

УДК 539.374

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОГО ПОЛОГО ДИСКА ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

С. Е. Александров, Е. А. Лямина

Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, 119526 Москва
E-mail: sergei_alexandrov@yahoo.com

Рассматривается предельное пластическое состояние тонкого полого осесимметричного диска, подвергнутого термомеханическому нагружению при однородном распределении давления на внутреннем контуре и температуры, увеличивающихся в процессе деформирования. Получено полуаналитическое решение поставленной краевой задачи. Исследуются качественные особенности поведения решения при потере диском несущей способности.

Ключевые слова: тонкий диск, температура, предельное состояние, полуаналитическое решение.

Введение. Определению предельного пластического состояния тонких пластин и дисков, подвергнутых нагружению различного вида, посвящено большое количество работ (см., например, [1–6]). Однако в этих работах рассматривается один параметр нагружения. Предельное пластическое равновесие конструкций при воздействии нескольких параметров нагружения изучено в [7]. В работах [8–13] исследовалось термическое нагружение тонких дисков с наложенными на них связями различного типа. Одни из первых решений для жестко- и упругопластических пластин с круглым отверстием при воздействии давления по контуру этого отверстия получены в [14, 15]. Достаточно полный обзор таких решений приведен в работе [16]. В настоящей работе получено полуаналитическое решение (численные методы требуются только для нахождения корней некоторых трансцендентных уравнений) для предельного состояния полого диска при одновременном действии двух типов нагружения: температурного поля и давления на внутреннем контуре. Показано, что решение обладает рядом качественных особенностей, которые необходимо учитывать при численном моделировании более сложных конструкций, работающих в условиях плосконапряженного состояния. Заметим, что при проведении численных расчетов поведения упругопластических конструкций в плосконапряженном состоянии возникают определенные трудности, характерные для такого состояния [17], поэтому полученное решение может быть использовано для тестирования численных программ.

Постановка задачи. Рассматривается тонкий полый осесимметричный диск с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом R_0 . Толщина диска постоянна, температура диска равна температуре окружающей среды, которая равномерно увеличивается от некоторого начального значения, когда напряжения в диске отсутствуют. Разность между теку-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-93001-Вьет.а).

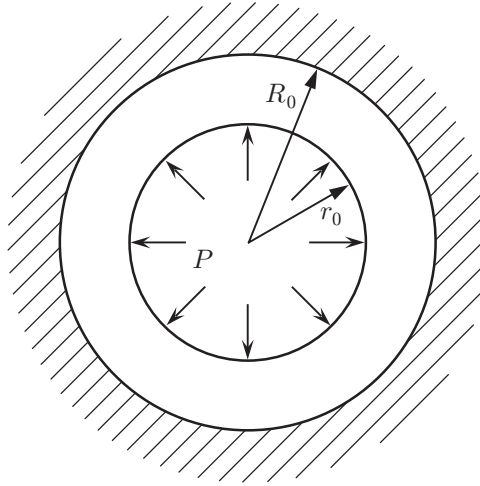


Рис. 1. Схема нагружения деформируемого диска

щим и начальным значениями температуры обозначим через T . По внутреннему контуру диск нагружен равномерно увеличивающимся давлением P , причем при $T = 0$ $P = 0$, т. е. в принятых условиях $P \geq 0$, $T \geq 0$. Внешний радиус диска фиксирован. Схема нагружения диска приведена на рис. 1. Деформации полагаются малыми, принимаются условия плосконапряженного состояния. Материал диска является идеальным упругопластическим, в частности, в упругой области справедливы классические уравнения линейной термоупругости. В пластической области принимается условие текучести Мизеса. Для определения предельного пластического состояния не требуется определять зависимости напряжений от деформаций или скоростей деформаций в пластической области.

Введем цилиндрическую систему координат $r\theta z$, ось z которой совпадает с осью симметрии диска. Из постановки краевой задачи следует, что решение не зависит от величины угла θ , а напряжения σ_r , σ_θ , σ_z в выбранной системе координат являются главными напряжениями, причем $\sigma_z = 0$. В этом случае критерий текучести Мизеса принимает вид

$$3(s_r^2 + \sigma^2 - \sigma s_r) = \sigma_0^2, \quad (1)$$

где σ_0 — предел текучести при одноосном растяжении (постоянная величина); $\sigma = (\sigma_r + \sigma_\theta)/3$; $s_r = \sigma_r - \sigma$. Обозначив компоненты девиатора тензора напряжений через $s_\theta = \sigma_\theta - \sigma$, $s_z = \sigma_z - \sigma$ и введя безразмерные величины

$$p = \frac{P}{\sigma_0}, \quad \rho = \frac{r}{R_0}, \quad \rho_0 = \frac{r_0}{R_0}, \quad \tau = \frac{\alpha T E}{\sigma_0}, \quad u = \frac{u_r}{R_0}, \quad k = \frac{\sigma_0}{E} \quad (2)$$

(u_r — радиальное перемещение; α — линейный коэффициент температурного расширения; E — модуль Юнга), краевые условия запишем в виде

$$\rho = \rho_0: \quad \sigma_r = -p\sigma_0; \quad (3)$$

$$\rho = 1: \quad u = 0. \quad (4)$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (5)$$

Решение задачи. С учетом (2) общее осесимметричное решение уравнений линейной термоупругости в условиях плосконапряженного состояния представим следующим образом:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{A}{\rho^2} + B, \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = -\frac{A}{\rho^2} + B, \quad k^{-1}u = (1 - \nu)B\rho - (1 + \nu)\frac{A}{\rho} + \tau\rho. \quad (6)$$

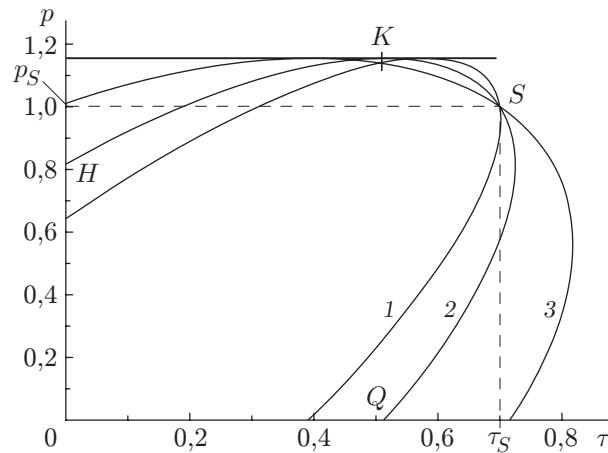


Рис. 2. Предельные диаграммы, характеризующие возникновение пластической деформации в диске при различных значениях ρ_0 :

1 — $\rho_0 = 0,25$, 2 — $\rho_0 = 0,5$, 3 — $\rho_0 = 0,75$

Здесь ν — коэффициент Пуассона; A , B — постоянные интегрирования. В начале процесса деформирования весь диск находится в упругом состоянии. В этом случае из (3), (4), (6) следует

$$A = A_e = \frac{\rho_0^2[\tau - p(1 - \nu)]}{\rho_0^2(1 + \nu) + 1 - \nu}, \quad B = B_e = -\frac{(1 + \nu)p\rho_0^2 + \tau}{(1 + \nu)\rho_0^2 + 1 - \nu}. \quad (7)$$

Подставляя решение для напряжений (6) при $\rho = \rho_0$, $A = A_e$, $B = B_e$ в критерий текучести (1), получаем условие перехода материала на внутреннем радиусе диска в пластическое состояние:

$$B_e^2 + 3A_e^2/\rho_0^4 = 1. \quad (8)$$

Исключая из (8) величины A_e и B_e с помощью (7), находим соотношение между p и τ , соответствующее началу пластической деформации:

$$[\rho_0^4(1 + \nu)^2 + 3(1 - \nu)^2]p^2 + 4\tau^2 + 2[\rho_0^2(1 + \nu) - 3(1 - \nu)]p\tau = [\rho_0^2(1 + \nu) + 1 - \nu]^2. \quad (9)$$

Рассматривая τ и p в качестве декартовых координат, соотношение (9) можно интерпретировать как часть эллипса, расположенную в первом квадранте. В этих координатах при $\nu = 0,3$ соотношение (9) позволяет получить предельные диаграммы, представленные на рис. 2. В случае если параметры нагружения соответствуют точке вне эллипса, необходимо рассматривать упругопластический диск. Пусть $r = r_c$ (или $\rho = \rho_c = r_c/R_0$) — уравнение упругопластической границы. Пластические деформации возникают в области $\rho_0 \leq \rho < \rho_c$, в которой выполняется условие текучести (1). Это условие выполняется для напряжений

$$\frac{s_r}{\sigma_0} = \frac{\cos \gamma - \sqrt{3} \sin \gamma}{3}, \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = -\frac{\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma}{3} \quad (10)$$

(γ — новая неизвестная функция). Учитывая, что $s_r + s_\theta + s_z \equiv 0$, $s_z = -\sigma$ при $\sigma_z = 0$, из уравнений (10) получаем

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \gamma, \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = -\frac{\sin \gamma + \sqrt{3} \cos \gamma}{\sqrt{3}}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (5), с учетом (2) находим

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2 \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{3} \cos \gamma - \sin \gamma}. \quad (12)$$

В предположении, что при $\rho = \rho_0$ $\gamma = \gamma_0$, решение уравнения (12) принимает вид

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{\sqrt{3} \cos \gamma_0 - \sin \gamma_0}{\sqrt{3} \cos \gamma - \sin \gamma} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (\gamma - \gamma_0) \right]. \quad (13)$$

Из соотношений (3), (11) получаем

$$\sin \gamma_0 = \sqrt{3} p/2. \quad (14)$$

Поскольку $|\sin \gamma_0| \leq 1$, из уравнения (14) находим максимально возможное значение $p = p_{\max}$:

$$p_{\max} = 2/\sqrt{3}. \quad (15)$$

Кривые на рис. 2 имеют точку максимума при некотором значении τ . Очевидно, что в таких точках $dp/d\tau = 0$. Дифференцируя уравнения (9) по τ , полагая, что p — функция τ и $dp/d\tau = 0$, для p и τ в точках максимума получаем следующее соотношение:

$$4\tau = p[3(1 - \nu) - \rho_0^2(1 + \nu)]. \quad (16)$$

Исключая с помощью уравнения (16) параметр τ из (9), находим, что в точках максимума $p = p_{\max}$. Используя равенство (15), из выражения (16) определим значение τ в этих точках:

$$\tau_{cr} = [3(1 - \nu) - \rho_0^2(1 + \nu)]/(2\sqrt{3}). \quad (17)$$

Имеется два различных корня уравнения (14). Для определения единственного решения рассмотрим начало процесса пластического деформирования. В этом случае упругопластическая граница совпадает с внутренним радиусом диска. Положим, что в этот момент времени $\gamma_0 = \gamma_i$. Поскольку на упругопластической границе напряжения непрерывны, из выражений (6), (11) для окружного напряжения получаем

$$A_e/\rho_0^2 - B_e = (\sin \gamma_i + \sqrt{3} \cos \gamma_i)/\sqrt{3}. \quad (18)$$

Выражая с помощью соотношения (14) $\sin \gamma_i$ через p , уравнение (18) запишем в виде

$$\cos \gamma_i = A_e/\rho_0^2 - B_e - p/2. \quad (19)$$

Используя соотношения (7), величины A_e , B_e необходимо исключить из уравнения (19). В случае $p = p_{\max}$ величина τ определяется из выражения (17). Тогда, подставляя A_e , B_e в (19), получаем $\cos \gamma_i = 0$. В остальных случаях знак $\cos \gamma_i$ определяется из уравнения (19). В качестве примера рассмотрим кривую 2 на рис. 2. Видно, что в точке K $\cos \gamma_i = 0$. На участке кривой HK выполняется условие $\cos \gamma_i < 0$, на участке KQ — условие $\cos \gamma_i > 0$. В частности, в точке Q $\cos \gamma_i = 1$. Аналогично можно рассмотреть кривую при любом значении ρ_0 . Зная знак $\cos \gamma_i$ и учитывая принятое условие нагружения $p \geq 0$, находим единственный корень уравнения (14) в начале процесса пластического деформирования, зависящий от значений τ и p , при которых возникает пластическая зона. Дифференцируя уравнение (14) по параметру p , получаем

$$\cos \gamma_0 \frac{d\gamma_0}{dp} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (20)$$

В предположении, что величина p возрастает и в момент начала пластического деформирования $\cos \gamma_i < 0$ (т. е. $\pi/2 < \gamma_i < \pi$), из уравнения (20) следует, что на начальной стадии

процесса пластического деформирования угол γ_0 уменьшается. В случае если в момент начала пластического деформирования $\cos \gamma_i > 0$ (т. е. $0 < \gamma_i < \pi/2$), из уравнения (20) следует, что на начальной стадии процесса пластического деформирования угол γ_0 увеличивается. Таким образом, в любом случае величина угла γ_0 приближается к значению $\pi/2$. Поэтому представляет интерес исследовать поведение решения уравнения (12) вблизи точки $\gamma = \pi/2$.

Пусть $\rho = \rho_\gamma$ при $\gamma = \pi/2$. Так как при $\gamma \rightarrow \pi/2$

$$\frac{2 \cos \gamma}{\sqrt{3} \cos \gamma - \sin \gamma} = -2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) + o \left[\frac{\pi}{2} - \gamma \right],$$

то с учетом краевого условия $\rho = \rho_\gamma$ при $\gamma = \pi/2$ из (12) находим

$$\frac{\rho}{\rho_\gamma} = 1 + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right)^2 + o \left[\left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right)^2 \right], \quad \gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что величина ρ достигает минимума при $\gamma = \pi/2$. Это возможно только в случае $\rho_\gamma = \rho_0$. Следовательно, во всей пластической зоне в течение всего процесса пластического деформирования величина угла γ включая его значение γ_0 должна находиться либо в диапазоне $\gamma \leq \pi/2$, либо в диапазоне $\gamma \geq \pi/2$. Таким образом, существование единственного решения уравнения (14) в момент начала пластического течения определяет его единственное решение вплоть до наступления предельного пластического состояния.

Уравнение (12) имеет особое решение

$$\gamma = \gamma_S = \pi/3. \quad (21)$$

В этом особом случае напряжения не зависят от радиуса, а из выражений (14), (21) следует, что $p = p_S = 1$. Подставляя это значение p в (9), получаем квадратное уравнение для τ , одно из решений которого не зависит от ρ_0 и имеет вид $\tau = \tau_S = 1 - \nu$. Таким образом, все кривые, определяемые уравнением (9), пересекаются в одной точке S , в которой $p = p_S$, $\tau = \tau_S$ (см. рис. 2). Анализ кривой 2, а также ранее выполненный анализ с учетом формулы (21) показывают, что на части кривой KS

$$\pi/3 \leq \gamma_i \leq \pi/2, \quad (22)$$

на части кривой SQ

$$0 \leq \gamma_i \leq \pi/3, \quad (23)$$

на части кривой KH

$$\gamma_i \geq \pi/2. \quad (24)$$

Предельное пластическое состояние. Один из вариантов достижения предельного пластического состояния заключается в выполнении условия текучести (1) в области $\rho_0 \leq \rho \leq 1$. В этом случае во всей указанной области выполняется уравнение (12), а в общем случае при $\gamma \neq \gamma_S$ — его решение в виде (13). Если в пространстве $p\tau$ путь нагружения достигает точки S (см. рис. 2), то при этих параметрах нагружения весь диск мгновенно становится пластическим независимо от значения ρ_0 . Решение уравнения (12) имеет вид (21).

Рассмотрим общий случай $\gamma_i \neq \gamma_S$. Пусть γ_m — значение γ при $\rho = 1$. Тогда из (13) получаем

$$\frac{1}{\rho_0} = \left(\frac{\sqrt{3} \cos \gamma_0 - \sin \gamma_0}{\sqrt{3} \cos \gamma_m - \sin \gamma_m} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (\gamma_m - \gamma_0) \right]. \quad (25)$$

В рассматриваемых условиях достижения предельного состояния упругопластическая граница совпадает с внешним радиусом диска, т. е.

$$\rho_c = 1. \quad (26)$$

На упругопластической границе напряжения σ_r , σ_θ непрерывны. В упругой области имеет силу решение (6), однако теперь величины A и B не определяются из соотношения (7). Тогда из (11) и условия непрерывности напряжений следует

$$\frac{A}{\rho_c^2} + B = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \gamma_c, \quad -\frac{A}{\rho_c^2} + B = -\frac{\sin \gamma_c + \sqrt{3} \cos \gamma_c}{\sqrt{3}} \quad (27)$$

(γ_c — значение γ при $\rho = \rho_c$). Из решения (6) для радиального перемещения и краевого условия (4) получаем

$$(1 - \nu)B - (1 + \nu)A + \tau = 0. \quad (28)$$

Выражая величины A и B через γ_c и ρ_c с помощью (27) и подставляя их в (28), находим

$$(1 - \nu)(\cos \gamma_c + \sqrt{3} \sin \gamma_c) + (1 + \nu)(\sqrt{3} \cos \gamma_c - \sin \gamma_c)\rho_c^2/\sqrt{3} - 2\tau = 0. \quad (29)$$

В предельном состоянии выполняются условие (26) и условие $\gamma_c = \gamma_m$. Поэтому уравнение (29) принимает вид

$$\sqrt{3} \cos \gamma_m + (1 - 2\nu) \sin \gamma_m = \sqrt{3} \tau_m, \quad (30)$$

где τ_m — значение τ в предельном состоянии. Если в этом состоянии $p = p_m$, то из уравнения (14), в котором необходимо положить $p = p_m$, и уравнений (25), (30) можно найти зависимость между τ_m и p_m . Однако уравнение (25) может не иметь решения. Действительно, максимально допустимое значение p определяется из соотношения (15) независимо от остальных условий процесса. При этом значении p из (14) следует $\sin \gamma_0 = 1$, $\cos \gamma_0 = 0$, $\gamma_0 = \pi/2$. Соответствующее значение γ_m обозначим через γ_p . В этом случае уравнение (25) преобразуется к виду

$$\rho_0 = (\sin \gamma_p - \sqrt{3} \cos \gamma_p)^{1/2} \exp[\sqrt{3}(\pi/2 - \gamma_p)/2]. \quad (31)$$

Численное решение уравнения (31) определяет зависимость γ_p от ρ_0 . Подставляя это значение γ_p в выражение (30), находим соответствующее значение τ_m , которое обозначим через τ_p . Зависимость $\tau_p(\gamma_p)$ и равенство (31) определяют функцию $\tau_p(\rho_0)$ в параметрическом виде. Характерная форма кривой зависимости $\tau_p(\rho_0)$, представляющей собой границу области существования решения уравнения (25) в соответствующем параметрическом пространстве, показана на рис. 3. Видно, что функция $\rho_0(\tau_p)$ достигает максимума при некотором значении τ_p (точка Q на рис. 3). Используя уравнения (30), (31) и проведя непосредственные вычисления, находим, что максимального значения функция ρ_0 может достигнуть при $\gamma_p = \pi/2$. Поскольку при этом $\rho_0 = 1$, $\tau_p = \tau_q = (1 - 2\nu)/\sqrt{3}$, максимум фактически никогда не достигается, так как в данном случае диск в плоскости $z = 0$ вырождается в окружность. Представляет интерес точка пересечения кривой $\tau_p(\rho_0)$ с осью ρ_0 (точка H на рис. 3). В этой точке значение γ_p определяется из соотношения (30) при $\tau_m = 0$. Тогда имеем

$$\gamma_H = \pi - \operatorname{arctg}(\sqrt{3}/(1 - 2\nu)).$$

Полагая в (31) $\gamma_p = \gamma_H$, можно найти соответствующее значение $\rho_0 = \rho_H$. Для реальных значений ν значение ρ_H достаточно близко к единице. В частности, при $0,25 \leq \nu \leq 0,50$ $0,94 \leq \rho_H \leq 1,00$. Заметим, что на рис. 2 все кривые получены при $\rho_0 \leq \rho_H$. При выполнении этого неравенства необходимо рассмотреть только участок SK кривой на рис. 3.

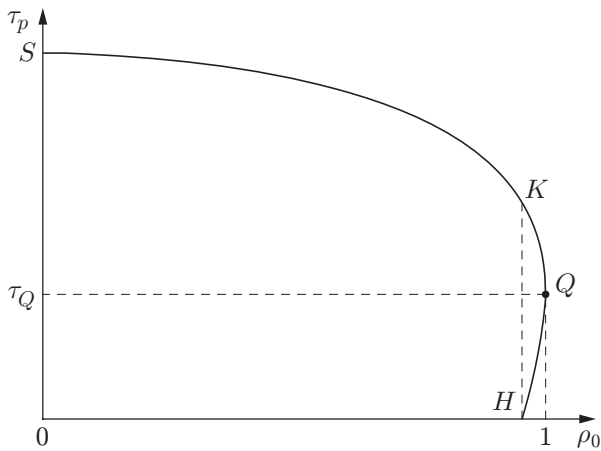


Рис. 3

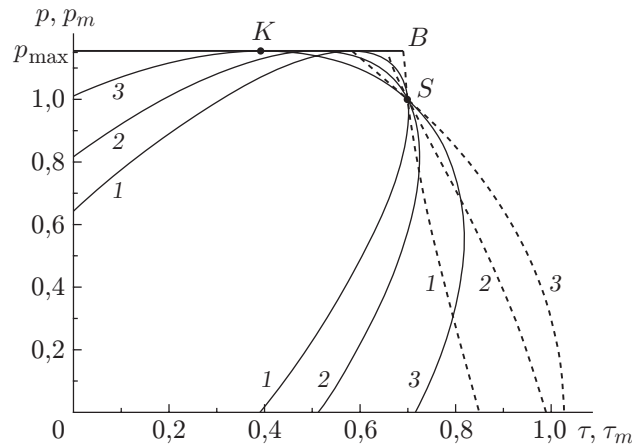


Рис. 4

Рис. 3. Область существования в параметрическом пространстве решения уравнения (25)

Рис. 4. Предельные диаграммы, характеризующие условия перехода всего диска в пластическое состояние, при различных значениях ρ_0 :

1 — $\rho_0 = 0,25$, 2 — $\rho_0 = 0,5$, 3 — $\rho_0 = 0,75$; сплошные линии — $p(\tau)$, штриховые — $p_m(\tau_m)$

В данном случае τ_p является минимальным значением τ_m , при котором решение уравнения (25) существует. При этом начало пластического деформирования соответствует точкам участка кривой KQ на рис. 2 (или аналогичной кривой для другого значения ρ_0). При $\tau_p < \tau_m$ решение уравнений (14), (25), (30) можно получить численно, определяя зависимость $p_m(\tau_m)$. Однако при построении численного решения следует учитывать, что данному участку кривой принадлежит точка S (см. рис. 2), соответствующая особому решению (21). Фактически численные решения получены отдельно для участка кривой KS путем исключения конечных точек с использованием уравнения (22) и для участка SQ путем исключения точки S с использованием (23). Аналогично получены решения для других значений ρ_0 . На рис. 4 показаны предельные диаграммы, характеризующие условия перехода диска в пластическое состояние.

Типичное поведение кривых вблизи характерных точек рассмотрим на примере кривых 3 на рис. 4. Как и все кривые, кривые 3 проходят через точку S . В точке K сплошная кривая 3, соответствующая началу пластического деформирования, касается прямой $p = p_{\max}$. В случае выполнения равенства (22) весь диск может стать пластическим при условии, что параметры нагружения соответствуют кривой BS . В случае если выполняется равенство (23), диск может стать полностью пластическим при условии, что параметры нагружения соответствуют зависимости, показанной на рис. 4 штриховой линией, расположенной ниже точки S .

При $\rho_H < \rho_0 < 1$ имеется два значения τ_p при некотором значении ρ_0 (участок KH кривой на рис. 3). Несмотря на то что данный случай не представляет практического интереса, поскольку $\rho_H \approx 1$, соответствующее решение приведено ниже. Участок кривой KQ (см. рис. 3) является продолжением кривой SK , следовательно, τ_p является минимальным значением τ_m , при котором существует решение уравнения (25). На участке кривой QH величина τ_p является максимальным значением τ_m , при котором существует решение уравнения (25). При этом начало пластического деформирования соответствует точкам участка кривой KH на рис. 2 (или аналогичной кривой для другого значения ρ_0).

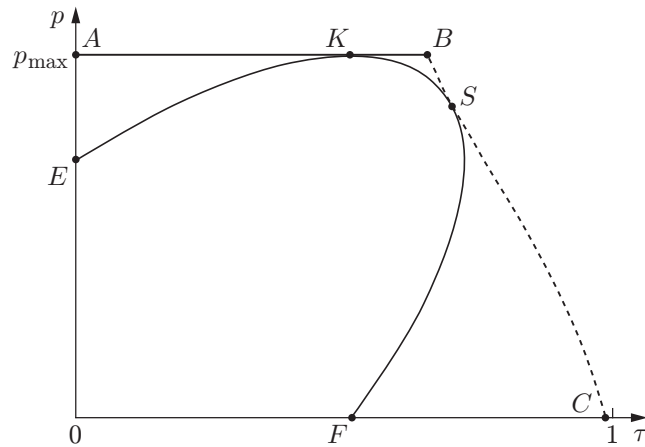


Рис. 5. Общий вид предельных диаграмм, характеризующих условия перехода всего диска в пластическое состояние

При $\tau_p > \tau_m$ решение уравнений (14), (25), (30) можно получить численно, определяя зависимость $p_m(\tau_m)$. В отличие от случая $\rho_0 \leq \rho_H$ в данном случае условие перехода всего диска в пластическое состояние может выполняться, если начало пластического деформирования соответствует участку кривой KH (см. рис. 2). Таким образом, между этой кривой и прямой $p = p_{\max}$ появляется кривая, соответствующая переходу всего диска в пластическое состояние. Однако вследствие того что $\rho_0 \approx 1$, кривые, соответствующие началу пластического деформирования и переходу всего диска в пластическое состояние, практически совпадают.

Анализ общей структуры решения в предельном состоянии. Обобщим полученные результаты, ограничиваясь практически важным случаем $\rho_0 \leq \rho_H$ (рис. 5). Область, ограниченная кривой $EKSF$ и осями координат, соответствует упругому состоянию диска. Области AKE , KBS и FSC соответствуют упругопластическому состоянию диска. Предельное пластическое состояние диска определяется кусочно-гладкой кривой $ABSC$, различные участки которой соответствуют разным физическим механизмам потери несущей способности диска. В частности, если в параметрическом пространстве путь нагружения достигает кривой BSC , то весь диск переходит в пластическое состояние. Если же путь нагружения достигает прямой линии AB , то вблизи внутреннего радиуса диска возникает зона локализованной деформации. Возможность возникновения такой зоны при нагружении отверстия в тонкой пластине давлением отмечается в работе [14]. Так как, в случае если напряженное состояние соответствует линии AB , $\gamma_0 = \pi/2$, то из (11), (12) следует, что при приближении к кромке отверстия $|\partial\sigma_\theta/\partial\rho| \rightarrow \infty$. В общем случае, при потере несущей способности, выражающейся в локализации деформации вблизи контура отверстия, в диске имеются пластическая и упругая зоны конечного размера. Исключения составляют специальные пути нагружения, приводящие к потере несущей способности в точках K , B , S параметрического пространства. В точке B указанные варианты потери несущей способности реализуются одновременно (т. е. весь диск становится пластическим и деформация локализуется на внутреннем радиусе диска). Представляет интерес случай потери несущей способности в точке K . При этом пластическая деформация локализуется на внутреннем радиусе диска, в то время как весь диск, за исключением поверхности $\rho = \rho_0$, находится в упругом состоянии. Особенность механизма потери несущей способности в точке S заключается в том, что пластическое состояние возникает одновременно во всем диске независимо от его геометрических параметров. Ограничиваясь путями нагру-

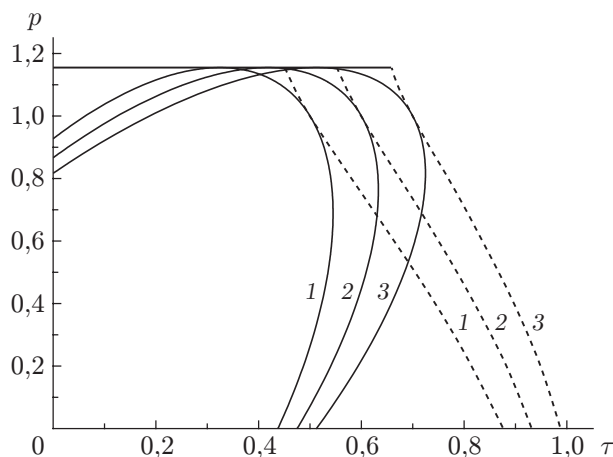


Рис. 6. Зависимость параметра, характеризующего предельное пластическое состояние диска, от величины τ при $\rho_0 = 0,5$ и различных значениях коэффициента Пуассона:

1 — $\nu = 0,3$, 2 — $\nu = 0,4$, 3 — $\nu = 0,5$; сплошные линии — начало пластического деформирования, штриховые — предельное пластическое состояние

жения, при которых радиус упругопластической границы всегда увеличивается, можно отметить, что, если начало пластического деформирования происходит в точках кривой KE , единственно возможным механизмом потери несущей способности является локализация деформации на внутреннем радиусе диска. Если пластическое деформирование начинается в точках кривой SF , единственно возможным механизмом потери несущей способности является переход всего диска в пластическое состояние. При возникновении пластической деформации на линии KS , за исключением концевых точек, возможны оба варианта потери несущей способности. Какой механизм потери несущей способности возникает в конкретном случае, зависит от пути нагружения в области KBS .

Описанная выше структура решения для предельного пластического состояния диска, характерная для некоторого класса конструкций, такова, что может вызвать определенные затруднения при численном решении соответствующих краевых задач, не имеющих аналитического решения. Полученное решение может быть использовано при разработке эффективных численных алгоритмов, учитывающих найденные качественные особенности решения.

Следует отметить, что в предложенном решении предельная нагрузка отличается от классического определения этого состояния. В частности, классическая предельная пластическая нагрузка не зависит от упругих свойств материала и может вычисляться с использованием жесткопластической, а не упругопластической модели материала [18]. На рис. 6 показаны зависимости $p(\tau)$, соответствующие началу пластического деформирования (сплошные линии) и предельному пластическому состоянию (штриховые линии), при $\rho_0 = 0,5$ и различных значениях коэффициента Пуассона. Очевидно, что предельное состояние зависит от значения ν .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lenard J., Haddow J. B.** Plastic collapse speeds for rotating cylinders // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. P. 285–292.
2. **Güven U.** The fully plastic rotating solid disk of variable thickness // Z. angew. Math. Mech. 1994. Bd 74. S. 61–65.

3. **Ma G., Iwasaki S., Miyamoto Y., Deto H.** Plastic limit analysis of circular plates with respect to the unified yield criterion // Intern. J. Mech. Sci. 1998. V. 40. P. 963–976.
4. **Ma G., Hao H., Miyamoto Y.** Limit angular velocity of rotating disc with unified yield criterion // Intern. J. Mech. Sci. 2001. V. 43. P. 1137–1153.
5. **Debski R., Zyczowski M.** On decohesive carrying capacity of variable-thickness annular perfectly plastic disks // Z. angew. Math. Mech. 2002. Bd 82. S. 655–669.
6. **Александров С. Е., Ломакин Е. В., Дзенг Й.-Р.** Влияние зависимости условия текучести от среднего напряжения на распределение напряжений во вращающемся диске // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 5. С. 610–612.
7. **Hodge P. G. (Jr.), Sun C.-K.** General properties of yield-point load surfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1968. V. 35, N 1. P. 107–110.
8. **Lippmann H.** The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit // Intern. J. Plast. 1992. V. 8. P. 567–582.
9. **Mark W.** Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. V. 63. P. 42–50.
10. **Bengeri M., Mark W.** The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // Acta Mech. 1994. V. 103. P. 243–257.
11. **Mark W., Bengeri M.** Thermal assembly of an elastic-plastic shrink fit with solid inclusion // Intern. J. Mech. Sci. 1994. V. 36. P. 699–705.
12. **Александров С. Е., Чиканова Н. Н.** Упругопластическое напряженно-деформированное состояние в пластине с запрессованным включением под действием температурного поля // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 4. С. 149–158.
13. **Alexandrov S., Alexandrova N.** Thermal effects on the development of plastic zones in thin axisymmetric plates // J. Strain Analysis Engng Design. 2001. V. 36, N 2. P. 169–176.
14. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
15. **Hsu Y. C., Forman R. G.** Elastic-plastic analysis of an infinite sheet having a circular hole under pressure // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1975. V. 42, N 2. P. 347–352.
16. **Masri R., Cohen T., Durban D.** Enlargement of a circular hole in a thin plastic sheet: Taylor — Bethe controversy in retrospect // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2010. V. 63, N 4. P. 589–616.
17. **Kleiber M., Kowalczyk P.** Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1996. V. 137. P. 395–409.
18. **Drucker D. C., Prager W., Greenberg N. J.** Extended limit design theorems for continuous media // Quart. Appl. Math. 1952. V. 9. P. 381–389.

Поступила в редакцию 10/II 2012 г.