При  $B = 0$  выражение (1.21) запишется следующим образом:

$$\frac{1}{3} \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{1/2} \operatorname{arsh} \left( \frac{\sqrt{\rho_0}}{A} e^{3/2\zeta} \right) = t + c \quad (\rho_0 > 0)$$

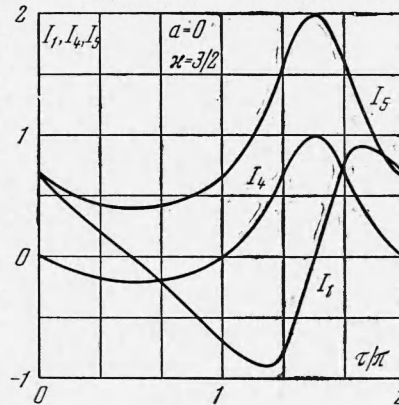
$$\frac{1}{3} \left( \frac{2}{|\rho_0|} \right)^{1/2} \operatorname{arcsin} \left( \frac{\sqrt{|\rho_0|}}{A} e^{3/2\zeta} \right) = t + c \quad (\rho_0 < 0)$$

Решение (1.20) при  $\rho_0 < 0$ , так же как (1.11), имеет смысл на интервале  $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$ , определяемом требованием  $J^2 \geq 0$ . Функции  $J_4$  и  $J_5$ , как функции от  $\zeta$ , задаются теми же кривыми, что и в [6], но кривая для  $J_4$  поднята на  $1/3\rho_0$ . Характер течений, описываемых решением (1.20), такой же, как и решения (1.11).

Следует отметить, что все сказанное в [6] о инвариантных решениях ранга 2, справедливо и теперь.

Тот факт, что и при наличии фона уравнения электростатического пучка допускают преобразование координат, скоростей и потенциала с произвольными функциями от времени, дает возможность поставить в соответствие любому стационарному решению некий нестационарный образ [7], причем последнее решение не будет подобным какому-либо из нестационарных инвариантных решений, рассмотренных выше. Наиболее простыми для интерпретации являются решения, описывающие некоторые процессы в плоском диоде.

§ 2. Инвариантные решения уравнений многокомпонентного пучка. В том случае, когда пучок образован частицами нескольких разновидностей, уравнения движения и сохранения тока необходимо выписать для каждой из компонент. Взаимодействие частиц с разными удельными зарядами учитывается посредством суммарной



Фиг. 5

