

УДК 539.3

К РАСЧЕТУ ПЛАСТИНЫ С ЛОКАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ ФОРМЫ

А. Г. Колпаков

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
630102 Новосибирск
E-mail: algk@ngs.ru

На основе метода локальных возмущений решения изучается асимптотика решения задачи изгиба пластин с локальными возмущениями формы (соединения, ребра, отверстия, сравнимые по размеру с толщиной пластины) в трехмерной постановке. Проводится полная декомпозиция задачи — разделение на двумерную задачу теории пластин и локальные задачи, описывающие трехмерное напряженно-деформированное состояние в области возмущения. С использованием численных методов решены локальные задачи.

Ключевые слова: пластина, асимптотика решения, трехмерная задача теории упругости, локальное возмущение решения, декомпозиция.

Введение. В данной работе проводится асимптотический анализ трехмерной задачи теории упругости для тонкой области (пластины) при наличии единичного локального возмущения формы (например, ребра, отверстия и т. п.). Решения этой задачи как плоской задачи теории упругости и теории пластин хорошо известны (см., например, [1]). Актуальной проблемой, возникающей при расчете пластин с единичными локальными возмущениями, является построение метода, позволяющего проводить декомпозицию задачи на “глобальную” задачу (задачу теории пластин) и локальную задачу (трехмерную задачу теории упругости), а также на основе решения “глобальной” задачи рассчитывать локальное напряженно-деформированное состояние в любой области пластины (прежде всего в области возмущения). Отметим, что подобная проблема, возникающая при использовании метода усреднения [2–4], решается путем разделения исходной задачи на усредненную задачу и задачу на ячейке периодичности. Исследование рассматриваемой задачи было продолжено в [5] и других работах, в которых применялся метод частичного усреднения. Для соединенных пластин разработаны асимптотические методы [6, 7], существенным ограничением которых является использование априорных гипотез о виде напряженно-деформированного состояния в области соединения. Применение методов теории пограничного слоя [8, 9], свободных от многих ограничений, пока не позволяет решать практические задачи, например рассчитывать напряженно-деформированное состояние в болтовом соединении.

В настоящей работе предлагается метод полной декомпозиции для трехмерной задачи теории упругости в тонкой области при наличии единичных локальных возмущений формы. Метод основан на применении многомасштабного разложения, известного из теории усреднения [2–4]. Данную задачу можно решить с использованием метода локального

Работа выполнена за счет средств, выделенных на реализацию 7-й рамочной программы Евросоюза (код проекта PIF2-GA-2008-219690).

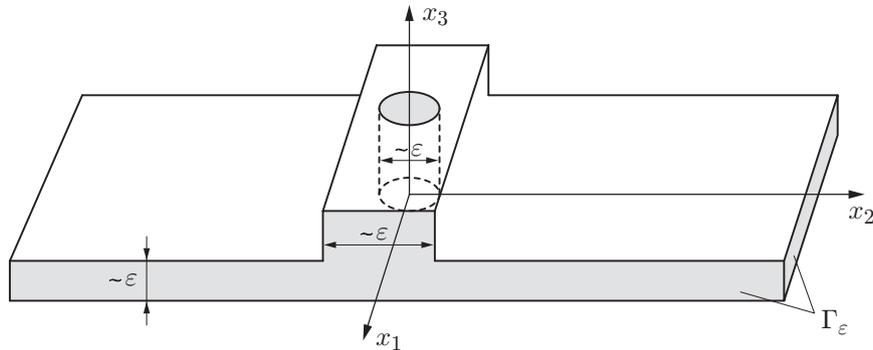


Рис. 1. Тонкая трехмерная пластина с ребром (линейное возмущение формы) и отверстием (точечное возмущение формы) в нем

корректора [10]. При этом возникает задача теории упругих тел с локальными возмущениями формы, подобная ячейной задаче теории усреднения, но в ней условие “корректор является периодической функцией” заменено условием “корректор локализован вблизи возмущения”. Данное отличие является существенным. В частности, оно обуславливает “стирание” возмущения (отверстия, соединения) в “глобальной” задаче, что соответствует инженерной теории конструкций. В то же время в предлагаемом методе сохраняются многие преимущества метода усреднения, прежде всего возможность полной декомпозиции задачи (разделения исходной задачи на “глобальную” и локальные задачи). Возникающие локальные задачи можно решить с помощью стандартных конечно-элементных программ.

1. Формулировка задачи. Рассмотрим трехмерную область Ω_ε , состоящую из двух прямоугольных параллелепипедов, толщины которых существенно меньше двух других размеров (далее — пластины), и области произвольной формы, размеры которой малы в двух направлениях (далее — линейное возмущение формы) или трех направлениях (далее — точечное возмущение формы) (рис. 1). Примером пластин с линейным возмущением формы являются тонкие пластины с соединениями различного типа (сварными, клепаными и т. д.), а примером пластин с точечным возмущением формы — тонкие пластины с отверстиями или вставками (например, резервуар с пробкой небольшого размера).

Во многих инженерных конструкциях и элементах механических приборов характерный размер возмущения равен толщине пластины. Рассмотрим случай, когда характерная толщина пластины и размеры возмущений (в двух направлениях для линейных возмущений формы и в трех направлениях для точечных возмущений формы) пропорциональны одному малому параметру ε (см. рис. 1).

Следует отметить, что существует большое количество конструкций с возмущениями формы (например, вырезами), размеры которых значительно превышают толщину пластины (в данной работе они не рассматриваются). В таких случаях для определения напряженно-деформированного состояния обычно применяется двумерная теория [1]. Приведенные ниже результаты показывают, что использовать только двумерную теорию для расчета локальных напряжений на границах “больших” возмущений недостаточно.

Введем следующие обозначения: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ — координаты в плоскости пластины. Считаем, что ось x_3 направлена перпендикулярно плоскости пластины. Индексы у величин, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3, греческими — значения 1, 2, по повторяющимся индексам проводится суммирование (за исключением случаев, оговоренных особо).

Задача теории упругости может быть записана в виде задачи минимизации [11]

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_\varepsilon} E(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{f}(\mathbf{X})\mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in V_\varepsilon, \quad (1)$$

где $E(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ — локальная плотность энергии упругой деформации:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1, l=1}^3 \sigma_{kl} u_{k,l} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^3 a_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j},$$

a_{ijkl} — упругие постоянные; $V_\varepsilon = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega_\varepsilon): \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon\}$ — множество допустимых перемещений. Предполагается, что пластина закреплена на поверхности Γ_ε , остальные поверхности свободны от напряжений и тело находится под действием массовых сил $\mathbf{f}(\mathbf{X})$.

Метод локального возмущения основан на поиске решения задачи (1) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - \varepsilon w_{,\alpha x}(\mathbf{X})x_3\mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{V}(x_3/\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}/\varepsilon) = \\ &= u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - w_{,\alpha x}(\mathbf{X})y_3\mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{V}(y_3) + \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2)$$

где функции $u_\alpha(\mathbf{X})$ ($\alpha = 1, 2$) и $w(\mathbf{X})$ “медленной” переменной $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ имеют смысл глобальных перемещений в плоскости пластины и глобального нормального прогиба пластины соответственно; функция $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ “быстрой” переменной $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ быстро затухает при удалении от геометрического возмущения; выражение $u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - \varepsilon w_{,\alpha x}(\mathbf{X})x_3\mathbf{e}_\alpha$ описывает перемещения однородной пластины в соответствии с классической теорией [11]; $\varepsilon \mathbf{V}(x_3/\varepsilon)$ — корректор в асимптотической теории пластин [12, 13] (в отсутствие этого корректора перемещения в классической теории не удовлетворяют условию равенства нулю нормальных напряжений на свободной поверхности пластины); $\varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ — локальный корректор [10], т. е. возмущение решения задачи (1), порожденное возмущением формы пластины.

Производные перемещений $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})$ (2) равны

$$u_{k,l}^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X})\delta_{k\alpha}\delta_{l\beta} - w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X})y_3\delta_{k\alpha}\delta_{l\beta} + V_{k,ly}(y_3) + v_{k,ly}(\mathbf{y}). \quad (3)$$

С учетом формулы (3) компоненты тензора напряжений σ_{ij} , соответствующие перемещениям $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})$ (2), определяются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= a_{ijkl}u_{k,l}^\varepsilon(\mathbf{x}) = a_{ij\alpha\beta}u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X})\delta_{k\alpha}\delta_{l\beta} - a_{ij\alpha\beta}w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X})x_3\delta_{l\beta}\delta_{k\alpha} + \\ &+ a_{ijkl}(V_{k,ly}(y_3) + v_{k,ly}(\mathbf{y})). \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) использовано свойство симметрии упругих постоянных [11].

С учетом формулы (3) выражение для локальной энергии $E(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}))$, соответствующей перемещениям $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})$ (2), записывается в виде

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})) &= a_{ijkl}u_{i,j}^\varepsilon(\mathbf{x})u_{k,l}^\varepsilon(\mathbf{x})/2 = \\ &= \sigma_{kl}[u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X})\delta_{k\alpha}\delta_{l\beta} - w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X})x_3\delta_{k\alpha}\delta_{l\beta} + V_{k,ly}(y_3) + v_{k,ly}(\mathbf{y})]/2 = \\ &= a_{\alpha\beta\gamma\delta}u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X})u_{\gamma,\delta x}(\mathbf{X})/2 - a_{\alpha\beta\gamma\delta}w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X})x_3u_{\gamma,\delta x}(\mathbf{X}) + \\ &+ a_{\gamma\delta kl}(V_{k,ly}(y_3) + v_{k,ly}(\mathbf{y}))u_{\gamma,\delta x}(\mathbf{X}) - a_{\alpha\beta\gamma\delta}w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X})w_{,\gamma x\delta x}(\mathbf{X})x_3^2/2 - \\ &\quad - a_{ij\alpha\beta}(V_{k,ly}(y_3) + v_{k,ly}(\mathbf{y}))w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X})x_3 + \\ &+ a_{ijkl}(V_{k,ly}(y_3) + v_{k,ly}(\mathbf{y}))(V_{i,jy}(y_3) + v_{i,jy}(\mathbf{y}))/2 = E(u_1, u_2, w, \mathbf{v}, \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (5)$$

После подстановки (5) в (1) задача (1) переходит в задачу минимизации

$$L(u_1, u_2, w, \mathbf{v}, \mathbf{V}) = \int_{\Omega_\varepsilon} E(u_1, u_2, w, \mathbf{v}, \mathbf{V}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_\varepsilon} [f_\alpha(\mathbf{X})u_\alpha(\mathbf{X}) + f_3(\mathbf{X})w(\mathbf{X})] d\mathbf{x} \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$u_1 \in W_1, \quad u_2 \in W_1, \quad w \in W_2, \quad \mathbf{v} \in U, \quad \mathbf{V} \in U_h,$$

рассматриваемую относительно функций $u_1(\mathbf{X}), u_2(\mathbf{X}) \in W, w \in W_2$ и $\mathbf{v}(\mathbf{y}) \in U, \mathbf{V}(\mathbf{y}) \in U_h$. Здесь $W_1 = \{u(\mathbf{X}) \in H^1(D): u(\mathbf{X}) = 0 \text{ на } \partial D\}; W_2 = \{u(\mathbf{X}) \in H^2(D): u(\mathbf{X}) = \partial w / \partial \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial D\}; U = \{\mathbf{v}(\mathbf{y}) \in H^1(Q_\varepsilon): \mathbf{v}(\mathbf{y})\}$ (функция U локализована в окрестности возмущения); $U_h = \{\mathbf{V}(y_3) \in H^1(Q_\varepsilon)\}$. В (6) члены, имеющие порядок ε , опущены.

Несмотря на то что в данной работе отсутствует строгое математическое обоснование асимптотик, представляется целесообразным указать функциональные классы, имеющие механический смысл, в которых предлагается искать решения.

Уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала $L(u_1, u_2, w, \mathbf{v}, \mathbf{V})$ имеют вид

$$\delta L_{\mathbf{v}} = \int_{\Omega_\varepsilon} [a_{\gamma\delta kl} u_{\gamma, \delta x}(\mathbf{X}) - a_{ij\alpha\beta} w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) y_3 + a_{ijkl}(V_{i,jy}(y_3) + v_{i,jy}(\mathbf{y}))] \delta v_{k,ly}(\mathbf{y}) d\mathbf{x} = 0; \quad (7)$$

$$\delta L_{\mathbf{V}} = \int_{\Omega_\varepsilon} [a_{\gamma\delta kl} u_{\gamma, \delta x}(\mathbf{X}) - a_{ij\alpha\beta} w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) y_3 + a_{ijkl}(V_{i,jy}(y_3) + v_{i,jy}(\mathbf{y}))] \delta V_{k,ly}(\mathbf{y}) d\mathbf{x} = 0; \quad (8)$$

$$\delta L_{u_\gamma} = \int_{\Omega_\varepsilon} [-a_{\gamma\delta\alpha\beta} w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) x_3 + a_{\gamma\delta kl}(V_{k,ly}(y_3) + v_{k,ly}(\mathbf{y}))] \delta u_{\gamma, \delta x}(\mathbf{X}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_\varepsilon} f_\gamma(\mathbf{X}) \delta u_{\gamma, \delta x}(\mathbf{X}) d\mathbf{x} = 0 \quad (\gamma = 1, 2); \quad (9)$$

$$\delta L_w = \int_{\Omega_\varepsilon} [-a_{\alpha\beta\gamma\delta} x_3 u_{\gamma, \delta x}(\mathbf{X}) - a_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\gamma x\delta x}(\mathbf{X}) x_3^2 - a_{ij\alpha\beta}(V_{k,ly}(y_3) + v_{k,ly}(\mathbf{y})) y_3] \delta w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_\varepsilon} f_3(\mathbf{X}) \delta w(\mathbf{X}) d\mathbf{x} = 0, \quad (10)$$

где δL — вариация по соответствующей переменной.

Введем функцию $W(\mathbf{y}) = v(\mathbf{y}) + V(y_3)$. Сложив уравнения (7) и (8), получаем уравнение в вариациях относительно $W(\mathbf{y})$. Интегрируя это уравнение по частям, имеем краевую задачу:

— в области Ω_ε

$$[a_{ijkl} W_{k,ly}(\mathbf{y}) + a_{\gamma\delta kl} u_{\gamma, \delta x}(\mathbf{X}) - a_{ij\alpha\beta} w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) y_3]_{,jy} = 0; \quad (11)$$

— на свободной поверхности

$$[a_{ijkl} W_{k,ly}(\mathbf{y}) + a_{\gamma\delta kl} u_{\gamma, \delta x}(\mathbf{X}) - a_{ij\alpha\beta} w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) y_3] n_j = 0; \quad (12)$$

— вдали от возмущения

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}/\varepsilon) \rightarrow \mathbf{V}(y_3). \quad (13)$$

Поскольку в “основной” части пластины (т. е. вдали от геометрического возмущения) $v(\mathbf{y}) = 0$, получаем задачу для определения функции $\mathbf{V}(y_3)$:

— в области Ω_ε

$$\frac{d}{dy_3} \left(a_{i3k3} \frac{dV_k}{dy_3}(y_3) + a_{i3\gamma\delta l} u_{\gamma,\delta x}(\mathbf{X}) - a_{i3\alpha\beta} w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) y_3 \right) = 0; \quad (14)$$

— на свободной поверхности

$$a_{i3k3} \frac{dV_k}{dy_3}(y_3) + a_{i3\gamma\delta l} u_{\gamma,\delta x}(\mathbf{X}) - a_{i3\alpha\beta} w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) y_3 = 0. \quad (15)$$

Используя идею, лежащую в основе метода усреднения [2–4], разделим в (11)–(13) “быстрые” \mathbf{y} и “медленные” \mathbf{x} переменные. Задачу (11)–(13) будем рассматривать как задачу в “быстрых” переменных \mathbf{y} , в которую функции “медленной” переменной \mathbf{x} входят в качестве параметров. В силу линейности задачи (11)–(13) ее решение можно записать в виде

$$\mathbf{W}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \sum_{\alpha=1, \beta=1}^2 \left[\varepsilon \mathbf{N}^{(0\alpha\beta)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X}) - \varepsilon \mathbf{N}^{(1\alpha\beta)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) \right], \quad (16)$$

где функции $\mathbf{N}^{(\nu\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ($\nu = 0, 1, \alpha = 1, 2, \beta = 1, 2$) — решения задач в области $\Omega_\infty = \varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon$:

— в области Ω_∞

$$[a_{ijkl} N_{k,ly}^{1\alpha\beta}(\mathbf{y}) - a_{ij\alpha\beta} y_3^\nu]_{,jy} = 0; \quad (17)$$

— на свободной поверхности

$$[a_{ijkl} N_{k,ly}^{1\alpha\beta}(\mathbf{y}) - a_{ij\alpha\beta} y_3^\nu] n_j = 0; \quad (18)$$

— вдали от возмущения

$$\mathbf{N}^{1\alpha\beta}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{n}^{1\alpha\beta}(y_3). \quad (19)$$

Для задачи (14), (15) имеет место аналогичное (16) представление с функциями $\mathbf{n}^{(\nu\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ($\nu = 0, 1, \alpha = 1, 2, \beta = 1, 2$), определяемыми из решения следующей задачи:

— в области Ω_∞

$$\frac{d}{dy_3} \left[a_{i3k3} \frac{dn_k^{1\alpha\beta}}{dy_3}(y_3) - a_{i3\alpha\beta} y_3^\nu \right] = 0; \quad (20)$$

— на свободной поверхности

$$a_{i3k3} \frac{dn_k^{1\alpha\beta}}{dy_3}(y_3) - a_{i3\alpha\beta} y_3^\nu = 0. \quad (21)$$

Задача (20), (21), являющаяся краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет точные решения для всех $\nu = 0, 1, \alpha = 1, 2, \beta = 1, 2$. Указанные решения приведены, например, в [14].

Задачи (17)–(21) будем называть локальными задачами. Локальные задачи являются аналогами ячеечных задач теории усреднения (см., например, [2–4]). Однако, поскольку в рассматриваемом случае у пластин отсутствует периодическая структура, необходимо ввести новый термин “локальная задача”.

Возмущениями решения являются функции $\mathbf{N}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{y})$ и $\mathbf{N}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{y}) - \mathbf{n}^{(1\alpha\beta)}(y_3)$. Подставляя (16) в (9), (10), получаем макроскопические уравнения деформирования (растяжения в плоскости и изгиба) пластины. Заметим, что для получения невырожденных уравнений (не обращающихся в нуль при $\varepsilon \rightarrow 0$) уравнение (9) следует разделить на ε , а (10) —

на ε^3 . Величины ε и ε^3 задают порядок жесткостей пластины характерной толщины ε на растяжение в плоскости и на изгиб соответственно [11]. Нетривиальные слагаемые в (9), (10) представляют собой интегралы вида

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{\gamma\delta kl} N_{k,ly}^{0\alpha\beta}(\mathbf{y}) \delta u_{\gamma,\delta x}(\mathbf{X}) d\mathbf{x}; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij\alpha\beta} (N_k^{1\alpha\beta}(\mathbf{y}) - n_k^{1\alpha\beta}(y_3)) y_3 \delta w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) d\mathbf{x}, \quad (23)$$

которые стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что подынтегральные выражения в (22), (23) являются функциями вида $F(\mathbf{y})y_3^\nu$ ($\nu = 0, 1$), причем функция $F(\mathbf{y})y_3^\nu$ интегрируема в \mathbb{R}^3 . Выполнив замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$, получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} F\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)^\nu d\mathbf{x} = \varepsilon^{3+\nu} \int_{\Omega_\varepsilon} F(\mathbf{y})y_3^\nu d\mathbf{y} \leq \varepsilon^{3+\nu} c,$$

где постоянная c одинакова для всех индексов $\nu\alpha\beta$. Для интеграла (22) $\nu = 0$, и предел (22) равен нулю. Для интеграла (23) $\nu = 1$, и предел (23) также равен нулю. Тогда, подставляя в (9), (10) функции $\mathbf{N}^{(\nu\alpha\beta)}$ и

$$\mathbf{W}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \sum_{\alpha=1, \beta=1}^2 \left[\varepsilon \mathbf{n}^{(0\alpha\beta)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X}) - \varepsilon \mathbf{n}^{(1\alpha\beta)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) \right] \quad (24)$$

($\mathbf{n}^{(\nu\alpha\beta)}$ — решение (20), (21)), получаем в пределе (при $\varepsilon \rightarrow 0$) один и тот же результат.

Известно, что из формул (9), (10) с функцией $\mathbf{W}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, заданной выражением (24), следуют уравнения классической теории плоских однородных пластин [11] и уравнения асимптотической теории пластин [12, 13]. Несмотря на то что в классической теории пластин отсутствует аналог функции $\mathbf{V}(y_3)$ (вследствие этого возникает противоречие между гипотезой недеформируемых нормалей и условием равенства нулю нормальных напряжений на свободной поверхности пластины), предельные уравнения асимптотической теории (в частности, формулы для расчета жесткостей пластины) для однородных пластин совпадают с уравнениями асимптотической теории пластин (см., например, [14]).

Обозначим через $\sigma_{ij}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon) = a_{ijkl} n_{k,ly}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ локальные напряжения, соответствующие глобальным “деформациям” $u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X}) = \delta_{\alpha\beta}$ в плоскости пластины, а через $\sigma_{ij}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon) = a_{ijkl} n_{k,ly}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ локальные напряжения, соответствующие глобальным изгибным “деформациям” $w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) = \delta_{\alpha\beta}$. В случае однородной пластины эти напряжения определяются из локальных задач (17)–(19). Выше отмечено, что локальные задачи (20), (21) могут быть решены в явном виде [14], а локальные задачи (17)–(19) — численно. В силу (4), (16) локальные напряжения в пластине равны

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1, \beta=1}^2 \left[\sigma_{ij}^{(0\alpha\beta)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X}) + \sigma_{ij}^{(1\alpha\beta)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X}) \right]. \quad (25)$$

Формулы (16), (25) позволяют представить перемещения и локальные напряжения в пластине в виде линейной комбинации функций “быстрых” и “медленных” переменных, причем указанные функции определяются из разных задач — трехмерных локальных задач и двумерной задачи теории пластин. Величины $u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X})$ ($\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2$) образуют базис двумерных деформаций в плоскости пластины, а $w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X})$ ($\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2$) —

базис кривизн (кручения) пластины. Соответственно функции $\mathbf{N}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\mathbf{N}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\sigma_{ij}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ($\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$) образуют базис локальных перемещений и напряжений. На основе формул (16), (25) осуществляется полная декомпозиция исходной задачи. Следовательно, надо решить локальные задачи и определить базисные функции $\mathbf{N}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\mathbf{N}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\sigma_{ij}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\sigma_{ij}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ($\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$). Решая задачу теории пластин, надо найти функции $u_{\alpha,\beta x}(\mathbf{X})$, $w_{,\alpha x\beta x}(\mathbf{X})$, после чего можно вычислить локальные напряжения по формуле (25). Заметим, что функции $\mathbf{N}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\mathbf{N}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\sigma_{ij}^{(0\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\sigma_{ij}^{(1\alpha\beta)}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ($\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$) определяются только геометрией возмущения и не зависят от усилий, приложенных к пластине, т. е. являются свойствами данного возмущения формы пластины. Функции $u_\alpha(\mathbf{X})$ ($\alpha = 1, 2$) и $w(\mathbf{X})$ находятся из решения задачи теории пластин, т. е. определяются усилиями и краевыми условиями. Поскольку в силу (22), (23) предельная задача теории пластин не зависит от единичного возмущения формы, функции $u_\alpha(\mathbf{X})$ ($\alpha = 1, 2$) и $w(\mathbf{X})$ также не зависят от единичного возмущения формы пластины. Иными словами, указанные задачи не связаны между собой, т. е. полученная декомпозиция является полной.

2. Решение типовых задач. Ниже приведены примеры решения задач с использованием предложенного метода. Особенностью метода является нахождение решений локальных задач. Как правило, эти решения могут быть получены только численно.

2.1. *Отверстие в пластине.* Сначала изложим метод локального возмущения для одного типа возмущений (комбинация линейного и точечного возмущений формы рассматривается ниже). Более простым является точечное возмущение (отверстие, дефект и т. п.). В качестве примера рассмотрим однородную пластину толщиной ε с круговым отверстием радиусом ε .

Найдем решение задачи для функции $\mathbf{N}^{(122)}(\mathbf{y})$ (этот случай соответствует цилиндрическому изгибу пластины в плоскости y_2y_3 , где $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$). Задача решалась численно с использованием конечно-элементной программы. На рис. 2 показана деформированная форма 1/4 пластины (так как в данном случае задача обладает симметриями, можно ограничиться рассмотрением 1/4 пластины). На рис. 3 представлены распределения локальных напряжений $\sigma_{11}^{(122)}$, $\sigma_{22}^{(122)}$ и $\sigma_{12}^{(122)}$, соответствующие функции $\mathbf{N}^{(122)}(\mathbf{y})$.

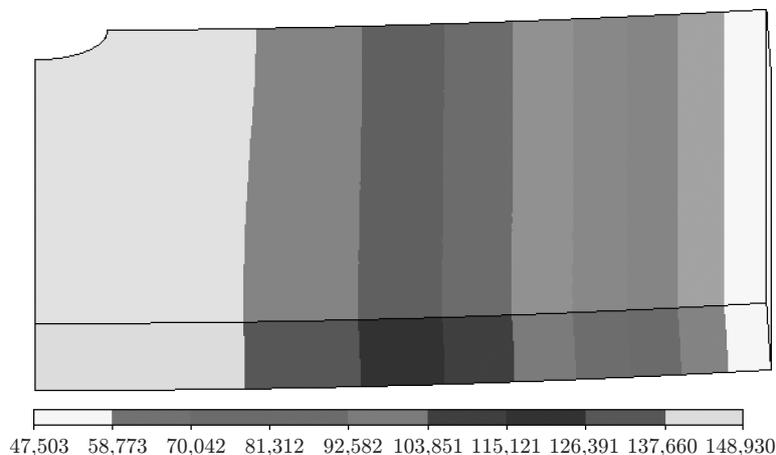


Рис. 2. Распределение перемещений $N_3^{(122)}(\mathbf{y})$ (соответствующих нормальному прогибу) в пластине с круговым отверстием, подвергнутой изгибу в плоскости x_2x_3

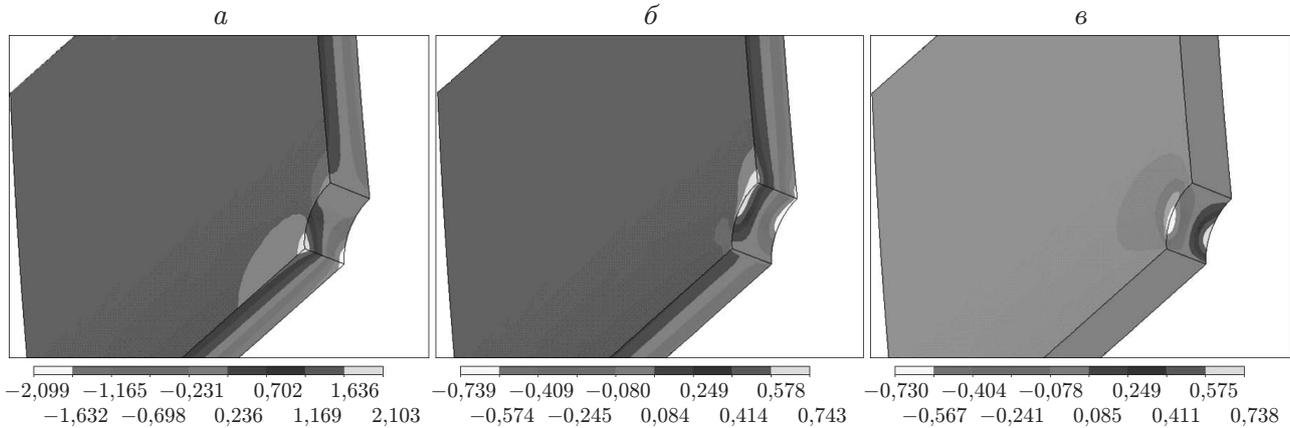


Рис. 3. Распределения напряжений $\sigma_{11}^{(122)}$ (а), $\sigma_{22}^{(122)}$ (б), $\sigma_{12}^{(122)}$ (в) в пластине с круговым отверстием, подвергнутой изгибу в плоскости y_2y_3

Согласно изложенной выше теории должны выполняться следующие условия:

1) перемещения не должны зависеть от наличия отверстия (с точностью до членов порядка $\varepsilon \ll 1$);

2) $\mathbf{N}^{(122)}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{n}^{(122)}(y_3)$, где $\mathbf{n}^{(122)}(y_3)$ — решение задачи (20), (21) о цилиндрическом изгибе однородной пластины в плоскости y_2y_3 . Иными словами, в основной части пластины (вдали от отверстия) распределение напряжений должно быть таким же, как в однородной пластине. Возмущение напряжений относительно напряжений в однородной пластине должно быть локализовано вблизи отверстия в области, размеры которой имеют порядок толщины пластины.

Результаты численных расчетов подтверждают теоретические предположения (см. рис. 2, 3).

Вследствие сильной локализации возмущения решения формула (25) для напряжений вблизи отверстия может быть записана в приближенном виде (координаты центра отверстия $(0, 0)$)

$$\sigma_{ij} \approx \sum_{\alpha=1, \beta=1}^2 \left[\sigma_{ij}^{(0\alpha\beta)} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) u_{\alpha, \beta x}(0) + \sigma_{ij}^{(1\alpha\beta)} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) w_{\alpha, \beta x}(0) \right].$$

2.2. Возмущение геометрии, имеющее несколько различных масштабов. Отверстие в ребре пластины. В случае линейных возмущений, размер которых не мал в одном из направлений (например, одиночное ребро в пластине), а также в случае комбинации точечных и линейных возмущений (например, ребро с отверстием (см. рис. 1)) анализ задач проводится по схеме, описанной выше, но перемещения ищутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - \varepsilon w_{,\alpha x}(\mathbf{X})x_3\mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{V}(x_3/\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}/\varepsilon) = \\ &= u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - w_{,\alpha x}(\mathbf{X})y_3\mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{V}(y_3) + \varepsilon \mathbf{v}_d(\mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{v}_l(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

где функция $\mathbf{v}_l(\mathbf{y})$ локализована в окрестности линейного возмущения формы (ребра), а функция $\mathbf{v}_d(\mathbf{y})$ — в окрестности точечного возмущения формы (отверстия).

В рассматриваемой задаче имеется две области возмущения формы, соответствующие ребру и отверстию. При удалении от отверстия вдоль ребра локальные напряжения становятся приближенно равными локальным напряжениям, распределенным в пластине с одним ребром, а при удалении от ребра — приближенно равными локальным напряжениям, возникающим при изгибе однородной пластины.

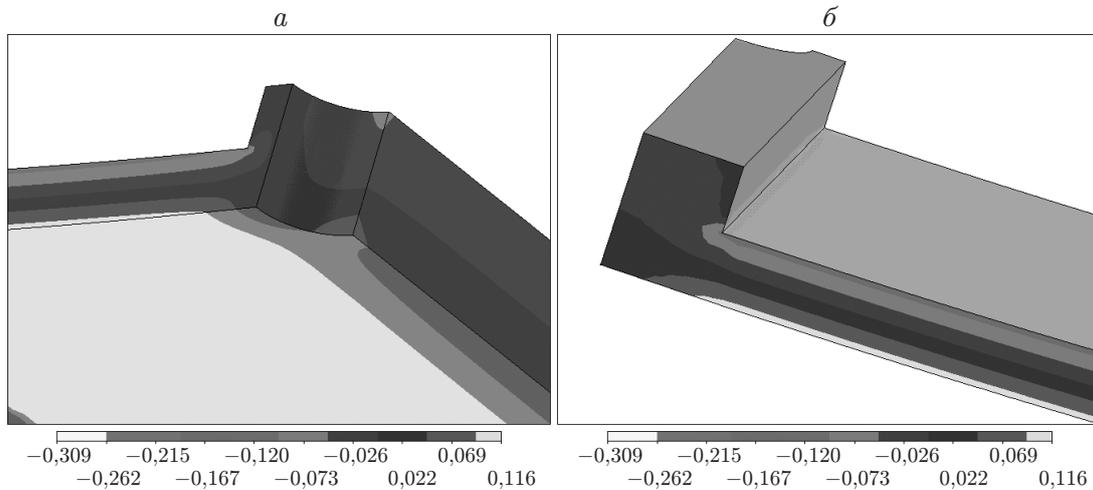


Рис. 4. Распределение напряжений $\sigma_{22}^{(122)}$ в пластине с ребром и круговым отверстием в нем, подвергнутой изгибу в плоскости y_2y_3 :
 а — напряжения вблизи отверстия; б — напряжения вдали от отверстия

Результаты численных расчетов представлены на рис. 4 (показана 1/4 пластины). Видно, что возмущения напряжений обоих типов сильно локализованы в смысле [15] в окрестности возмущений формы пластины. Следует отметить, что возмущение напряжений, подобное показанному на рис. 4,б, возникает при соединении двух пластин различной толщины. Данное локальное возмущение не учитывается в рамках подходов, основанных на двумерных моделях пластин [1].

2.3. *Ребро периодической структуры.* Одномерное линейное возмущение (ребро, соединительный шов) может иметь форму с периодом εT (рис. 5). Периодическая структура линейного возмущения обуславливает периодический характер напряженно-деформированного состояния всей конструкции. Размер ячейки периодичности конструкции εP (см. рис. 5) в направлении линейного возмущения равен εT и бесконечен в пер-

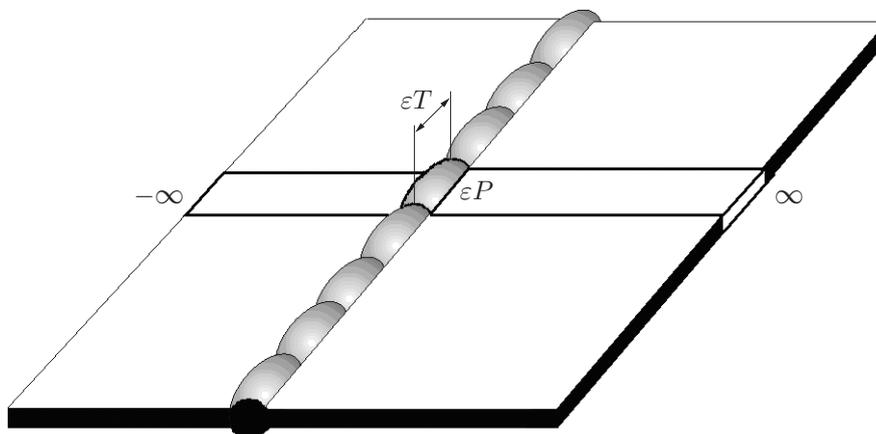


Рис. 5. Линейное возмущение (ребро) периодической структуры и соответствующая ему ячейка периодичности конструкции

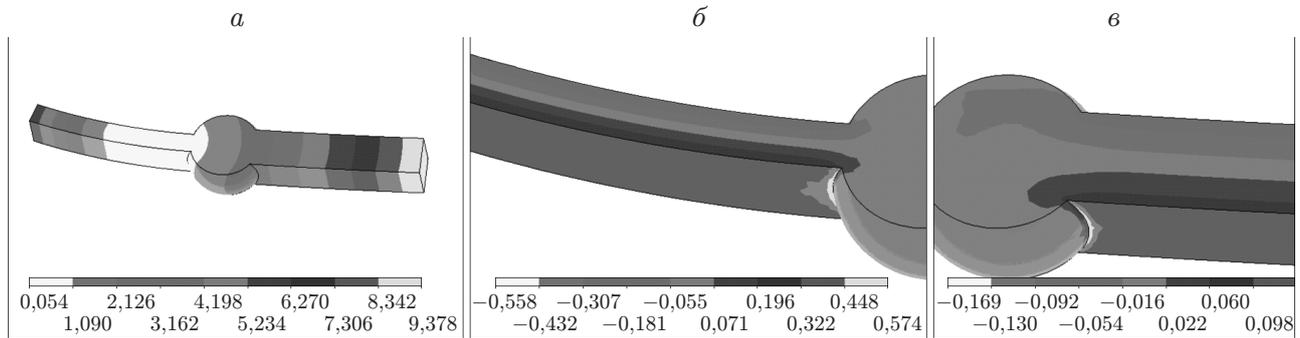


Рис. 6. Результаты решения задачи (26)–(28) для ячейки периодичности:
 а — модуль функции $N^{122}(\mathbf{y})$; б, в — напряжения $\sigma_{22}^{(122)}$ (б — в левой пластине, в — в правой пластине)

пендикулярном направлении. В этом случае используется следующее представление для перемещений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - \varepsilon w_{,\alpha x}(\mathbf{X})x_3\mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{V}(x_3/\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}/\varepsilon) = \\ &= u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - w_{,\alpha x}(\mathbf{X})y_3\mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{V}(y_3) + \varepsilon \mathbf{v}_l(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

(функция $\mathbf{v}_l(\mathbf{y})$ локализована в направлении, перпендикулярном направлению возмущения и периодична в направлении возмущения). Условие (19) стабилизации решения на бесконечности должно выполняться в направлении, перпендикулярном ребру, а в направлении вдоль ребра должны быть поставлены условия периодичности. Таким образом, возникает задача на ячейке периодичности P ($\nu = 0, 1$):

— в ячейке P

$$[a_{ijkl}N_{k,ly}^{\nu\alpha\beta}(\mathbf{y}) - a_{ij\alpha\beta}y_3^\nu]_{,jy} = 0; \quad (26)$$

— на свободной поверхности

$$[a_{ijkl}N_{k,ly}^{\nu\alpha\beta}(\mathbf{y}) - a_{ij\alpha\beta}y_3^\nu]n_j = 0; \quad (27)$$

— при $|y_2| \rightarrow \infty$

$$\mathbf{N}^{(\nu\alpha\beta)}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{n}^{(\nu\alpha\beta)}(y_3); \quad (28)$$

— функция $\mathbf{N}^{(\nu\alpha\beta)}(\mathbf{y})$ периодична по y_1 с периодом T .

Задача (26)–(28) имеет свойства как локальной задачи (стабилизация решения по переменной y_2), так и ячейечной задачи (периодичность по переменной y_1). На рис. 6 приведены результаты численного решения задачи (26)–(28) для двух пластин разной толщины с соединением периодической структуры.

2.4. *Соединенные пластины периодического строения.* Метод локального возмущения, основанный на идее многомасштабного разложения, хорошо сочетается с методом усреднения [2–4], основанным на той же идее. В качестве примера рассмотрим задачу о двух упругих пластинах периодического строения, соединенных ребром. В левой пластине имеется квадратная ячейка периодичности P_3 размером 3×3 с отверстием, диаметр которого равен двум (рис. 7), в правой пластине — квадратная ячейка периодичности P_7 размером 7×7 с отверстием, диаметр которого равен шести. Пластины соединены ребром. Периодическое строение пластин обуславливает периодическое строение конструкции в целом. Размер ячейки периодичности P конструкции в направлении ребра равен 21 и бесконечен в перпендикулярном ребру направлении.

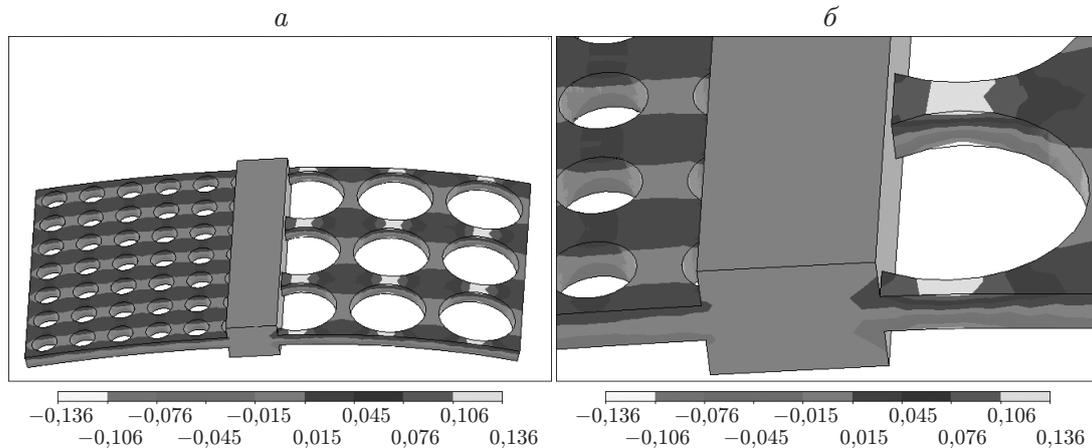


Рис. 7. Напряжения $\sigma_{22}^{(122)}$ в “основных” частях пластин (а) и в области соединительного ребра (б) при изгибе пластины в плоскости y_2y_3

Используется следующее представление для перемещений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - \varepsilon w_{,\alpha x}(\mathbf{X})x_3\mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{V}(x_3/\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}/\varepsilon) = \\ &= u_\alpha(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + w(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - w_{,\alpha x}(\mathbf{X})y_3\mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{V}_p(\mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{v}_l(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

(функция $\mathbf{v}_l(\mathbf{y})$ локализована в направлении, перпендикулярном направлению ребра (локальный корректор); функция $\mathbf{V}_p(\mathbf{y})$ периодична по переменным y_1, y_2 (ось y_3 направлена перпендикулярно плоскости пластины) с ячейкой периодичности P_3 в левой пластине и ячейкой периодичности P_7 в правой пластине, т. е. является периодическим корректором в теории усреднения для пластин [12, 13]).

На рис. 7 представлены результаты численного расчета напряжений в пластине. Вдали от ребра наблюдается периодическое распределение напряжений, соответствующее результатам численных расчетов с использованием метода усреднения. Вблизи ребра имеет место локальное возмущение напряжений, сосредоточенное в области, размер которой равен нескольким толщинам пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Космодамианский А. С.** Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев: Вища шк., 1975.
2. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
3. **Жиков В. В.** Усреднение дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. М.: Физматлит, 1993.
4. **Bensoussan A.** Analysis for periodic structures / A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou. Amsterdam: North-Holland Publ., 1978.
5. **Panasenko G. P.** Multi-scale modeling for structures and composites. Berlin etc.: Springer, 2005.
6. **Ciarlet G. P.** Plates and junctions in elastic multi-structures: an asymptotic analysis. Heidelberg etc.: Springer, 1990.
7. **Le Dret H.** Problèmes variationnels dans les multi-domaines. Modélisation des jonctions et applications. P.: Masson, 1991.
8. **Мазья В. Г.** Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области / В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981.

9. **Мотыгин О. В., Назаров С. А.** Пригодная для компьютерной реализации процедура построения пограничных слоев в теории пластин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. № 2. С. 274–285.
10. **Gaudiello A., Kolpakov A. G.** Influence of non degenerated joint on the global and local behavior of joined rods // Intern. J. Engng Sci. 2011. V. 49. P. 295–309.
11. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
12. **Аннин Б. Д.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламкар, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1993.
13. **Caillerie D.** Thin elastic and periodic plates // Math. Methods Appl. Sci. 1984. N 6. P. 159–191.
14. **Kolpakov A. G.** Stressed composite structures: homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. Berlin etc.: Springer, 2004.
15. **Kolpakov A. A.** Capacity and transport in contrast composite structures: asymptotic analysis and applications / A. A. Kolpakov, A. G. Kolpakov. Boca Raton etc.: CRC Press, 2010.

Поступила в редакцию 12/X 2011 г.
