

РАСТВОРЕНИЕ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОГО ПУЗЫРЯ В ЖИДКОСТИ
МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А. М. Головин

(Москва)

Рассматривается скорость стационарного движения, степень деформации и лимитируемая конвективной диффузией скорость квазистационарного роста (растворения) газового пузыря, форма которого близка к сферической или к дискообразной. Предполагается отсутствие поверхностно-активных веществ в жидкости. Отмечается качественное согласие рассчитанной скорости растворения с экспериментальными данными.

Основные обозначения

a — радиус сферы эквивалентного объема,	D — коэффициент диффузии газа в жидкости,
u — скорость движения пузыря относительно покоящейся на бесконечности жидкости,	σ — поверхностное натяжение,
ν — кинематическая вязкость жидкости,	g — ускорение силы тяжести,
ρ — плотность жидкости,	R — число Рейнольдса,
	P — число Пекле,
	W — число Вебера.
	$R = \frac{2au}{\nu}$, $P = \frac{2au}{D}$, $W = \frac{2a\rho u^2}{\sigma}$

1. Форма и скорость стационарного движения газового пузыря. Скорость квазистационарного растворения газового пузыря в жидкости рассчитана В. Г. Левичем [1] при одновременном выполнении следующих условий: а) пузырь обладает сферической формой и б) поле скоростей обтекающего потока совпадает с полем скоростей идеальной жидкости. Однако эти два условия могут оказаться несовместимыми, поскольку выполнение второго условия предполагает, что $R^{1/2} \gg 1$, но тогда может возникнуть необходимость учитывать деформацию пузыря.

Вопрос о форме пузыря обсуждается в работах Мура [2, 3], где показано, что для определения формы поверхности достаточно ограничиться расчетом давления p в потоке идеальной жидкости, обтекающей пузырь. Учет вязкости жидкости приводит к поправкам порядка $1/R$ в распределении давления вблизи поверхности пузыря. Поэтому при заданной скорости натекающего потока и достаточно больших числах Рейнольдса с точностью до членов порядка $1/R$ форма поверхности определяется уравнением

$$p + \sigma(R_1^{-1} + R_2^{-1}) = p' \tag{1.1}$$

Здесь R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности; p' — давление газа в пузыре.

Степень деформации пузыря зависит от числа Вебера W . При $W < 2$ форма пузыря близка к сферической. Если $W > 2$, то можно считать, что пузырь обладает формой сплюснутого эллипсоида вращения. Пусть χ — отношение большой полуоси, перпендикулярной скорости натекающего потока, к малой полуоси, расположенной вдоль направления потока. Зависимость χ от W определена в работе [3] из условий выполнения (1.1) в точке набегающего потока и в какой-либо точке на пересечении поверх-

ности пузыря и горизонтальной плоскости симметрии, где, в частности, показано, что

$$\chi - 1 = \frac{9}{64} W \quad \text{при } \chi - 1 \ll 1 \quad (1.2)$$

$$W = \pi^2 \chi^{-1/3} (1 - 4 / \pi \chi)^2 \quad \text{при } \chi^2 \gg 1 \quad (1.3)$$

Скорость стационарного движения эллипсоида рассчитана в работе Мура [3] по скорости диссипации кинетической энергии жидкости. С точностью до членов порядка $R^{-1/2}$ результат имеет вид

$$u = \frac{1}{9} (ga^2 / \nu) [1 - \frac{4}{3} (\chi - 1)] \quad \text{при } \chi - 1 \ll 1 \quad (1.4)$$

$$u = \frac{1}{6} (\pi ga^2 / \nu \chi^{7/3}) (1 - 4 / \pi \chi)^2 \quad \text{при } \chi^2 \gg 1 \quad (1.5)$$

Первый член формулы (1.4) совпадает с формулой В. Г. Левича [4], пользуясь которой можно вычислить

$$\begin{aligned} \chi - 1 &= \frac{9}{32} \rho u^2 / \sigma = 0.043 (\rho / \sigma) g^{1/3} \nu^{4/3} R^{5/3} = \\ &= 3.5 \cdot 10^{-3} \rho g^2 a^5 / \sigma \nu^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.4), легко получить

$$u = \frac{1}{9} (ga^2 / \nu) (1 - 4.6 \cdot 10^{-3} \rho g^2 a^5 / \sigma \nu^2) \quad (1.7)$$

Экспериментальные данные, приведенные в работе [4], показывают, что при движении пузырей воздуха в холодной воде с температурой 6°C резкое возрастание коэффициента сопротивления начинается примерно с $R = 250$, а в воде с температурой в 19°C — примерно с $R = 400$. В первом случае $\rho = 1.00 \text{ г/см}^3$, $\nu = 0.0147 \text{ см}^2/\text{сек}$, $\sigma = 0.75 \cdot 10^{-5} \text{ дж/см}^2$, а во втором $\rho = 1.00 \text{ г/см}^3$, $\nu = 0.0102 \text{ см}^2/\text{сек}$, $\sigma = 0.73 \cdot 10^{-5} \text{ дж/см}^2$. В соответствии с (1.6) для холодной воды $\chi - 1 = 4.5 \cdot 10^{-5} R^{5/3}$, а для воды при 19°C можно получить $\chi - 1 = 2.8 \cdot 10^{-5} R^{5/3}$. Заметное влияние деформации на скорость движения начинается с того момента, когда правая часть формулы (1.6) достигает значения, приблизительно равного 0.5, чему соответствует $W \approx 2$.

Если $\chi^2 \gg 1$, то из (1.3) и (1.5) следует:

$$\chi^2 = \rho g a^3 u / 3\pi \sigma \nu \quad (1.8)$$

Как видно из (1.3), приближенное выражение для скорости стационарного подъема можно получить в области $3 < \chi < 6$, полагая $W = \text{const}$. Аналогичным образом в работах [4, 5], на основании анализа экспериментальных данных установлено, что для пузыря умеренного размера, форма которого близка к сплюснутому эллипсоиду, скорость стационарного подъема может быть выражена из условия $W = 3.65$

$$u = 1.35 (\sigma / \rho a)^{1/2} \quad (1.9)$$

Более крупный пузырь обладает грибообразной формой. Это обстоятельство указывает на то, что область, занимаемая турбулентным следом, покрывает около половины поверхности пузыря. Сопротивление такого пузыря пропорционально квадрату скорости относительного движения. Скорость стационарного движения грибообразного пузыря равна [4]

$$u = 1.02 \sqrt{ga} \quad (1.10)$$

Итак, область применимости выражения (1.9) можно считать ограниченной сверху величиной $a = 1.3 (\sigma / \rho a)^{1/2}$. Для пузырей воздуха в воде это означает $a < 0.35 \text{ см}$. Таким образом, для области $\chi^2 \gg 1$ можно получить при помощи (1.8) и (1.9) для степени деформации пузыря

$$\chi^2 = 0.143 (ga^2 / \nu) (\rho a / \sigma)^{1/2} \quad (1.11)$$

Правая часть этой формулы по порядку величины представляет собой отношение скорости движения сферы эквивалентного объема к скорости движения деформированного эллипсоида.

Область применимости (1.11) меньше, чем экспериментально подтверждаемая область применимости зависимости скорости подъема эллипсоидального пузыря от его эквивалентного радиуса (1.9). Как показано ниже, формула (1.11) справедлива лишь при выполнении условия $\chi^2 \ll \sqrt{R}$. В противном случае поправки, связанные с более точным учетом движения жидкости в области гидродинамического пограничного слоя и следа, приведут к иной зависимости скорости подъема пузыря от степени деформации, а следовательно, и к иной зависимости степени деформации от эквивалентного радиуса.

Кроме того, при больших значениях χ фактическая форма пузыря, определяемая уравнением (1.1), отличается от эллипсоидальной. Как показано в работе [3], уравнение (1.1) удовлетворяется на всей поверхности пузыря лишь приближенно с максимальной погрешностью при $\chi = 2$ равной 10%, а при $\chi = 4$ равной 55%. Приблизительно те же результаты, несколько иным способом, получены в работе О. М. Киселева [6]. Однако, как показывает сравнение результатов, полученных Муром [3], с экспериментальными данными Хабермана и Мортонна [4], скорость стационарного движения пузыря, по-видимому, не очень существенно зависит от различия между фактической формой поверхности и эллипсоидальной. Вычисленная скорость движения эллипсоида совпадает с экспериментально наблюдаемой скоростью движения пузыря с погрешностью не более 20% в области до значений $\chi = 4$, в то время как скорость эллипсоида может отличаться на порядок величины от скорости движения сферы эквивалентного объема.

2. Конвективная диффузия на поверхность эллипсоида. Скорость растворения эллипсоидального пузыря должна отличаться от скорости растворения сферического пузыря эквивалентного объема вследствие разной величины скорости стационарного движения, площади поверхности и распределения эффективной толщины диффузионного пограничного слоя вдоль поверхности.

Предположим, что поле скоростей обтекающего потока, совпадает с полем скоростей идеальной жидкости. При заданной величине скорости движения эллипсоидального пузыря диффузионной поток на его поверхность можно рассчитать методом, аналогичным предложенному В. Г. Левичем для случая сферического пузыря [1].

Пусть начало координат находится в центре эллипсоида. Ось z направлена вдоль направления натекающего со скоростью u потока. Уравнение поверхности осесимметричного эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{l_x^2} + \frac{y^2}{l_z^2} = 1 \quad \left(\frac{l_x}{l_z} = \chi > 1 \right) \quad (2.1)$$

Введем ортогональную систему координат α, β, φ так, что

$$\begin{aligned} x &= k [(1 + \alpha^2)(1 - \beta^2)]^{1/2} \cos \varphi, & y &= k [(1 + \alpha^2)(1 - \beta^2)]^{1/2} \sin \varphi \\ z &= k \alpha \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= h_\alpha^2 d\alpha^2 + h_\beta^2 d\beta^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2 \\ h_\alpha &= k \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 + \alpha^2} \right)^{1/2}, & h_\beta &= k \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right)^{1/2}, & h_\varphi &= k [(1 + \alpha^2)(1 - \beta^2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение поверхности эллипсоида соответствует $\alpha = \alpha_0$, причем

$$k(1 + \alpha_0^2)^{1/2} = l_x, \quad k\alpha_0 = l_z \quad (2.4)$$

Ламб [7] вычислил Φ — потенциал поля скоростей идеальной жидкости, обтекающей эллипсоид

$$\begin{aligned} \Phi &= uk\beta [\alpha + p(1 - \alpha \operatorname{arccctg} \alpha)] \\ p &= [\operatorname{arccctg} \alpha_0 - \alpha_0 / (1 + \alpha_0^2)]^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, компоненты скорости v_α, v_β в эллипсоидальной системе координат равны

$$\begin{aligned} v_\alpha &= u\beta \left(\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \right)^{1/2} \left[1 - p(\operatorname{arctg} \alpha - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}) \right] \\ v_\beta &= u \left(\frac{1-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \right)^{1/2} [\alpha + p(1 - \alpha \operatorname{arctg} \alpha)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение конвективной диффузии имеет вид

$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{v_\beta}{h_\beta} \frac{\partial c}{\partial \beta} - \frac{D}{h_\alpha h_\beta h_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{h_\beta h_\varphi}{h_\alpha} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{h_\alpha h_\varphi}{h_\beta} \frac{\partial c}{\partial \beta} \right) \quad (2.7)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} c &= c_s \quad \text{при } \alpha = \alpha_0, \beta \neq -1 \\ c &\rightarrow c_0 \quad \text{при } k\alpha \rightarrow \infty \\ c &= c_0 \quad \text{при } \beta = -1, \alpha \neq \alpha_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вместо переменной α можно ввести новую переменную γ следующим образом:

$$\alpha = \alpha_0 (1 + \delta\gamma), \quad \delta = (1 + \alpha_0^2) \alpha_0^{-1} (D / ukp)^{1/2}$$

Величина δ^{-2} порядка числа Пекле. По условию задачи $\delta \ll 1$.

С точностью до членов порядка δ уравнение конвективной диффузии имеет вид

$$2\beta\gamma \frac{\partial c}{\partial \gamma} + (1 - \beta^2) \frac{\partial c}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 c}{\partial \gamma^2} \quad (2.9)$$

Преобразование Р. Мизеса, означающее переход от переменных γ, β к новым переменным $\psi = \gamma(1 - \beta^2), \tau$, позволяет свести уравнение (2.9) к уравнению типа теплопроводности

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} \left(\tau = \frac{2}{3} + \beta - \frac{\beta^3}{3} \right) \quad (2.10)$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} c &= c_s \quad \text{при } \psi = 0, \tau \neq 0 \\ c &\rightarrow c_0 \quad \text{при } \psi \rightarrow \infty \\ c &= c_0 \quad \text{при } \psi \neq 0, \tau = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решение уравнения (2.10) с условиями (2.11) имеет вид

$$\begin{aligned} c - c_s &= (c_0 - c_s) \operatorname{erf}(\psi / 2\sqrt{\tau}) \\ \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

Плотность диффузионного потока равна

$$j = -D \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial c}{\partial \alpha} \right)_0 = - \frac{D(c_0 - c_s)(1 - \beta^2)}{k\alpha_0 \delta \sqrt{\pi\tau}} \left(\frac{1 + \alpha_0^2}{\alpha_0^2 + \beta^2} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

а полный поток на поверхность пузыря равен

$$I = 2\pi \int_{-1}^1 j k^2 \sqrt{(\alpha_0^2 + \beta^2)(1 + \alpha_0^2)} d\beta = 8 \left(\frac{\pi}{3} uk^3 pD \right)^{1/2} (c_0 - c_s) \quad (2.14)$$

Для случая слабо деформированного пузыря, форма которого мало отличается от сферической, параметры в формуле (2.14) удовлетворяют условиям

$$\alpha_0 \gg 1, k_3 \alpha_0 (1 + \alpha_0^2) = a_3, p = 3/2 \alpha_0^3 (1 + 1/6 \alpha_0^{-2}) \quad (2.15)$$

Выражение для полного потока принимает вид

$$I = 8 (1/2 \pi a a^3 D)^{1/2} (1 + 1/10 \alpha_0^{-2}) (c_0 - c_s) \quad (2.16)$$

Если отбросить поправки порядка α_0^{-2} , то главный член этой формулы совпадает с формулой В. Г. Левича [1].

Воспользовавшись формулами (1.4) и (1.6), можно записать

$$I = \frac{8}{3} \left(\frac{2\nu}{\pi g a^3 D} \right)^{1/2} \left(1 - 1.6 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma}{\rho g a^3} \right) (c_0 - c_s) \quad (2.17)$$

Заметим, что с ростом величины эквивалентного радиуса a поправки в выражении для скорости диффузионного потока (2.17) становятся заметными при несколько больших значениях a , чем аналогичные поправки в выражении для скорости стационарного движения пузыря (1.7).

В случае сильно деформированного пузыря

$$\alpha_0 \gg 1, k_3 \alpha_0 = a_3, p = (2/\pi) (1 + 4\alpha_0/\pi) \quad (2.18)$$

полный диффузионный поток с точностью до членов порядка α_0^{-2} равен

$$I = 8 (2/3 \pi a^3 D / \alpha_0)^{1/2} (1 + 2\alpha_0/\pi) (c_0 - c_s) \quad (2.19)$$

Как видно из формулы (2.19), величина потока на поверхности сильно деформированного пузыря может несколько превышать тот же объем при одинаковой скорости движения. Это результат качественно понятен, так как деформация пузыря сопровождается увеличением его поверхности. Площадь поверхности дискообразного пузыря растет пропорционально $\chi^{2/3}$. Несколько более медленный рост диффузионного потока, пропорциональный $\chi^{1/2}$, связан с неравнодоступностью поверхности в диффузионном отношении. Учитывая зависимость скорости стационарного движения сильно деформированного пузыря от его размеров (1.9) и связь между стеной деформации и скоростью стационарного движения (1.11), можно написать

$$I = 4.68 \left(\frac{\nu A^{1/2} D}{g a^3} \right)^{1/2} \left[1 + 1.7 \left(\frac{\sigma}{\rho g a^3} \right)^{1/2} \right] (c_0 - c_s) \quad (2.20)$$

Если сравнить главный член этой формулы с формулой В. Г. Левича для роста сферического пузыря эквивалентного объема

$$I_0 = 3.35 (g a^3 D / \nu)^{1/2} (c_0 - c_s) \quad (2.21)$$

то видно, что скорость растворения (роста) дискообразного пузыря меньше, чем для сферического пузыря. Однако отношение полных диффузионных потоков $I/I_0 = 0.86 \chi^{-1/2}$ в силу пригодности формулы (2.20) лишь для не слишком высоких значений степеней деформации ($\chi^2 \gg \nu A^{1/2}$) не может быть величиной, порядком которой меньше единицы.

Таким образом, можно считать, что формула В. Г. Левича (2.21) дает правильное представление о значении скорости роста (растворения) эквивалентного пузыря. Следует отметить частичную компенсацию влияния на полный диффузионный поток уменьшения скорости подъема и увеличения поверхности пузыря с ростом степеней деформации.

3. Влияние диссипации энергии в гидродинамическом ограниченном слое и следе на скорость стационарного движения пузыря и на скорость роста или растворения. Более точный учет диссипации энергии в области гидродинамического ограничения слоя и следа приводит, как показано в работе Мюра [3], к следующему выражению для скорости стационарного движения пузыря

$$\frac{n}{n_0} = \frac{(1 + \alpha_0^2) A^{1/2} \nu (L - L_2 + I_3)}{9 A^{1/2} \nu D [c_0 + (1 - \alpha_0^2) \arctg \alpha_0]} \quad (3.1)$$

Здесь u — скорость подъема пузыря с точностью до членов порядка $R^{-1/2}$

$$I_1 = \int_{-1}^1 (\alpha_0^2 + \beta^2) d\beta \int_0^{x(\beta)} d\tau \int_0^{x(\beta)} \frac{S(\tau) S(\tau') d\tau'}{(2x - \tau - \tau')^{3/2}}$$

$$I_2 = 12\alpha_0^2 \int_{-1}^1 \frac{d\beta}{\alpha_0^2 + \beta^2} \int_0^{x(\beta)} \frac{S(\tau) d\tau}{\sqrt{x - \tau}}, \quad I_3 = \frac{3p^2}{2(1 + \alpha_0^2)^2} \int_0^{9/8} d\tau \int_0^{9/8} \frac{S(\tau) S(\tau') d\tau'}{\sqrt{16/9 - \tau - \tau'}} \quad (3.2)$$

$$S(x) = 3\alpha_0^2 [\alpha_0^2 + \beta^2(x)]^{-2}, \quad x = 2/9 (\beta + 1)^2 (2 - \beta) \quad (3.3)$$

Значение $\beta = -1$ ($x = 0$) соответствует точке набегания потока.

Из формул (3.1) — (3.3) следует, что для сферического пузыря скорость стационарного движения равна

$$u_1 = (1/9 g a^2 / \nu) (1 + 2.21 R^{-1/2})$$

Этот результат был получен ранее в работах [3, 8]. (3.4)

Зависимость интегралов (3.2) от α_0 или от χ весьма сложная, поэтому Мур [8] ограничился численным расчетом скорости стационарного движения в области χ от 1 до 4. Представляется целесообразным дополнить эти результаты исследованием (3.1) в области $\chi^2 \gg 1$ ($\alpha_0^2 \ll 1$), чтобы, по крайней мере, оценить область применимости формул предыдущего раздела.

Можно заметить, что при $\alpha_0 \rightarrow 0$ функции

$$1/2 \alpha_0 S = 3/2 \alpha_0^3 [\alpha_0^2 + \beta^2(x)]^{-2} \quad (3.5)$$

стремится к нулю в области, где $\beta^2(x) \gg \alpha_0^2$ и неограниченно возрастает в области $\beta^2(x) \ll \alpha_0^2$. Поведение этой функции при $\alpha_0 \rightarrow 0$ не изменится при замене $\beta(x)$ на выражение, справедливое при $\beta(x) \ll 1$

$$\beta(x) = 3/2 (x - 4/9) \quad (3.6)$$

Так как

$$\frac{\alpha_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S dx = \frac{3\alpha_0^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[\alpha_0^2 + 9/4 (x - 4/9)^2]^2} = 1 \quad (3.7)$$

то при $\alpha_0 \rightarrow 0$ правая часть (3.5) является одним из представлений δ -функции. Таким образом, можно считать, что при $\alpha_0^2 \ll 1$

$$S(x) = (2/\alpha_0) \delta(x - 4/9) \quad (3.8)$$

Тогда

$$I_1 = \frac{27}{2\alpha_0^2} \int_0^1 \frac{\sqrt{\beta} d\beta}{(3 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{2.54}{\alpha_0^2}, \quad I_3 = \frac{2.59}{4\alpha_0^2} \quad (3.9)$$

Интеграл I_2 , как показывают оценки, является величиной порядка $\alpha_0^{-1/2}$. Учет этого члена в формуле (3.1) приводит к поправкам порядка $\alpha_0^{3/2}$. С точностью до членов порядка α_0 включительно выражение для скорости стационарного подъема имеет вид

$$\frac{u_1}{u} = 1 - \frac{0.31}{\alpha_0^{11/6}} \left(\frac{\nu}{ua}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2\alpha_0}{\pi}\right) = 1 - \frac{0.44\chi^{11/6}}{\sqrt{R}} \left(1 + \frac{2}{\pi\chi}\right) \quad (3.10)$$

При $\chi = 4$ формула (3.10) приводит к значению коэффициента перед $R^{-1/2}$, отличающемуся от приведенного в работе [3] на 20%.

Таким образом, поправка к скорости движения пузыря, связанная с диссипацией энергии в области гидродинамического пограничного слоя и следа, оказывается существенной и при движении сферических пузырей сравнительно небольшого размера, поскольку в этом случае величина порядка $R^{-1/2}$ не является пренебрежимо малой, и в случае относительно крупных сильно деформированных пузырей, поскольку коэффициент при малой величине $R^{-1/2}$ приблизительно пропорционален χ^2 .

Итак, область применимости (3.10) ограничена условием $\chi^2 \ll \sqrt{R}$. Погрешность, связанная с заменой $\chi^{11/6}$ на χ^2 , очевидно, не меняет порядок величины поправки.

Зависимость скорости подъема деформированного пузыря от радиуса сферы эквивалентного объема (1.9) не является точным следствием (1.5) и (1.3), а может рассматриваться как обобщение экспериментальных данных, поэтому не возникает необходимости уточнения этой формулы с целью учета поправок порядка χ^2 / \sqrt{R} .

Более точное выражение для скорости натекающего потока приведет к поправкам в выражении (2.19) для скорости роста или растворения пузыря порядка $R^{-1/2}$. Но члены такого порядка возникают также при решении диффузионной задачи с учетом реального существующего поля скоростей в гидродинамическом пограничном слое. Поскольку число Прандтля $\nu / D \gg 1$, то следует считать, что толщина диффузионного пограничного слоя пренебрежимо мала по сравнению с толщиной гидродинамического пограничного слоя. Поэтому при решении уравнения конвективной диффузии достаточно ограничиться полем скоростей на поверхности пузыря. Единственная, отличная от нуля на поверхности пузыря компонента скорости движения жидкости равна [3]

$$v_\beta = \frac{up}{1 + \alpha_0^2} \left(\frac{1 - \beta^2}{\alpha_0^2 + \beta^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{2up\nu}{3\pi k} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha_0^2 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right)^{1/2} \int_0^{x(\beta)} \frac{S(x') dx'}{\sqrt{x-x'}} \quad (3.11)$$

Здесь функции $S(x)$ и $x(\beta)$ определяются формулами (3.3). Уравнение конвективной диффузии приводится к уравнению типа теплопроводности (2.10), если ввести вместо ψ и τ новые переменные

$$\psi_1 = \gamma \left[1 - \beta^2 - \frac{1 + \alpha_0^2}{\alpha_0} \left(\frac{2\nu}{3\pi u p k} \right)^{1/2} (\alpha_0^2 + \beta^2) \int_0^{x(\beta)} \frac{S(x')}{\sqrt{x-x'}} dx' \right] \quad (3.12)$$

$$\tau_1 = \frac{2}{3} + \beta - \frac{\beta^3}{3} - \frac{1 + \alpha_0^2}{\alpha_0} \left(\frac{2\nu}{3\pi u p k} \right)^{1/2} \int_{-1}^{\beta} d\beta' (\alpha_0^2 + \beta'^2) \int_0^{x(\beta')} \frac{S(x')}{\sqrt{x-x'}} dx'$$

Тогда выражение для полного потока на поверхность пузыря принимает вид

$$I_1 = 4 (\pi u k^3 p D)^{1/2} (c_0 - c_s) \times$$

$$\times \left[\frac{4}{3} - \frac{1 + \alpha_0^2}{\alpha_0} \left(\frac{2\nu}{3\pi u p k} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 d\beta (\alpha_0^2 + \beta^2) \int_0^{x(\beta)} \frac{S(x')}{\sqrt{x-x'}} dx' \right]^{1/2} =$$

$$= I \left[1 - \frac{1 + \alpha_0^2}{4\alpha_0} \left(\frac{3\nu}{2\pi u p k} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 d\beta (\alpha_0^2 + \beta^2) \int_0^{x(\beta)} \frac{S(x')}{\sqrt{x-x'}} dx' \right] \quad (3.13)$$

Здесь I определяется формулой (2.14).

Для случая сферического пузыря

$$I_1 = I \left[1 - \frac{4}{5} (3\sqrt{3} - 2) \left(\frac{\nu}{2\pi u a} \right)^{1/2} \right] = I (1 - 1.45 R^{-1/2}) \quad (3.14)$$

Учитывая, что скорость натекающего потока также имеет поправки порядка $R^{-1/2}$, можно получить

$$I_1 = 3.35 (g a^5 D / \nu)^{1/2} (1 - 0.35 R^{-1/2}) (c_0 - c_s) \quad (3.15)$$

Как видно из (3.15), эти поправки в значительной мере компенсируют друг друга.

Таким образом, для скорости роста (растворения) пузыря, форма которого близка к сферической, следует написать

$$I = 3.35 \left(\frac{ga^5 D}{\nu} \right)^{1/2} \left[1 - 1.6 \cdot 10^{-3} \frac{\rho g^2 a^5}{\sigma \nu} - 1.05 \left(\frac{\nu^2}{ga^3} \right)^{1/2} \right] (c_0 - c_s) \quad (3.16)$$

Эта формула учитывает влияние малой деформации на диффузионный поток и поправки в скорости обтекающего потока порядка $R^{-1/2}$.

В случае дискообразного пузыря формула (3.13) приводит к следующему результату:

$$I_1 = I \left(1 - \frac{3 \sqrt{3}}{4 \sqrt{R}} \alpha_0^{-1/6} \int_0^1 \frac{\beta \sqrt{3} d\beta}{\sqrt{3 - \beta^2}} \right) = I \left(1 - \frac{0.33}{\sqrt{R}} \alpha_0^{-1/6} \right) \quad (3.17)$$

Здесь I определяется формулой (2.20).

Заметим, что поправка к диффузионному потоку для сильно деформированного пузыря возникает в основном на кормовой части поверхности, где линии тока движения жидкости заметно отличаются от линий тока идеальной жидкости.

Таким образом, скорость квазистационарного роста дискообразного пузыря равна

$$I_1 = 4.68 \left(\frac{ga^2 \sqrt{\sigma}}{\nu \sqrt{\rho a}} \right)^{1/4} \sqrt{a^3 D} \left(1 + \frac{2}{\pi \chi} - 0.33 \frac{\chi^{1/6}}{\sqrt{R}} \right) (c_0 - c_s) \quad (3.18)$$

С погрешностью, не превышающей 30% величины поправки при $R \sim 10^3$, можно заменить $\chi^{1/6}$ на χ^2 , так как $\chi^2 \ll \sqrt{R}$. Далее, воспользовавшись зависимостью χ от a (1.11), можно получить

$$I_1 = 4.68 \left(\frac{ga^2 \sqrt{\sigma}}{\nu \sqrt{\rho a}} \right)^{1/4} \sqrt{a^3 D} \left[1 + 1.7 \left(\frac{\nu \sqrt{\sigma}}{ga^2 \sqrt{\rho a}} \right)^{1/2} - 2.9 \cdot 10^{-2} ga \left(\frac{a}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho a}{\sigma} \right)^{3/4} \right] (c_0 - c_s) \quad (3.19)$$

Как видно из формулы (3.19), с увеличением радиуса эквивалентной сферы χ^2 растет быстрее, чем \sqrt{R} . Поэтому область применимости (3.19) ограничена условием

$$2.9 \cdot 10^{-2} ga (a/\nu)^{1/2} (\rho a/\sigma)^{3/4} \ll 1$$

Для пузырей воздуха в воде при температуре 19 °C это означает $a^{9/4} \ll 0.085$ или $a < 0.26$ см. Заметим, что отклонение формы пузыря от сферической начинается при $a \approx 0.06$ см.

4. Сравнение с экспериментом. Если в формуле (3.19) пренебречь членами порядка $1/\chi$ и χ^2/\sqrt{R} , то главный член формулы (3.19) при увеличении эквивалентного радиуса возрастает как $a^{1/3}$. Можно считать, что этот результат согласуется с экспериментами К. Н. Шабалина и др. [9] по растворению углекислого газа из несферических пузырей.

Авторы [9] пришли к выводу, что скорость растворения пропорциональна квадрату эквивалентного радиуса.

Полученные выше результаты можно выразить в виде соотношения между безразмерными критериями. Поток вещества в безразмерном виде определяется числом Нуссельта $N = I / 2\pi D a (c_0 - c_s)$.

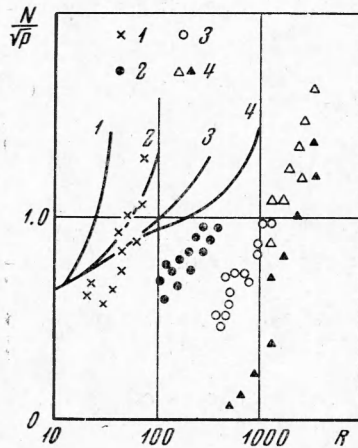
Для пузыря, форма которого близка к сферической, как следует из формул (2.16), (3.14) и (1.6)

$$\frac{N}{\sqrt{P}} = 1.13 \left(1 - \frac{1.45}{\sqrt{R}} + 8.6 \cdot 10^{-3} \frac{\rho}{\sigma} g^{1/3} \nu^{1/3} R^{5/3} \right) \quad (4.1)$$

Для дискообразного пузыря формулы (2.19), (3.17) и (4.11) приводят к следующему результату:

$$N / \sqrt{P} = 2.31 \cdot 10^{-2} g^{1/2} (\rho / \sigma)^{3/2} v^2 R^{5/2} \times \\ \times [1 - 0.33 \cdot 10^{-3} g (\rho / \sigma)^3 v^4 R^{9/2}] + 0.47 \quad (4.2)$$

Сравнение результатов расчета зависимости N / \sqrt{P} от числа R с экспериментальными данными о растворении углекислого газа в водном растворе глюкозы Редфилда и Хоктона [10] представлено на фигуре. Первые три кривые изображают формулу (4.1). Вязкость жидкости не достаточно мала, чтобы можно было использовать формулу (4.2). При построении четвертой кривой использованы обе асимптотические формулы (4.1) и (4.2). Соответствующие экспериментальные точки, обозначенные различным образом, получены в результате измерений на различных уровнях в колонне.



Фиг. 1

Автор благодарит В. Г. Левича за обсуждение результатов работы.

Поступила 12 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Moore D. W. Rise of a gas bubble in a viscous liquid. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, part 1.
3. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, part 4.
4. Haberman W. L., Morton R. K. An experimental study of bubbles moving in liquids. Proc. Amer. Soc. Civil. Engrs., 1954, vol. 80, No. 1.
5. Peebles F. N., Garber H. J. Studies on the motion of gas bubbles in liquids. Chem. Engng Progr., 1953, No. 2.
6. Киселев О. М. Определение формы газового пузыря в осесимметричном потоке жидкости. ПМТФ, 1963, № 3.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
8. Moore D. W. The boundary layer on a spherical gas bubble. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, part. 2.
9. Шабалин К. Н., Крылов С. Ф., Оборин В. Н. Скорость адсорбции в условиях барботажа. Ж. хим. пром., 1939, т. 16, № 1.
10. Redfield I. A., Houghton G. Mass transfer and drag coefficients for single bubbles at Reynolds Number of 0.02—5000. Chem. Engng. Sci., 1965, vol. 20, No. 2.
11. Deindorfer F. H., Humphrey A. E. Mass transfer from individual gas bubbles. Ind. Engng. Chem., 1961, vol. 53, No. 9.
12. Leonard I. H., Houghton G. Mass transfer and velocity of rise phenomena for single bubbles. Chem. Engng. Sci., 1963, vol. 18, No. 2.