

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИН И ДВОЙНИКОВ ВДОЛЬ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Э. П. Фельдман (Харьков)

Рассмотрим полубесконечную трещину в анизотропной полосе толщиной $2h$. Предположим, что плоскость трещины параллельна границам полосы, и трещина удерживается в раскрытом состоянии некоторыми внешними напряжениями. Расположение трещины относительно границ полосы изображено на фиг. 1 (рассматриваем плоскую задачу). Будем изучать процесс распространения трещины при возрастании внешней нагрузки.

Как известно [1], тонкую равновесную трещину можно описать формальным образом как совокупность находящихся в равновесии дислокаций, распределенных по берегам трещины. Векторы Бюргера этих дислокаций перпендикулярны плоскости трещины. Такой подход эквивалентен методу, развитому Г. И. Баренблаттом [2].

Введя плотность дислокаций $\rho(x)$, можно следующим образом записать интегральное уравнение равновесия трещины в данном случае:

$$\int_0^{\infty} \sigma_{yy}^{\delta}(x' - x, y_0) \rho(x') dx' = \frac{1}{b} [S(x) + \sigma_{yy}^e(x)] \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{yy}^{\delta}(x' - x, y_0)$ — напряжения, создаваемые в точке (x, y_0) дислокацией, находящейся в точке (x', y_0) . Поскольку полоса предполагается бесконечной в направлении оси x , эти напряжения, естественно, зависят лишь от разности $x' - x$. Остальные обозначения таковы: $\sigma_{yy}^e(x)$ — внешние напряжения, которые были бы в точке (x, y_0) при отсутствии трещины; b — вектор Бюргера дислокации; $S(x)$ — сила межмолекулярного притяжения.

Так как $\sigma_{yy}^{\delta}(x' - x, y_0) \approx \text{const} / (x' - x)$ при $(x' - x) \rightarrow 0$, то интегральное уравнение (1) относительно плотности дислокаций $\rho(x)$ будет сингулярным, и интеграл понимается в смысле главного значения.

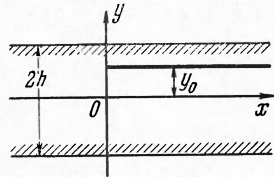
Решив уравнение (1), можно определить форму трещины согласно соотношению

$$h(x) = b \int_0^x \rho(x') dx' \quad (2)$$

где $h(x)$ — высота раскрытия трещины в данной точке. Рассматриваем решения уравнения (1), ограниченные в нуле, поскольку в противном случае, согласно (2), не будет обеспечено условие плавного смыкания берегов трещины в ее устье [2].

Необходимым и достаточным условием существования такого решения будет, как известно [3], выполнение соотношения

$$\int_0^{\infty} \omega(x) [S(x) + \sigma_{yy}^e(x)] dx = 0 \quad (3)$$



Фиг. 1

где функция $\omega(x)$ — решение сопряженного однородного уравнения, соответствующего (1)

$$\int_0^{\infty} \omega(x') \sigma_{yy}^{\delta}(x - x', y_0) dx' = 0 \quad (4)$$

Соотношение (3) эквивалентно условию обращения в нуль коэффициента концентрации нормальных напряжений, возникающих вблизи конца трещины [2]. Кроме того, наличие трещины вызывает концентрацию касательных напряжений типа T / \sqrt{r} , где r — расстояние от конца трещины, а коэффициент T при указанном на фиг. 1 несимметричном расположении трещины отличен от нуля. Эти напряжения могут вызвать тангенциальный сдвиг материала на продолжении плоскости трещины, т. е., иными словами, могут породить трещину поперечного сдвига. Однако в дальнейшем предполагается, что имеются, помимо «нормальных», «тангенциальные» силы межмолекулярного сцепления, величина которых достаточна для того, чтобы воспрепятствовать возникновению трещины поперечного сдвига.

Отметим, что $\sigma_{yy}^{\delta}(t, y_0) = -\sigma_{yy}^{\delta}(-t, y_0)$, поэтому однородное уравнение (4) будет самосопряженным, и $\omega(x)$ может быть физически интерпретирована как плотность дислокаций, образующих трещину при отсутствии внешней нагрузки.

Равенство (3) при известной функции $\omega(x)$ позволяет проанализировать распространение трещины при изменении внешней нагрузки. Основная трудность заключается, таким образом, в нахождении решения уравнения (4).

Хотя в общем анизотропном случае не удается эффективно построить это решение, однако, как оказывается, можно выяснить все существенные особенности функции $\omega(x)$, необходимые для анализа процесса распространения трещины.

Из формул, определяющих ядро $\sigma_{yy}^{\partial}(t, y_0)$, приведенных в работе [4], видно, что все величины размерности длины входят в него в виде отношения к толщине полосы $2h$, и что это ядро содержит отношение y_0/h в качестве параметра. Поэтому, введя обозначение $\xi = \pi x/2h$, можно утверждать, что решение уравнения (4) записывается в виде $\omega(x) \equiv \rho_0(\xi, y_0/h)$.

Далее, поскольку $\sigma_{yy}^{\partial}(t, y_0)$ при $t \rightarrow 0$ ведет себя как const/t , то, как следует из теории сингулярных интегральных уравнений, $\rho_0(\xi) \approx A/\sqrt{\xi}$ при $\xi \rightarrow 0$, где A — некоторая константа, не равная нулю.

Для изучения поведения функции $\rho_0(\xi)$ при больших ξ будем решать уравнение (4) методом Винера — Хопфа. Этот метод применим в данном случае, так как ядро — разностное и экспоненциально убывает на бесконечности [4]. Как показано Винером и Пэли [5], асимптотика $\rho_0(\xi)$ на бесконечности такова:

$$\rho_0(\xi) \approx \sum Q(\xi) e^{ik^*\xi} \quad (5)$$

где сумма берется по нулям k^* фурье-преобразования ядра, лежащим в полосе аналитичности этого преобразования, а $Q(\xi)$ — полиномы степени $n-1$, где n — кратность соответствующего нуля.

Обозначим через $\sigma(k)$ фурье-преобразование функции $\sigma_{yy}^{\partial}(t, y_0)$ по t . Функция $\sigma(k)$ довольно просто может быть получена из формул, содержащихся в [4]. Приведем выражение для $\sigma(k)$ лишь для случая, когда среда обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, совпадающими на фиг. 1 с координатными плоскостями (ромбический кристалл, или, в других терминах, ортотропная среда). В этом случае, как оказывается,

$$\sigma(k) = -\frac{2id}{\sqrt{2\pi}(s_1 - s_2)} \frac{\delta(k)}{\Delta(k)} \quad (6)$$

$$\delta(k) = \begin{vmatrix} f_{11} & e^{ks_1h} - e^{ks_2h} & \text{sh } ks_1(h - y_0) & \text{sh } ks_2(h - y_0) \\ 0 & e^{-ks_1h} - e^{-ks_2h} & -\text{sh } ks_1(h + y_0) & -\text{sh } ks_2(h + y_0) \\ f_{31} & s_1 e^{ks_1h} - s_2 e^{ks_2h} & s_1 \text{ch } ks_1(h - y_0) & s_2 \text{ch } ks_2(h - y_0) \\ 0 & s_1 e^{-ks_1h} - s_2 e^{-ks_2h} & s_1 \text{ch } ks_1(h + y_0) & s_2 \text{ch } ks_2(h + y_0) \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\Delta(k) = 4(s_1 - s_2)^2(s_1 + s_2)^2 \left[\frac{\text{sh}^2 k(s_1 + s_2)h}{(s_1 + s_2)^2} - \frac{\text{sh}^2 k(s_1 - s_2)h}{(s_1 - s_2)^2} \right] \quad (8)$$

$$f_{11} = s_2 \text{sh } ks_1(h - y_0) - s_1 \text{sh } ks_2(h - y_0), \quad f_{31} = s_1 s_2 [\text{ch } ks_1(h - y_0) - \text{ch } ks_2(h - y_0)]$$

Здесь s_1, s_2 и d — величины, известным образом связанные с упругими константами среды, причем d зависит также и от вектора Бюргера [6,7].

Элементарные выкладки с использованием выражений (6), (7) и (8) показывают, что содержащаяся внутри полосы аналитичности функции $\sigma(k)$ точка $k=0$ — трехкратный нуль этой функции.

Поэтому на основании (5) можно сделать вывод, что $\rho_0(\xi)$ возрастает на бесконечности не медленнее, чем ξ^2 . Такая асимптотика $\rho_0(\xi)$ на бесконечности может быть получена также из следующих простых физических соображений. Рассмотрим отрываемую часть полосы как балку, закрепленную в устье трещины, и обозначим через $h(x)$ прогиб этой балки. Как известно (см., например [1]), этот прогиб удовлетворяет уравнению $h''''(x) = 0$, если отсутствуют внешние силы. Общим решением этого уравнения будет полином третьей степени, причем коэффициент при старшей степени x в этом полиноме, вообще говоря (т. е. при произвольных граничных условиях), отличен от нуля. Поэтому на бесконечности $h(x) \approx x^3$, следовательно, согласно (2), $\rho_0(x) \approx x^2$.

Приведенные соображения наводят на мысль, что и в общем анизотропном случае $\rho_0(\xi) \approx \xi^2$ на бесконечности, однако, чтобы доказать это строго, пришлось бы проделывать чрезвычайно громоздкие преобразования.

Далее, физические соображения показывают, что $\rho_0(\xi)$ должна быть знакопостоянной (для определенности — знакоположительной). Это следует из того, что $\rho_0(\xi)$ описывает распределение дислокаций при отсутствии внешних сил. Если бы функция $\rho_0(\xi)$ меняла знак в некоторой точке, то это означало бы, что вблизи этой точки находятся в равновесии дислокации разного знака, что невозможно, поскольку дислокации разного знака притягивались бы друг к другу и взаимно уничтожались.

Покажем, наконец, единственность решения уравнения (4). Любое решение уравнения (4), как известно из теории метода Винера — Хопфа, имеет вид

$$\rho_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} P_n(u) \Phi_-(u) e^{u\xi} du$$

где $\Phi_-(u)$ — определенная функция, а $P_n(u)$ — некоторый полином,

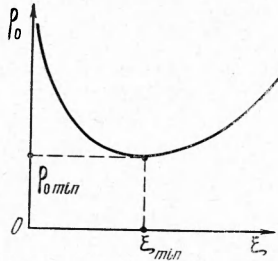
$$P_n(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_0$$

Если ввести обозначение

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Phi_-(u) e^{u\xi} du$$

то $\rho_0(\xi)$ можно записать в виде

$$\rho_0(\xi) = a_n f^{(n)}(\xi) + a_{n-1} f^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_0 f(\xi) \quad (9)$$



Фиг. 2

С другой стороны, как указано выше, $\rho_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ должна иметь особенность вида $\text{const} / \sqrt{\xi}$. Очевидно, что эту особенность должен давать член со старшей производной в (9), так как в противном случае функция $\rho_0(\xi)$ имела бы более сильную особенность в нуле. Если бы существовали два или более линейно независимых решения вида (9), то, составляя подходящим способом их линейную комбинацию, можно было бы обратить в нуль коэффициент при старшей производной функции $f(\xi)$, и полученная при этом функция не обладала бы требуемой особенностью в нуле. Полученное противоречие доказывает единственность решения уравнения (4).

Вышеизложенное позволяет утверждать, что график функции $\rho_0(\xi)$ имеет примерно следующий вид (фиг. 2). Этот график на фиг. 2 имеет один минимум, хотя и не исключена возможность, что $\rho_0(\xi)$ может иметь больше одного минимума.

Приведенные рассуждения общего характера можно наглядно проиллюстрировать на примере одного частного случая, когда можно получить интегральное представление для функции $\rho_0(\xi)$. А именно, рассмотрим случай $(s_1 + s_2) / (s_1 - s_2) = 2$, $y_0 = 0$, и обозначим $s_1 - s_2 = s$, $ik = u$. В этом случае, как оказывается, с точностью до несущественного постоянного множителя

$$\sigma(u) = \text{tg}^3 1/2 hsu \quad (10)$$

Выражение (10) получается из (6), (7) и (8) с учетом приведенных выше условий.

Выражение для $\sigma(u)$ можно факторизовать, как это требуется в методе Винера — Хопфа, и получить интегральное представление для $\rho_0(\xi)$. Факторизуя (10) при помощи Γ -функций и применяя далее теорему о свертке, найдем

$$\rho_0(\xi) = A f'(\xi) + B f(\xi) \quad (11)$$

где

$$f(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left[\iiint_D \frac{d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{[(1 - e^{-\tau_1})(1 - e^{-\tau_2})(1 - e^{-\tau_3})]^{1/2}} \right] \quad (12)$$

В соотношении (11) величины A и B — некоторые постоянные, причем $A > 0$, $B \geq 0$. Областью интегрирования D в (12) является симплекс, определяемый неравенствами

$$\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \tau_3 \geq 0, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \leq \xi$$

Используя выражения (11) и (12), легко усмотреть, что $\rho_0(\xi) \sim 1 / \sqrt{\xi}$ при $\xi \rightarrow 0$ и $\rho_0(\xi) \sim \xi^2$ при $\xi \rightarrow \infty$, т. е. поведение этой функции в нуле и на бесконечности именно такое, как следует из общих соображений.

Зная (хотя бы в общих чертах) вид функции $\rho_0(\xi)$ (фиг. 2), можно дать качественное описание явления распространения трещины вдоль полосы при изменении внешней нагрузки. Для этого рассмотрим важный конкретный пример, когда $\sigma_{yy}^e(x) = P\delta(x-l)$, т. е. когда трещина поддерживается в раскрытом состоянии сосредоточенными силами P , приложенными на расстоянии l от ее устья.

Рассмотрим зависимость «длины» трещины l от параметра P внешней нагрузки. Эта зависимость дается в неявном виде соотношением (3), которое в данном случае

приобретает вид

$$\int_0^{\infty} S(x) \rho_0 \left(\frac{\pi x}{2h} \right) dx = P \rho_0 \left(\frac{\pi l}{2h} \right) \quad (13)$$

Напомним, что ρ_0 зависит также и от y_0/h как от параметра. Имея в виду, что $S(x)$ отлична от нуля [2] лишь при малых x , а также поведение $\rho_0(\xi)$ при малых ξ и определение [2] модуля сцепления M , соотношение (13) можно записать в виде

$$A(y_0/h) M \sqrt{h} = P \rho_0(\pi l/2h, y_0/h) \quad (14)$$

Уравнение (14) дает искомую зависимость между P и l . Его следует решать графически (фиг. 3). На этой фигуре кривая соответствует правой части (14), а прямая — левой части. Из фиг. 3 видно, что каждой нагрузке соответствуют две длины: l_1 и l_2 , первая из которых соответствует устойчивой трещине, а вторая — неустойчивой [2].

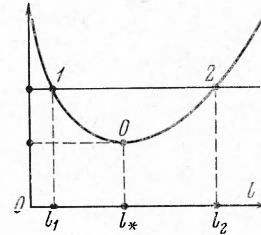
Предположим, что рассматривается следующий эксперимент: сначала в полосе создается разрез, а затем к берегам этого разреза на расстоянии l от его устья прикладывается сосредоточенная нагрузка, бесконечно медленно возрастающая от нуля. Тогда процесс будет происходить следующим образом: если $l < l_*$ (на фиг. 3 имеем $l = l_1$), то сначала трещина не будет распространяться, пока нагрузка не достигнет величины, соответствующей длине l_1 (точка 1). При дальнейшем возрастании нагрузки длина трещины будет возрастать до значения l_* , при котором произойдет разрушение. Если же $l > l_*$ (на фиг. 3 имеем $l = l_2$), то при возрастании нагрузки длина трещины возрастать не будет, а при достижении нагрузки значения, соответствующего длине l_2 , произойдет разрушение.

Критическая длина l_* определяется из условия

$$\rho_0'(\pi l_*/2h) = 0 \quad (15)$$

т. е. $l_* = C(y_0/h) h$. Как и следовало ожидать, критическая длина при данном y_0/h пропорциональна толщине полосы. Что касается разрушающей нагрузки P_* , то она определяется из соотношения, следующего из (14)

$$P_* = \frac{A(y_0/h)}{\rho_0(\pi l_*/2h, y_0/h)} M \sqrt{h} \quad (16)$$



Фиг. 3

Такая зависимость разрушающей нагрузки от размеров полосы была указана в [2] из соображений размерности.

Отметим, что абсцисса и ордината точки 0 на фиг. 3 соответствуют критической длине и критической нагрузке.

Если нагрузка не сосредоточенная, а приложена на некоторой конечной длине, малой, по сравнению с $h - y_0$, то качественные особенности процесса распространения трещины в полосе останутся теми же самыми.

Для выяснения вида зависимости разрушающей нагрузки от y_0/h рассмотрим равновесие совокупности винтовых дислокаций, схема расположения которых также изображена на фиг. 1. Подобная задача представляет и самостоятельный интерес, так как эту совокупность можно трактовать физически как двойник [8] специального вида или как трещину продольного сдвига [9].

Рассуждая так же, как и выше, можно составить уравнение равновесия винтовых дислокаций, которое в случае изотропной среды будет иметь вид

$$\int_0^{\infty} \rho(x') \left\{ 2 \operatorname{cth} \frac{\pi(x' - x)}{4h} - \operatorname{th} \frac{\pi}{4h} [(x' - x) + 2iy_0] - \operatorname{th} \frac{\pi}{4h} [(x' - x) - 2iy_0] \right\} dx' = \frac{2\pi}{\mu b} [S(x) + \sigma_{yz}^e(x)] \quad (17)$$

где μ — модуль сдвига.

Учет анизотропии в этом случае сводится к умножению y_0 и h на постоянную, зависящую от упругих модулей среды. Ядро уравнения (17) может быть получено из формул работы [4]. Соответствующее (17) однородное уравнение можно также решить методом Винера — Хофа, в результате чего получим

$$\rho_0(\xi) = \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\alpha^{-\alpha u} \beta^{-\beta u} \Gamma(\alpha u) \Gamma(\beta u)}{\Gamma(u)} e^{u\xi} du \quad (18)$$

$$\xi = \pi x/2h, \quad \gamma > 0, \quad \alpha = 1/2(1 - y_0/h), \quad \beta = 1/2(1 + y_0/h), \quad \alpha + \beta = 1$$

Выясним некоторые свойства функции $\rho_0(\xi)$.
Представление (18) позволяет изучить поведение $\rho_0(\xi)$ при больших и малых ξ .
Согласно известным теоремам (см., например, [10]),

$$\rho_0(\infty) = \lim_{u \rightarrow 0} uF(u), \quad \rho_0(0) = \lim_{u \rightarrow \infty} uF(u) \quad (19)$$

Здесь $F(u)$ — преобразование Лапласа функции $\rho_0(\xi)$. В рассматриваемом случае

$$F(u) = \alpha\beta \frac{\alpha^{-\alpha u} \beta^{-\beta u} \Gamma(\alpha u) \Gamma(\beta u)}{\Gamma(u)}$$

В (19) предполагается, что пределы, стоящие справа, существуют.
Применяя первую формулу (19), получим, что $\rho_0(\infty) = 1$.

Те же соображения, что и выше, показывают, что $\rho_0(\xi) \sim 1/\sqrt{\xi}$ при $\xi \rightarrow 0$, поэтому вторую формулу (19) непосредственно применять нельзя. Ее можно, однако, применить к разности между $\rho_0(\xi)$ и какой-либо функции, которая при $\xi \rightarrow 0$ ведет себя как $\text{const}/\sqrt{\xi}$. В качестве последней удобно выбрать функцию $A/\sqrt{1-e^{-2\xi}}$. Преобразование Лапласа этой функции имеет вид

$$F_1(u) = \frac{A \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 u)}{\Gamma(1/2 u + 1/2)}$$

Применяя вторую формулу (19) к разности

$$\rho_0(\xi) - A/\sqrt{1-e^{-2\xi}}$$

и требуя, чтобы эта разность обращалась в нуль при $\xi \rightarrow 0$, найдем постоянную A . Таким образом, A находится из условия

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u \left[\alpha\beta \frac{\alpha^{-\alpha u} \beta^{-\beta u} \Gamma(\alpha u) \Gamma(\beta u)}{\Gamma(u)} - \frac{A \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 u)}{\Gamma(1/2 u + 1/2)} \right] = 0$$

Раскрывая предел, найдем

$$A = 2 \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{4 - y_0^2/h^2} \quad (20)$$

При рассмотрении равновесия совокупности винтовых дислокаций оказывается возможным доказать знакоположительность и даже монотонность $\rho_0(\xi)$ чисто математически, не прибегая к физической интерпретации этой функции.

С этой целью заметим, что равенство (18) можно переписать так:

$$\rho_0(\xi) = \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} B(\alpha u, \beta u) e^{u[\xi - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta]} du$$

Здесь $B(p, q)$ — бета-функция Эйлера. Используя известное интегральное представление бета-функции, можно записать далее

$$\begin{aligned} \rho_0(\xi) &= \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^1 t^{\alpha u-1} (1-t)^{\beta u-1} dt e^{u[\xi - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta]} du = \\ &= \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_0^1 \frac{dt}{t(1-t)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp \left[u \left(\xi + \alpha \ln \frac{t}{\alpha} + \beta \ln \frac{1-t}{\beta} \right) \right] du = \\ &= \alpha\beta \int_0^1 \frac{dt}{t(1-t)} \delta \left(\xi + \alpha \ln \frac{t}{\alpha} + \beta \ln \frac{1-t}{\beta} \right) \end{aligned}$$

Используем теперь известное соотношение

$$\delta(\psi(t)) = \sum_k \frac{\delta(t-t_k)}{|\psi'(t_k)|}$$

Здесь t_k — корни уравнения $\psi(t) = 0$.
Легко показать, что уравнение

$$\xi + \alpha \ln \frac{t}{\alpha} + \beta \ln \frac{1-t}{\beta} = 0$$

