

УДК (532.591+539.3):534.1

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОВЕДЕНИЕ УПРУГОЙ БАЛКИ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

В линейной постановке исследовано воздействие начальных возмущений и нестационарной внешней нагрузки на упругую балку конечной длины, свободно плавающую на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Течение жидкости полагается потенциальным. Прогиб балки ищется в виде разложения по собственным функциям колебаний балки в пустоте с амплитудами, изменяющимися во времени. Задача сводится к решению бесконечной системы интегродифференциальных уравнений для неизвестных амплитуд. Функции “памяти”, входящие в эту систему, определены в результате решения радиационной задачи. Исследовано поведение балки при различных нагрузках с учетом и без учета весомости жидкости. Сравнение с полученными ранее результатами решения нестационарной задачи для балки, плавающей на мелководье, позволило определить влияние глубины жидкости на деформации балки.

Ключевые слова: плавающая упругая пластина, бесконечно глубокая жидкость, нестационарная внешняя нагрузка.

Введение. В последние годы интерес к исследованию поведения больших плавающих структур значительно возрос в связи с созданием платформ различного назначения [1]. При математическом моделировании такие платформы часто рассматриваются как тонкие упругие пластины. Задача о нестационарном поведении ограниченной упругой пластины, плавающей на свободной поверхности жидкости, даже в линейном приближении изучена не полностью. В плоском случае рассмотрено поведение балочной пластины, плавающей на мелководье [2, 3] и на поверхности жидкости конечной глубины [4]. В пространственном случае разработаны методы решения нестационарной гидроупругой задачи для круглой пластины на мелководье [5] и для прямоугольной пластины, плавающей на поверхности бесконечно глубокой жидкости [6, 7].

В данной работе метод нормальных мод, используемый в [6, 7], применяется для решения плоской задачи о нестационарном поведении упругой балки, плавающей на поверхности жидкости бесконечной глубины. В плоском случае удается избежать допущений, вводимых в [6, 7] при определении функций “памяти”, так как при решении радиационной задачи поведение коэффициентов демпфирования в высокочастотном пределе известно точно. Попытка решения рассматриваемой задачи, предпринятая в [8], не доведена до численных расчетов.

Данное исследование в значительной степени использует результаты работы [9], поэтому общие фрагменты будут зачастую опущены и указаны ссылкой на эту работу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 02-01-00739) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-902.2003.1).

1. Постановка задачи. Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости свободно плавает упругая однородная балка длиной $2L$. Поверхность жидкости, не покрытая балкой, является свободной, а глубина жидкости — бесконечной. Течение жидкости полагается потенциальным. Начало координат соответствует середине балки. Осадка балки не учитывается. Внутри жидкости потенциал скоростей $\phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0 \quad (|x| < \infty, \quad y < 0),$$

где x — горизонтальная координата; y — вертикальная координата, направленная вверх; t — время.

Динамическое и кинематическое условия при $y = 0$ имеют вид

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial\phi}{\partial t} - gw, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.1)$$

где $p(x, y, t)$ — давление в жидкости; $w(x, t)$ — возвышение свободной поверхности или нормальный прогиб балки; ρ — плотность воды; g — ускорение свободного падения. На свободной поверхности жидкости

$$p = 0 \quad (|x| > L, \quad y = 0). \quad (1.2)$$

Вдали от балки

$$|\nabla\phi| \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty). \quad (1.3)$$

Нормальный прогиб балки Эйлера описывается уравнением

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x, 0, t) = -p_e(x, t) \quad (|x| \leq L), \quad (1.4)$$

где D , ρ_1 , h_1 — соответственно цилиндрическая жесткость, плотность и толщина балки. Функция $p_e(x, t)$ является заданной и описывает внешнюю нагрузку на балку.

На краях балки ставятся условия свободного края — равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (|x| = L).$$

В начальный момент заданы функции

$$\phi_0(x, y) = \phi|_{t=0}, \quad w_0(x) = w|_{t=0}, \quad w_1(x) = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0},$$

которые не являются независимыми и должны удовлетворять граничным условиям (1.1)–(1.3).

Представляет интерес также построение решения данной задачи в предположении, что жидкость невесома. Такая модель используется в теории удара при исследовании кратковременного воздействия на плавающее упругое тело [8]. Для невесомой жидкости на свободной поверхности вместо условия (1.2) имеем

$$\phi = 0 \quad (|x| > L, \quad y = 0).$$

Перейдем к безразмерным переменным (отмечены звездочкой):

$$(x^*, y^*, w^*) = \frac{1}{L} (x, y, w), \quad t^* = t\sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \phi^* = \frac{\phi}{\sqrt{gL^3}}, \quad (p, p_e) = \frac{1}{\rho g L} (p, p_e).$$

Ниже используются следующие безразмерные коэффициенты:

$$\gamma = \frac{D}{\rho g L^4}, \quad \chi = \frac{\rho_1 h_1}{\rho L}.$$

Прогиб балки ищем в виде разложения по собственным функциям колебания балки со свободными концами в пустоте (звездочки далее опущены)

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) W_n(x), \quad (1.5)$$

где функции $X_n(t)$ подлежат определению, а функции $W_n(x)$ — решения следующей спектральной задачи:

$$\begin{aligned} W_n^{(IV)} &= \lambda_n^4 W_n \quad (|x| \leq 1), \\ W_{2k}' &= W_{2k+1} = 0 \quad (x = 0), \quad W_n'' = W_n''' = 0 \quad (|x| = 1). \end{aligned}$$

Штрих означает дифференцирование по x . Значения функций $W_n(x)$ приведены в [9].

2. Уравнения движения. Согласно [6, 7] для определения неизвестных функций $X_n(t)$ имеем бесконечную систему интегродифференциальных уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[(\chi \delta_{mn} + \bar{a}_{mn}) \ddot{X}_m + \int_0^t \dot{X}_m(\tau) K_{mn}(t - \tau) d\tau \right] + (1 + \gamma \lambda_n^4) X_n = -F_n(t) \quad (2.1)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

с начальными условиями

$$X_n(0) = x_n^0, \quad \dot{X}_n(0) = x_n^1,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{mn} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_{mn}(\omega), \quad F_n(t) = \int_{-1}^1 p_e(x, t) W_n(x) dx, \quad K_{mn}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} b_{mn}(\omega) \cos \omega t d\omega, \\ x_n^0 &= \int_{-1}^1 w_0(x) W_n(x) dx, \quad x_n^1 = \int_{-1}^1 w_1(x) W_n(x) dx, \end{aligned} \quad (2.2)$$

δ_{mn} — символ Кронекера. Точка сверху означает дифференцирование по времени. Для получения уравнения (2.1) разложение (1.5) подставляется в (1.4), полученное соотношение умножается на $W_m(x)$ и результирующее уравнение интегрируется по x от -1 до 1 . Функции $a_{mn}(\omega)$ и $b_{mn}(\omega)$ определяются из решения радиационной задачи и по аналогии с теорией гидродинамической качки корабля называются коэффициентами присоединенных масс и демпфирования соответственно.

Радиационная задача соответствует определению поведения жидкости при заданных гармонических колебаниях с частотой ω вертикальной скорости на участке верхней границы при $|x| \leq 1$. Остальная часть верхней границы жидкости является свободной поверхностью. Колебательное движение жидкости предполагается установившимся, и все функции, определяющие характеристики движения, пропорциональны $\exp(i\omega t)$. Решение этой задачи представлено в работе [9].

В предельных случаях низкой и высокой частоты колебаний поведение функций $a_{mn}(\omega)$ и $b_{mn}(\omega)$ хорошо известно. Явные выражения для значений \bar{a}_{mn} приведены в [9].

Коэффициенты демпфирования $b_{mn}(\omega)$ равны нулю при $\omega = 0$ и стремятся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Асимптотическое выражение для этих коэффициентов в случае высоких частот имеет вид

$$b_{mn}(\omega) = c_{mn}/\omega + O(\omega^{-2}) \quad (\omega \rightarrow \infty),$$

где $c_{mn} = \pi U_n U_m$. Значения U_n приведены в [9].

При вычислении так называемой функции “памяти” $K_{mn}(t)$ в (2.2) коэффициенты демпфирования при достаточно больших частотах аппроксимируются функцией

$$b_{mn}(\omega) = c_{mn}/\omega \quad (\omega \geq \omega_*). \quad (2.3)$$

Как показано в [9], значение ω_* должно быть не менее 30.

Подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$K_{mn}(t) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\omega_*} b_{mn}(\omega) \cos \omega t d\omega - c_{mn} \text{Ci}(\omega_* t) \right], \quad (2.4)$$

где $\text{Ci}(\cdot)$ — интегральный косинус. При малых значениях t функция $K_{mn}(t)$ имеет логарифмическую особенность

$$K_{mn}(t) \rightarrow -c_{mn} \ln t \quad (t \rightarrow 0).$$

3. Численные результаты. Используя метод редукции, бесконечные ряды в разложении (1.5) заменим суммой с числом членов $2(N+1)$. С учетом свойств четности для функций $W_n(x)$ система интегродифференциальных уравнений (2.1) распадается на две — отдельно для четных и нечетных номеров n . Решение этой системы выполняется методом центральных конечных разностей с постоянным шагом по времени.

Первое слагаемое в левой части (2.4) находится численно с использованием значений $b_{mn}(\omega)$, определенных для дискретного набора частот. При этом интервал частот $0 \div \omega_*$ разбивается на отрезки с неравномерным шагом (см. подробнее [9]). Внутри каждого отрезка значение $b_{mn}(\omega)$ определяется также и в средней точке, что позволяет ввести квадратичную аппроксимацию для этой функции и выполнить аналитическое интегрирование в (2.4) на каждом отрезке (см. подробнее [6, 7]). Для вычисления интеграла типа свертки в (2.1) используется метод, описанный ранее в [5–7]. В итоге для момента времени $t = k\zeta$, где ζ — шаг по времени, получаем две несвязанные системы линейных алгебраических уравнений

$$B_1 \mathbf{A}_1^{k+1} = \mathbf{C}_1^k, \quad B_2 \mathbf{A}_2^{k+1} = \mathbf{C}_2^k, \quad (3.1)$$

где квадратные матрицы B_1, B_2 являются полностью заполненными и не зависят от временного шага, а вектора $\mathbf{A}_1^m, \mathbf{A}_2^m$ равны соответственно:

$$\mathbf{A}_1^m = \{X_0(m\zeta), X_2(m\zeta), \dots, X_{2N}(m\zeta)\}^T, \quad \mathbf{A}_2^m = \{X_1(m\zeta), X_3(m\zeta), \dots, X_{2N+1}(m\zeta)\}^T.$$

В вектора $\mathbf{C}_1^k, \mathbf{C}_2^k$ кроме правой части уравнений (2.1) входят слагаемые, учитывающие значения $X_n(t)$ на предыдущих шагах. Верхний индекс t означает транспонирование.

Предлагаемый метод обладает универсальностью в том смысле, что значения коэффициентов присоединенной массы и демпфирования, а следовательно, и функции “памяти” $K_{mn}(t)$ не зависят от конкретных свойств пластины и типа ее нестационарного движения. Матрицы B_1, B_2 в (3.1) зависят от свойств пластины, но не зависят от типа внешнего возмущения.

Для получения решения, соответствующего невесомой жидкости, функции “памяти” $K_{mn}(t)$ в (2.1) полагаются равными нулю, и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Зависимости функций “памяти” от времени для первых мод представлены на рис. 1. Следует отметить, что наиболее значимыми из этих функций являются те, которые соответствуют твердотельным колебаниям балки. Для упругих мод функции “памяти” отличны от нуля только при относительно малых временах.

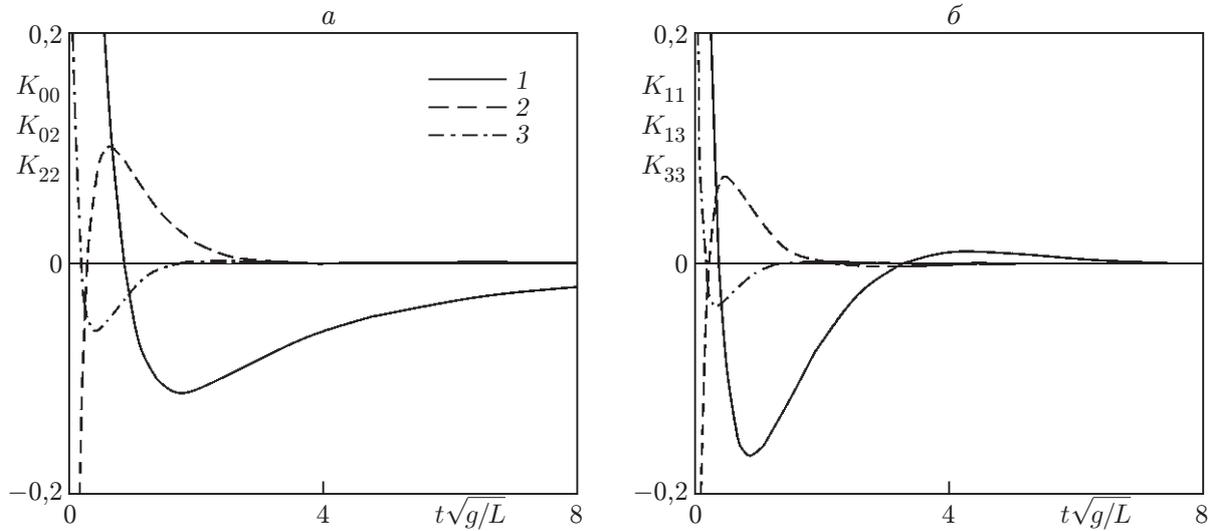


Рис. 1. Зависимость функций “памяти” K_{nm} от времени:
 а — K_{00} (1), K_{02} (2), K_{22} (3); б — K_{11} (1), K_{13} (2), K_{33} (3)

Далее рассмотрим поведение балки, вызванное ее начальной деформацией в покоящейся жидкости. Примеры численных расчетов поведения такой балки, плавающей на мелководье, представлены в [3], а балки, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины, — в [4]. Использовались начальные условия в виде

$$w_0(x) = a \exp(-50x^2/(7L^2)), \quad \phi_0 = w_1 = 0,$$

где в размерных переменных множитель a имеет размерность длины. Внешняя нагрузка отсутствует, следовательно, в (1.4) $p_e = 0$. Расчеты выполнены при $\gamma = 0,0032$, $\chi = 0$. Во всех приведенных ниже расчетах $N = 6$, дальнейшее увеличение N практически не влияет на результат. Безразмерный шаг по времени при интегрировании системы (2.1) равнялся 0,01. В данной задаче учитываются только четные моды, так как начальная деформация балки является симметричной относительно начала координат. Зависимости от времени нормальных прогибов балки представлены на рис. 2. При $t < \sqrt{L/g}$ волновые процессы в весоной жидкости еще не успевают достаточно развиться и поведение балки в обоих случаях практически не различается. Однако со временем расхождение становится значительным. Для балки, плавающей на поверхности весоной жидкости, начальная деформация со временем исчезает, и балка принимает горизонтальное невозмущенное положение. Затухание колебаний происходит быстрее в средней части балки по сравнению с затуханием на ее концах. Для балки в невесоной жидкости уменьшения прогибов со временем как в центре, так и на краях не наблюдается, так как в этом случае отсутствуют генерация поверхностных волн и рассеяние энергии.

Для исследования внешнего нестационарного воздействия на балку использованы два типа нагрузки, рассмотренные ранее в [2] для балки, плавающей на мелководье. Для импульсной нагрузки распределение внешнего давления задано в виде

$$p_e(x, t) = a\rho g F(x)B(t), \quad (3.2)$$

где постоянная a имеет размерность длины,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (x-l)^2/s^2, & |x-l| \leq s, \\ 0, & |x-l| > s, \end{cases} \quad |l| + s < L, \quad (3.3)$$

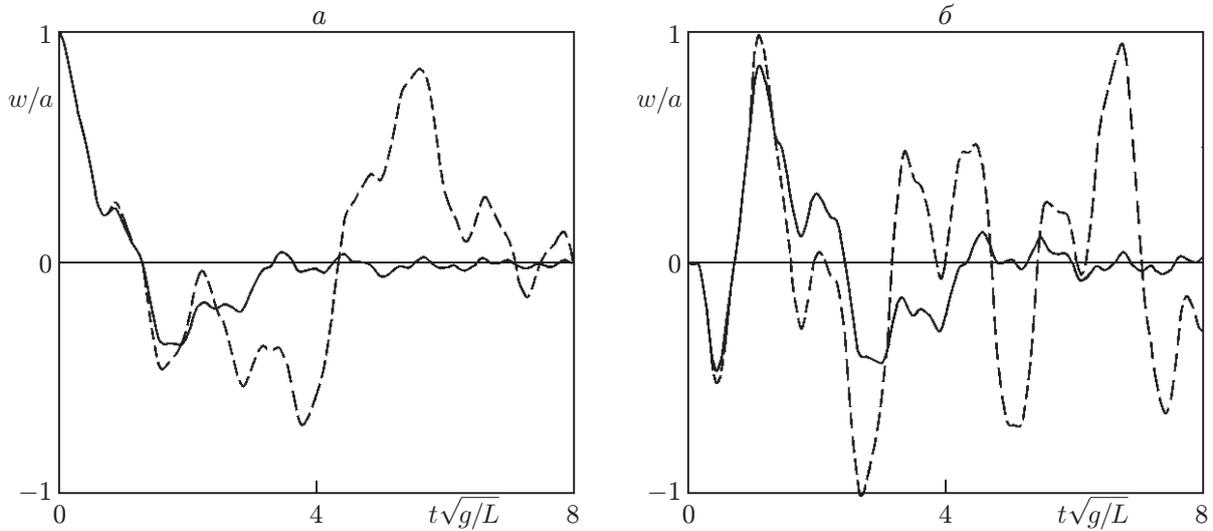


Рис. 2. Зависимости от времени прогибов балки, вызванных ее начальной деформацией:

a — $x = 0$; b — $x = L$; сплошные линии — решения для весоной жидкости; штриховые — решения для невесоной жидкости

$$B(t) = \begin{cases} t/b, & t \leq b, \\ 2 - t/b, & b \leq t \leq 2b, \\ 0, & t > 2b. \end{cases}$$

В начальный момент жидкость и балка покоятся.

Исходные параметры: $D = 4,476 \cdot 10^{10}$ кг · м²/с², $\rho = 10^3$ кг/м³, $\rho_1 h_1 / \rho = 1$ м, $L = 200$ м, $s = 40$ м, $b = 0,5$ с.

Расчеты для балки конечных размеров сопоставлены с известным решением для бесконечной балки, плавающей на поверхности глубокой весоной жидкости (см., например, [10]). Для нагрузки в форме (3.2) это решение имеет вид

$$w(x, t) = \frac{a\rho g}{\pi b} \int_0^\infty \frac{Y(k, t) \tilde{F}(k) \cos kx}{Dk^4 + \rho g} dk,$$

где

$$Y(k, t) = \begin{cases} \Omega^{-1} \sin \Omega t - t, & 0 \leq t \leq b, \\ \Omega^{-1} [2 \sin \Omega(b - t) + \sin \Omega t] - 2b + t, & b \leq t \leq 2b, \\ \Omega^{-1} [2 \sin \Omega(b - t) - \sin \Omega(2b - t) + \sin \Omega t], & t > 2b, \end{cases}$$

$$\Omega^2(k) = k(Dk^4 + \rho g) / (\rho + \rho_1 h_1 k).$$

$\tilde{F}(k)$ — фурье-преобразование функции $F(x)$ в (3.3):

$$\tilde{F}(k) = \frac{4}{sk^2} \left(\frac{\sin ks}{ks} - \cos ks \right).$$

На рис. 3 приведены результаты расчетов для случая симметричного расположения внешней нагрузки. Следует отметить, что в эпицентре давления на отрезке времени, на котором действует давление ($t\sqrt{g/L} \leq 2b\sqrt{g/L} \approx 0,22$), все три решения совпадают, но

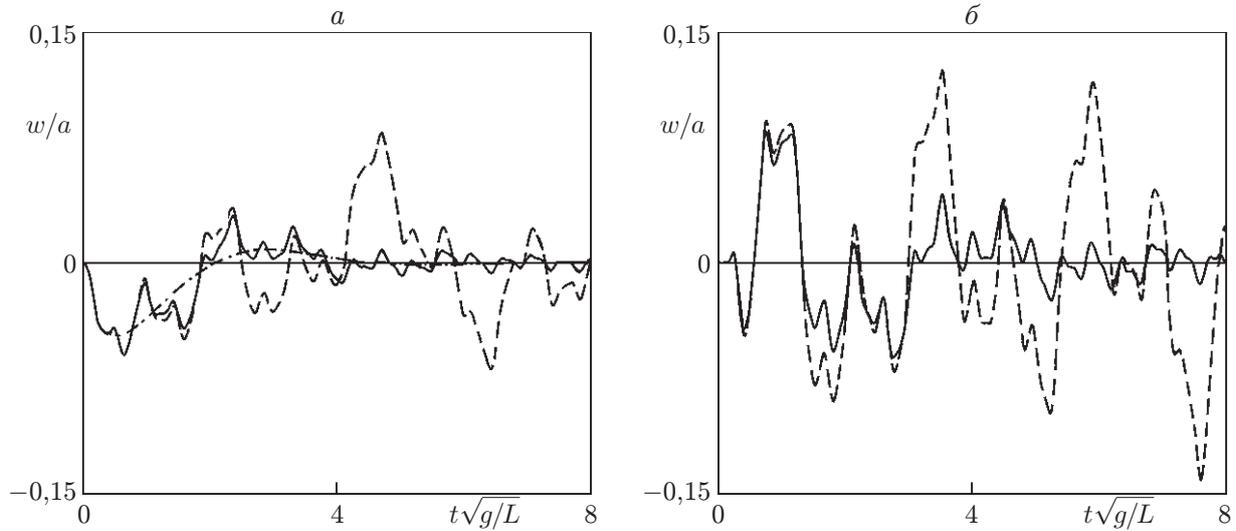


Рис. 3. Зависимости от времени прогибов балки, вызванных импульсной нагрузкой в случае ее симметричного расположения ($l = 0$):

a — $x = 0$; b — $x = L$; сплошные линии — решения для весоной жидкости; штриховые — для невесоной жидкости; штрихпунктирная линия — решение для бесконечной балки

после прекращения внешнего воздействия прогибы различных балок существенно различаются. Для балки, плавающей на поверхности весоной жидкости, со временем устанавливается исходное состояние, а для балки в невесоной жидкости уменьшения прогибов со временем как в эпицентре давления, так и на краях не наблюдается. Так же как и при колебаниях балки, плавающей на мелководье [2], в случае бесконечно глубокой жидкости колебания балки на краях больше, чем в эпицентре давления. Максимальный прогиб края, достигаемый при $t\sqrt{g/L} \approx 0,73$, почти в 1,4 раза больше максимального прогиба в эпицентре давления.

Результаты расчетов для случая несимметричного приложения давления ($l = 0,5L$) представлены на рис. 4, где показаны нормальные прогибы балки в эпицентре давления при $x = l$ (сплошная и штрихпунктирная кривые на рис. 4, a соответственно для конечной и бесконечной балок) и колебания краев при $x = L$ (сплошная кривая) и $x = -L$ (штриховая кривая) (рис. 4, b). Максимальные значения прогибов в эпицентре давления и на правом краю балки практически совпадают с соответствующими значениями в симметричном случае (ср. рис. 3 и рис. 4), а максимальный прогиб левого края несколько больше. Время появления максимальных прогибов на краях существенно различается. Сначала (при $t\sqrt{g/L} \approx 0,32$) максимальный прогиб достигается на конце балки, ближайшем к области давления, а затем (при $t\sqrt{g/L} \approx 1,46$) — на противоположном конце.

Влияние движущейся нагрузки рассмотрено на примере, моделирующем посадку самолета. Предполагается, что в начальный момент времени балка и жидкость покоятся, а нагрузка со скоростью v плавно касается балки в области с центром в точке $x = x_0$, а затем равномерно движется влево вплоть до полной остановки в точке $x = x_1$ в момент времени $t = t_1 \equiv 2(x_0 - x_1)/v$. Распределение внешней нагрузки задано в виде

$$p_e(x, t) = a\rho g[1 - \exp(-bt)]F(x, t),$$

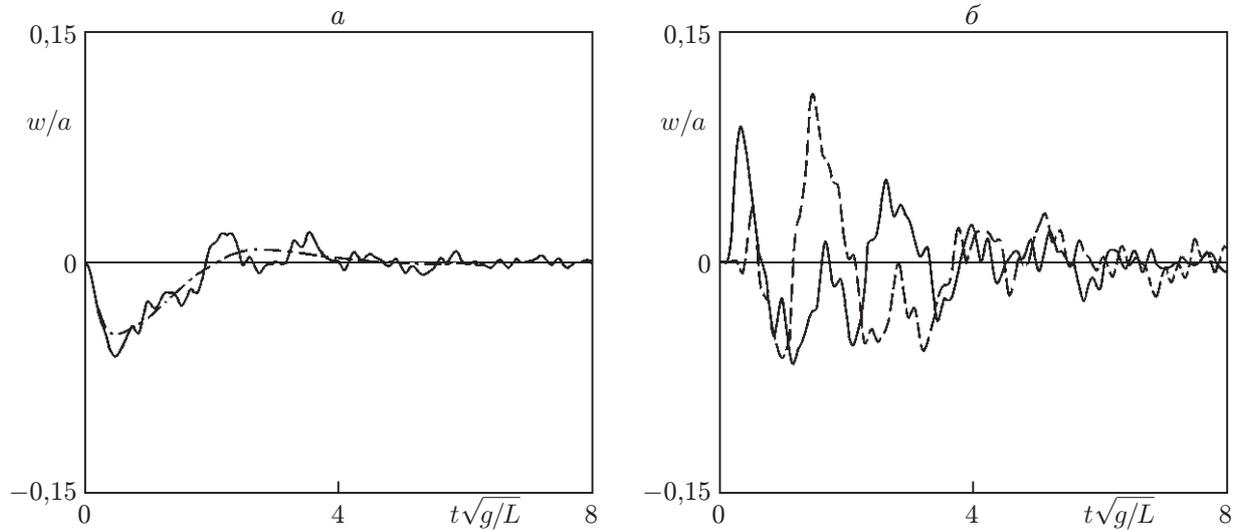


Рис. 4. Зависимости от времени прогибов балки, вызванных импульсной нагрузкой в случае ее несимметричного расположения ($l = 0,5L$):

a — $x = l$ (сплошная линия — решение для конечной балки; штрихпунктирная линия — решение для бесконечной балки); b — $x = L$ (сплошная линия) и $x = -L$ (штриховая линия)

где функция $F(x, t)$ определена соотношением (3.3) с зависимостью

$$l(t) = \begin{cases} x_0 - vt + v^2 t^2 / [4(x_0 - x_1)], & 0 \leq t \leq t_1, \\ x_1, & t > t_1. \end{cases}$$

Использованы прежние исходные параметры, однако теперь $s = 0,1L$, $x_0 = 0,7L$, $x_1 = -0,7L$, $b = 20/t_1$.

Известно [10], что существует критическая скорость распространения изгибно-гравитационных волн v_{cr} , которая для бесконечно глубокой жидкости определяется соотношением

$$v_{cr} = 2(Dg^3/(27\rho))^{1/8}.$$

При заданных параметрах это соответствует безразмерному значению $v_{cr}/\sqrt{gL} \approx 0,64$. Отметим, что критическая скорость изгибно-гравитационных волн в бесконечно глубокой жидкости почти в два раза превышает критическую скорость этих волн на мелководье.

На рис. 5 представлены зависимости от времени нормальных прогибов балки в точках $x = 0$ и $x = -L$ при различных начальных скоростях движения нагрузки. На рис. 5, a вертикальной линией показан момент пересечения пиком нагрузки начала координат $t/t_1 \approx 0,29$. Так же как и в случае мелководья, максимальный прогиб балки достигается в этот момент только при относительно медленном движении нагрузки. С увеличением v максимальный прогиб при $x = 0$ уменьшается и его появление наблюдается после прохождения пика нагрузки через начало координат. При $t > t_1$ колебания балки успокаиваются и постепенно принимают значения, соответствующие распределенной статической нагрузке с центром в точке $x = x_1$. Решение такой стационарной задачи легко получить из системы (2.1), которая в этом случае сводится к простой системе линейных алгебраических уравнений. Значения статического прогиба не зависят от глубины жидкости и приведены в [2]. Колебания правого конца, как и в случае мелководья, значительно меньше, чем в рассмотренных точках. На рис. 5 видно, что наибольшие прогибы, как

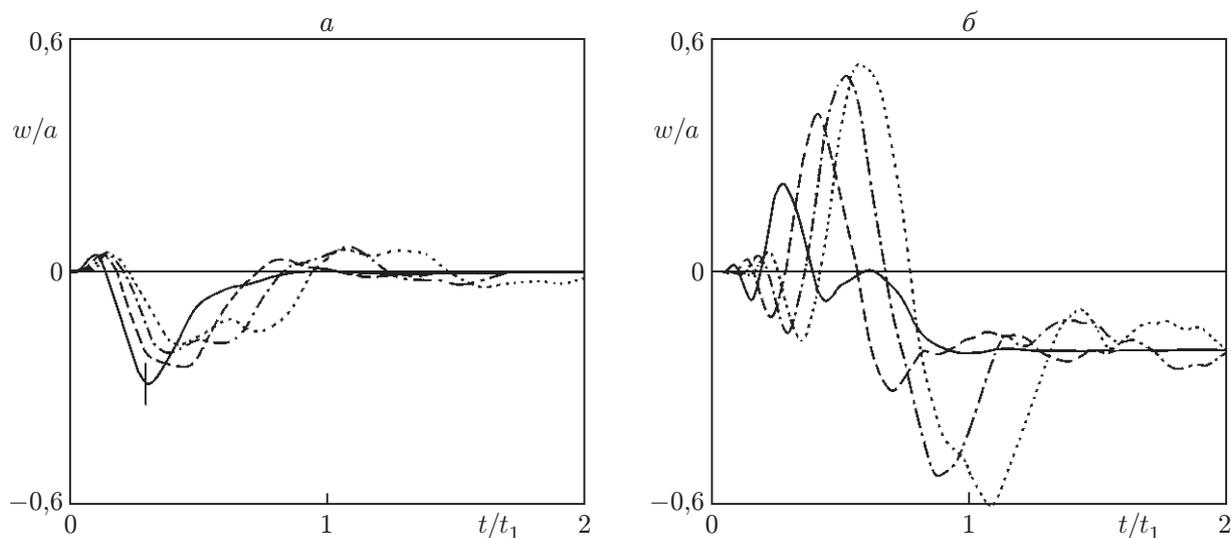


Рис. 5. Зависимости от времени прогибов балки, вызванных движущейся нагрузкой при $x = 0$ (а) и $x = -L$ (б); сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные линии соответствуют значениям начальной скорости движения нагрузки $v/\sqrt{gL} = 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$

правило, возникают на левом конце балки. Увеличение начальной скорости нагрузки приводит к более интенсивным колебаниям левого края балки и большему времени выхода на статический режим по сравнению с временем движения нагрузки.

Заключение. Представленные результаты в совокупности с полученными ранее [2] показывают влияние глубины жидкости на поведение плавающей упругой балки, подверженной действию начальных возмущений и нестационарной внешней нагрузки. Из сравнения максимальных прогибов балки под действием одних и тех же нагрузок для мелкой и бесконечно глубокой жидкости видно, что, как правило, в последнем случае колебания балки больше. Предложенный метод расчета обладает универсальностью и может быть распространен на случай конечной глубины жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Watanabe E., Utsunomiya T., Wang C. M.** Hydroelastic analysis of pontoon-type VLFS: a literature survey // *Engng Struct.* 2004. V. 26. P. 245–256.
2. **Стурова И. В.** Нестационарное поведение плавающей на мелководье упругой балки под действием внешней нагрузки // *ПМТФ.* 2002. Т. 43, № 3. С. 88–98.
3. **Meylan M. H.** Spectral solution of time-dependent shallow water hydroelasticity // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 454. P. 387–402.
4. **Meylan M. H., Hazard C., Loret F.** Linear time-dependent motion of a two dimensional floating elastic plate in finite depth water using the Laplace transform // *Proc. of the 19th Intern. workshop on water waves and floating bodies, Cortona (Italy), 28–31 March, 2004.* Rome: INSEAN, 2004.
5. **Стурова И. В.** Действие нестационарной внешней нагрузки на упругую круглую пластину, плавающую на мелководье // *Прикл. математика и механика.* 2003. Т. 67, вып. 3. С. 453–463.
6. **Kashiwagi M.** A time-domain mode-expansion method for calculating transient elastic responses of a pontoon-type VLFS // *J. Mar. Sci. Technol.* 2000. V. 5, N 2. P. 89–100.

7. **Kashiwagi M.** Transient responses of a VLFS during landing and take-off of an airplane // J. Mar. Sci. Technol. 2004. V. 9, N 1. P. 14–23.
8. **Korobkin A.** Unsteady hydroelasticity of floating plates // J. Fluids and Struct. 2000. V. 14. P. 971–991.
9. **Стурова И. В., Коробкин А. А.** Плоская задача о воздействии периодической нагрузки на упругую пластину, плавающую на поверхности бесконечно глубокой жидкости // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 3. С. 61–73.
10. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.

Поступила в редакцию 31/1 2005 г.
