УДК 550.343

МОДЕЛЬ САМООРГАНИЗАЦИИ АНСАМБЛЯ ИЗЛУЧАЮЩИХ ЗВУК ТРЕЩИН

В. В. Кузнецов

Институт геофизики СО РАН, 630090 Новосибирск

Предлагается модель самоорганизации трещин, возникающих в образце горной породы (граните) при сжатии его на прессе. Модель основана на использовании предполагаемого акустического волнового взаимодействия между образующимися трещинами. В модели самоорганизации трещин используются решения уравнения Фоккера — Планка. Дано объяснение результатов лабораторных экспериментов, в которых обнаружены спонтанное увеличение интенсивности акустической эмиссии, пространственная и временная кластеризация, а также образование фрактальной структуры при постоянной и плавно меняющейся нагрузке образцов горных пород.

В последние годы исследование самоорганизующихся систем занимает важное место в физике нелинейных процессов и явлений [1–3] и геофизике, особенно при изучении физики землетрясения [4–6]. Большинство работ основано на использовании модели сейсмичности Барриджа — Кнопова и закона Гутенберга — Рихтера.

Несмотря на многолетние усилия ученых, природа землетрясения до сих пор неясна. Одним из направлений проводимых в этой области исследований является лабораторное моделирование процессов, происходящих в образцах горных пород при сжатии их на прессе. Получен ряд интересных результатов, насколько нам известно, не нашедших объяснения. Обнаружено, что после выдержки образца под постоянным давлением в течение примерно 50 ч интенсивность акустической эмиссии (АЭ) резко возрастает, изменяются скорость звука и амплитуда сигналов зондирования. После достижения максимума интенсивность АЭ уменьшается практически до прежнего (до начала подъема) уровня. Однако величины скорости и амплитуды зондирующих сигналов не возвращаются на прежний уровень [7]. Аналогичные результаты в исследовании нестационарного характера акустической эмиссии получены в работе [8]. В отличие от [7] в [8] скорость и амплитуда зондирующего звукового сигнала не измерялись. Согласно [8] скорость образования трещин спонтанно увеличилась в 10–15 раз относительно фонового уровня и затем резко уменьшилась. Авторы работы [8] не дают убедительного объяснения наблюдаемому явлению. При этом они считают маловероятным, что во всем объеме нагруженного образца резко увеличилась активность образования трещин. По-видимому, это возможно лишь в некоторой области образца, оказавшейся по каким-либо причинам в особом положении. Более подробное изучение кинетики такого локального разрушения позволит выяснить причину появления форшоков и афтершоков и, возможно, некоторых предвестников землетрясений.

В работе [9] исследовано распределение гипоцентров АЭ при увеличении объемного сжатия образца из гранита. Наблюдаются три стадии процесса деформирования. На первой стадии процесса расположение гипоцентров АЭ случайное, на второй происходит объединение их в группы (кластеры), на третьей стадии, предшествующей разрушению,

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-05-64676).

гипоцентры АЭ объединены в ансамбль (нуклеация). В образцах из гранита (типа INADA) происходит группирование гипоцентров АЭ в пространственно-временные фракталы и одновременно при увеличении сжатия образца, которое заканчивается разрушением, меняется размерность фракталов d от 2,8 на второй стадии до 2,0 на третьей [9]. (В образце из гранита типа OSHIMA самоорганизации АЭ и образования фракталов не происходит.)

Чтобы объяснить явление самоорганизации акустически активных трещин, необходимо ответить на следующие вопросы: почему спонтанно увеличивается АЭ, почему и каким образом излучающие трещины группируются во фракталы?

Суть предлагаемой модели самоорганизации трещин состоит в принятии возможного механизма когерентного взаимодействия трещин посредством обмена излучаемыми ими акустическими волнами. Как известно, при раскрытии трещины излучается звуковой импульс АЭ, который несет определенную долю энергии и, дифрагируя на микротрещине, передает ей энергию, помогая раскрыться. Трещина начинает расти и излучает свой акустический импульс, взаимодействующий со следующей трещиной, и т. д. При этом наблюдается эффект лавинного образования трещин, звуковые импульсы которых когерентно складываются, обеспечивая усиление звуковой волны [7] и возникновение фрактальных структур, подобных структурам, описанным в [3].

Интенсивность I_λ звуковой волны, излучаемой трещиной, имеет вид

$$I_\lambda = \frac{1}{\tau_\lambda}\int \sigma_\lambda v_\lambda \, dt,$$

где σ_λ — напряжение в волне; v_λ — скорость колебаний частиц среды; τ_λ — длительность звукового импульса. В то же время величину I_λ можно представить в виде, принятом в физике лазеров:

$$I(x,t) = \frac{1}{\tau_\lambda}\Big(i\sum 2\pi h\omega_\lambda\Big)\exp{(ik_\lambda x)}b_\lambda.$$

Здесь $h\omega_\lambda$ — энергия звукового “кванта”; λ — индекс моды звуковых колебаний; k_λ — волновое число; b_λ — комплексная амплитуда (безразмерная величина); x — координата.

Самоорганизующиеся структуры, как правило, описываются дифференциальными уравнениями Фоккера — Планка или Гинзбурга — Ландау. Покажем, что уравнение Фоккера — Планка может быть применено в предлагаемой модели. Считаем, что в акустической модели, так же как в физике лазеров, можно выделить двухуровневую систему. На более высоком энергетическом уровне находятся микротрещины, а раскрывшиеся трещины заполняют более низкий энергетический уровень. Раскрытие трещины сопровождается дипольным излучением “кванта” энергии и переходом системы на более низкий уровень. Введем понятие инверсии заселенности ε_μ и дипольного момента трещины α_μ. При этом используем безразмерную величину $\alpha_\mu \sim l(t)/l$ ($l(t)$ — трещина, растущая до размера l). Физический смысл дипольного момента трещины состоит в том, что трещина рассматривается как излучатель типа диполя Герца, в котором дипольный момент равен произведению элемента тока на элемент длины. Величина инверсии $\varepsilon_\mu = N_0 - N$, где N_0 — количество микротрещин; N — количество раскрывшихся трещин.

Воспользуемся известным критерием Гриффитса, согласно которому скорость раскрытия трещины

$$u = \frac{dl}{dt} = B\Big(\frac{E}{\rho}\Big)^{1/2}\Big(1 - \frac{\Delta s}{\Delta w}\Big)^{1/2},$$

где B — константа; E — модуль Юнга; ρ — плотность среды; Δs — увеличение поверхностной энергии среды при росте трещины; Δw — энергия, затраченная на увеличение ее длины.

Раскрытие трещины сопровождается излучением акустической волны напряжением σ_λ:

$$\sigma_\lambda = i\rho\omega_\lambda 2\pi l_\lambda^3 u_\lambda[(ik_\lambda x - 1)/(4\pi x^2)] \exp{(ik_\lambda x)} \cos\theta_\lambda.$$

Здесь $\omega_\lambda \sim 1/\tau_\lambda$ — "частота" излучаемой волны; $\tau_\lambda = l_\lambda/u_\lambda$ — длительность процесса раскрытия трещины; x — расстояние от излучателя (трещины) до точки наблюдения; θ_λ — угол распространения волны относительно направления раскрытия трещины. Амплитуда моды $b_\lambda = \sigma_\lambda(t)/\sigma_\lambda$.

Волна, распространяясь по среде с микротрещинами, дифрагирует на одной из них и передает ей часть удельной мощности $d\sigma/dt$, которая способствует ее раскрытию и дальнейшему росту [10]:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\mu_0 u}{(2\pi x)^{1/2}}\Big(\frac{\omega}{v_s}\Big)^{1/2} \sin\frac{\theta_\lambda}{2} \exp\Big[-i\Big(\omega t + \frac{\pi}{4}\Big)\Big],$$

где μ_0 — модуль сдвига; $v_s = (\mu_0/\rho)^{1/2}$.

Увеличение размера трещины можно выразить через изменение ее дипольного момента α_μ [1]:

$$\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial t} = (-i\omega - \zeta)\alpha_\mu + \sum g_{\mu\lambda} b_\lambda \varepsilon_\mu + \Gamma_\mu(t).$$

Здесь ω — частота; ζ — ширина линии излучения (аналогичный смысл эта величина имеет в оптике), в данном случае эти величины близки; $\Gamma_\mu(t)$ — флуктуирующие силы. Если $\varepsilon_\mu = N_0 - N > 0$, происходит усиление звуковой волны, если $\varepsilon_\mu < 0$, — ее поглощение.

В напряженной среде в стационарном состоянии выполняется принцип детального равновесия (принцип обратимости на макроуровне):

$$N_0\omega_0 = N\omega, \qquad g_0\omega_0 = g\omega,$$

где $\omega_0 \sim 1/\tau_0$; τ_0 — время "залечивания" трещины (обычно $\tau_0 \gg \tau$); g, g_0 — постоянные взаимодействия волны и трещины (аналогичный смысл эти величины имеют в оптике). Отсюда следует $\omega_0 \ll \omega$, $N_0 \gg N$. Таким образом, в системе трещин наблюдается инверсия ε_μ, производная которой имеет вид

$$\frac{\partial\varepsilon_\mu}{\partial t} = \varepsilon_\mu\gamma + i\sum g_{\mu\lambda}\alpha_\mu b_\lambda + \Gamma_\mu(t),$$

где γ — величина, обратная времени релаксации инверсии к равновесию.

В напряженной среде с величиной нагрузки, близкой к разрушению, реализуется критерий разрушения Кулона — Мора. Согласно этому критерию в образце максимальные касательные напряжения действуют в плоскостях, наклоненных под углом β к оси нагружения, близким к 45°. Примем $\beta = 45° - \varphi/2$ ($\operatorname{tg}\varphi = \nu$, ν — коэффициент внутреннего трения). Величина угла β не зависит от прочности материала.

Суть адиабатического приближения [1] состоит в том, что время релаксации отдельной трещины τ_μ значительно меньше времени существования устойчивой моды системы T: $\tau_\mu \ll T$ ($\tau_\mu = l_\mu/u$, $T = L/v_p$, L — размер системы). Наличие обратной связи в системе приводит к тому, что раскрываются и растут в основном те трещины, которые догружаются напряжением $\Delta\sigma$ вследствие дифракции на них колебаний устойчивых мод. Это, в свою очередь, приводит к увеличению плотности потока звука в выделенном направлении.

"Квант" излучения звуковой волны одной трещиной можно считать малым параметром: $e = h\omega = (\sigma^2/E)l^3$ (σ — напряжение в среде). Акустический эквивалент постоянной Планка $h_a = (\sigma^2/(uE))l^4$. Примем, что на верхнем энергетическом уровне системы находятся микротрещины размером $l_0 \approx 1$ мкм, а на нижнем — раскрывшиеся трещины размером $l \approx 100$ мкм. Ограничение размера сверху вызвано тем обстоятельством, что трещины большего размера имеют тенденцию к дальнейшему росту и практически не могут “залечиваться” после раскрытия. Энергия микротрещины $e_0 = (\sigma^2/E)l_0^3$ значительно меньше энергии раскрывшейся трещины, поэтому ее можно не учитывать при оценке величины звукового “кванта”, образующегося при раскрытии трещины. Если $\sigma = 3 \cdot 10^7$ Н/м^2, $E = 10^{10}$ Н/м^2, то $e = 10^{-7}$ Дж (для трещины 100 мкм). Допустим, что скорость раскрытия трещины $u \approx 10^5$ см/с, $\tau = 10^{-7}$ с, $\omega = 10^7$ с$^{-1}$, тогда $h_a = 10^{-14}$ Дж·с. (Эта величина примерно на 20 порядков больше, чем квантовая постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.)

Возникновение трещины — случайный процесс, вероятность которого не зависит от предыстории системы. Такие процессы принято считать марковскими (пуассоновскими). Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии с параметром, находящимся в интервале $(q, q + dq)$, может быть описана интегральным уравнением Смолуховского

$$f(q, t + \Delta t) = \int f(q_0, t) g(q_0, q - q_0, \Delta t)\, dq,$$

где $g(q_0, q - q_0, \Delta t)$ — вероятность перехода системы из точки q_0 в точку q за время Δt. После стандартных преобразований этого уравнения получается одномерное уравнение Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial q}, \qquad j = \frac{d(\gamma q f)}{dq} + \frac{1}{2} Q \frac{d^2 f}{dq^2},$$

где $\eta q = K$ — коэффициент дрейфа; Q — коэффициент диффузии; η — скорость затухания волнового пакета в системе. Решение этого уравнения, как известно, соответствует наличию в системе механизма самоорганизации, суть которого состоит во взаимодействии двух явлений переноса: дрейфа и диффузии (перколяции). В предлагаемой модели имеют место оба процесса.

При решении уравнения Фоккера — Планка находятся стационарные решения, когда аргумент не зависит от времени, либо решения, зависящие от времени, но не зависящие от координаты. Рассмотрим несколько известных решений уравнения, которое впервые было предложено Фоккером и Планком в 1914 г. для описания закономерности распределения средней энергии вращающегося электрического диполя в поле излучения. Заметим, что данное уравнение в первоначальном виде предназначалось для описания физики взаимодействия частицы с излучением (полем). Впоследствии выяснилось, что оно объясняет многие явления самоорганизации в областях физики, химии, биологии, социологии [1].

Стационарное решение уравнения Фоккера — Планка для одномерного случая имеет вид [1]

$$f(q) = P \exp\left(-2V(q)/Q\right),$$

где $V(q) = -\int K(q)\, dq$ — потенциал; P — нормировочный множитель.

Полученное в [2] стационарное решение данного уравнения отличается от приведенного выше:

$$f(q) = \exp\left[F_0 - (aq + (1/2)bq)/D\right],$$

где F_0 — свободная энергия (аналог флуктуирующих сил); a — параметр обратной связи ($a = 0$ означает начало генерации); b — параметр нелинейности; D — интенсивность гауссова шума.

Для обоих решений функция плотности вероятности имеет экспоненциальный вид, причем в показателе степени имеется “силовой” параметр, характеризующий потенциал, энергию и т. п. Физический смысл решения уравнения Фоккера — Планка можно представить как зависимость вероятности появления функции с определенным потенциалом от величины этого потенциала. Чем выше потенциал, тем меньше вероятность появления этого решения.

Рассмотрим нестационарные решения. В одномерном виде решение нестационарного (зависящего от времени) уравнения Фоккера — Планка записывается следующим образом:

$$f(q,t) = (\pi a(t))^{-1/2} \exp[-(q - b/t)^2/a(t)],$$

где $a(t) = (Q/\alpha)(1 - \exp(-2\alpha t)) + a_0 \exp(-2\alpha t)$; $b(t) = b_0 \exp(-\alpha t)$. При $a \to 0$ ($a_0 = 0$) решение сводится к δ-функции. Из решения следует, что при выполнении определенных условий в диссипативной самоорганизующейся системе может возникнуть нестационарное решение, например (при соответствующей интерпретации входящих в уравнение Фоккера — Планка параметров), в виде уединенной волны. Как показано в [1], решение (в виде волны или δ-функции) при перемещении во времени и пространстве может постепенно расплываться и ослабевать или, наоборот, усиливаться и сжиматься. Полученное решение дает объяснение внезапного усиления АЭ при неизменной нагрузке на образец горной породы.

Из решения линеаризованного уравнения Фоккера — Планка следует

$$\frac{dq}{dt} = -\alpha q + \eta \Delta q + F.$$

Здесь α — внешний параметр (имеет физический смысл плотности потока).

Корреляционная функция $\langle q(x',t')q(x,t)\rangle$ для одномерного случая при $t' = t$ имеет вид $\langle q(x',t)q(x,t)\rangle = Q/(\alpha\eta)^{1/2} \exp(-(\alpha/\eta)^{1/2}|x' - x|)$. Множитель при $|x' - x|$ в показателе экспоненты имеет размерность, обратную размерности длины. Обозначим через $l_k = (\alpha/\eta)^{-1/2}$ длину корреляции. Очевидно, что $l_k \to \infty$ при $\alpha \to 0$ и, наоборот, при увеличении плотности потока длина корреляции уменьшается.

Параметр $d = (\alpha/\gamma)^{1/2} l_k$ представляет собой размерность фрактала (кластера). В [9] d меняется от 2,8 до 2,2. Согласно оценке экспериментальных данных [9] $l_k \approx 1$ см. Плотность потока импульсов акустической эмиссии $\alpha \approx 10 \div 100$ см$^{-2} \cdot$ с$^{-1}$, следовательно, $\eta \approx 1 \div 10$ с$^{-1}$. На основе имеющихся экспериментальных данных параметр η оценить невозможно, поэтому трудно сказать, насколько полученная выше оценка соответствует реальной величине. (Напомним, что параметр η характеризует затухание акустической волны.)

Полученное решение уравнения Фоккера — Планка указывает на возможность образования фрактальной структуры излучающих трещин. Заметим, что в эксперименте [9] обнаружено явление пространственной кластеризации трещин, которые "стягивались" из всего объема образца в некоторую плоскость, расположенную под углом примерно 45° к оси нагрузки на образец.

Самоорганизация в диссипативных (неконсервативных) многопараметрических структурах — весьма распространенный процесс, проявляющийся в степенной зависимости вероятности возникновения того или иного события от его параметра. Для таких явлений, как землетрясения, вспышки на Солнце, космические лучи, этим параметром может быть энергия. Таким параметром является также частота образования трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хакен Г.** Синергетика. М.: Мир, 1980.
2. **Климонтович Ю. Л.** Уменьшение энтропии в процессе самоорганизации. S-теорема (на примере перехода через порог генерации) // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9, № 23. С. 1412–1416.

3. **Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.** Self-organized criticality: as explanation of $1/f$ noise // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59, N 4. P. 381–384.
4. **Brown S. R., Scholz C. H., Rundle J. B.** A simplified spring-block model of earthquakes // Geophys. Res. Lett. 1991. V. 18, N 2. P. 215–218.
5. **Olami Z., Feder H. J. S., Christensen K.** Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68, N 8. P. 1244–1247.
6. **Nielsen S., Knopoff L., Tarantola A.** Model of earthquake recurrence: role of elastic wave radiation, relaxation of friction, and inhomogeneity // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, N B7. P. 12.423–12.430.
7. **Ishido T., Nishizawa O.** Effect of zeta potential on microcrack growth in rock under relatively low uniaxial compression // J. Geophys. Res. 1984. V. 89, N B6. P. 4153–4159.
8. **Журков С. Н., Куксенко В. С., Петров В. А. и др.** Концентрационный критерий объемного разрушения твердых тел // Физические процессы в очагах землетрясений: Сб. науч. тр. М.: Наука, 1980. С. 78–85.
9. **Lei X., Nishizawa O., Kuzunose K., Satoh T.** Fractal structure of the hypocenter distributions and focal mechanism solutions of acoustic emission in two granites of different grain sizes // Phys. Earth. 1992. V. 40. P. 617–634.
10. **Си Г., Либовиц Г.** Разрушение. Т. 2: Математическая теория хрупкого разрушения / Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. С. 83–203.

Поступила в редакцию 14/IV 2000 г.,
в окончательном варианте — 4/XI 2000 г.