

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГЕОФИЗИКА

УДК 550.834 : 534.24

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ОТРАЖЕНИЯ–ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВМЕСТО
КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ–ПРЕЛОМЛЕНИЯ — ВОЗМОЖНАЯ ПЕРСПЕКТИВА
ПОВЫШЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ**

А.М. Айзенберг, К.Д. Клем-Мусатов, М.А. Айзенберг*, Х.Б. Хелле, Я. Пейчел****

Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Конюга, 3, Россия

** Norwegian University of Science and Technology, Department of Petroleum Engineering
and Applied Geophysics, S.P. Andersensvei 15A, NO-7491 Trondheim, Norway*

*** Norsk Hydro, O&E Research Centre, N-5020, Bergen Norway*

Одно из следствий теории рассеяния волн криволинейными границами в многослойных неоднородных средах, полученных нами в предыдущих работах, заключается в способе учета граничных условий с помощью интегральных операторов отражения и преломления. В связи с этим практический интерес представляет исследование перспектив использования таких операторов вместо коэффициентов отражения и преломления плоских волн для описания высокочастотных волновых полей поверхностными сингулярными интегралами типа Кирхгофа, которые широко используются в прямых и обратных задачах сейсмологии. Приводятся результаты численных экспериментов по сравнению двух способов учета граничных условий (интегральный оператор отражения и коэффициент отражения) для случая однократного рассеяния сферической волны криволинейной границей. Показано, что использование интегрального оператора отражения позволяет устранять помехи, возникающие при учете граничных условий с помощью коэффициента отражения, и воспроизводить головные волны.

Метод наложения концевых волн, интегральный оператор отражения, коэффициент отражения, головные волны.

**INTEGRAL REFLECTION-TRANSMISSION OPERATORS INSTEAD OF REFLECTION-TRANSMISSION
COEFFICIENT: A POSSIBILITY TO IMPROVE THE RESOLUTION OF SEISMIC EXPLORATION**

A.M. Aizenberg, K.D. Klem-Musatov, M.A. Aizenberg, H.B. Helle, and J. Pajchel

The use of integral reflection and transmission operators to account for boundary conditions follows from the theory of wave scattering at curved interfaces in layered inhomogeneous media obtained in our previous studies. In this respect it appears practical to investigate the possibility of applying these operators instead of plane-wave reflection and transmission coefficients to describe high-frequency wavefields by Kirchhoff-type surface singular integrals common in forward and inverse seismic problems. We compare the integral reflection operator and reflection coefficient approaches in numerical experiments for single scattering of a spherical wave at a curved interface. We show that the use of the integral reflection operator allow eliminating artefacts associated with the use of the reflection coefficient and including head waves.

Tip wave superposition method, integral reflection operator, reflection coefficient, head waves

Одно из направлений развития методов решения прямых и обратных задач сейсмологии, основанных на использовании поверхностных сингулярных интегралов типа Кирхгофа, связано со способом учета граничных условий на контакте соприкасающихся сред. Библиографию по этой проблеме можно найти в работах [1—11]. Формирование этого направления сопряжено с преодолением определенных трудностей, обусловленных недостаточным развитием теории волн в сложнопостроенных средах. Так, в современных алгоритмах автоматической интерпретации сейсмических данных условия на границах раздела сред, фактически, учитываются коэффициентами отражения и преломления плоских волн, что не имеет достаточного теоретического обоснования. Как это было замечено еще в работах [4, 5], такой способ учета граничных условий порождает помехи в форме кажущихся дифрагированных волн, излучаемых точками отражения критических лучей. Для двумерной многослойной среды с криволинейными границами и постоянными скоростями распространения волн в слоях в работах [6, 11] был предложен эвристический прием подавления таких помех путем замены коэффициентов отражения или преломления оператором, содержащим указанные коэффициенты под знаком интеграла Фурье по пространственным частотам. Однако оставалось неясным, можно ли обобщить подобный прием на случай трехмерных неоднородных сред.

Для ответа на этот вопрос нужно знать явное аналитическое представление решения задачи об отражении и преломлении волн на криволинейных границах между неоднородными средами в терминах поверхностных интегралов, которое до недавнего времени не было известно. Такое представление получено нами в работах [12—15], где разделение волнового поля на последовательность отдельных отражений–преломлений возникает автоматически за счет адекватного представления системы граничных интегральных уравнений соответствующей динамической задачи. В этом представлении граничные условия учитываются специальными интегральными операторами отражения–преломления K , которые представляют собой произведение операторов прямого \mathfrak{R} и обратного \mathfrak{R}^{-1} пространственного преобразования Фурье следов падающей волны и ее нормальной производной на отдельной границе раздела сред. Под знаком обратного пространственного преобразования Фурье $K = \mathfrak{R}^{-1}k\mathfrak{R}$ содержится промежуточный весовой коэффициент k , который как функция пространственных частот подобен соответствующему коэффициенту отражения или преломления плоских волн и совпадает с последним в случае плоской границы. Цель настоящей статьи — показать на простейших численных примерах, как влияет на волновую картину замена коэффициентов отражения плоских волн интегральными операторами отражения.

В этой статье мы ограничиваемся случаем однократного рассеяния нестационарной сферической волны на бесконечной гладкой криволинейной границе S между однородными полупространствами D_1 и D_2 . В каждом полупространстве D_m заданы постоянные скорость распространения волн c_m и плотность ρ_m . Далее вектор \mathbf{R} обозначает любую точку пространства. Пусть точечный источник, расположенный в точке \mathbf{R}^* полупространства D_1 , генерирует нестационарное поле давления

$$p_1^*(\mathbf{R}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1^*(\mathbf{R}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (1)$$

$$p_1^*(\mathbf{R}, \omega) = s(\omega) \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c_1}|\mathbf{R} - \mathbf{R}^*|\right)}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{R}^*|}, \quad (2)$$

где t — время, ω — угловая частота, $s(\omega)$ — спектр используемого в численных примерах импульса источника (рис. 1)

$$f(t) = -\exp\left[-4\frac{(t-t_0)^2}{T^2}\right] \sin\left[2\pi\frac{(t-t_0)}{T}\right], \quad t_0 = 0,064 \text{ с}, \quad T = 0,032 \text{ с}. \quad (3)$$

Тогда в каждом полупространстве D_m возникают рассеянные волновые поля

$$p_m(\mathbf{R}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_m(\mathbf{R}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (4)$$

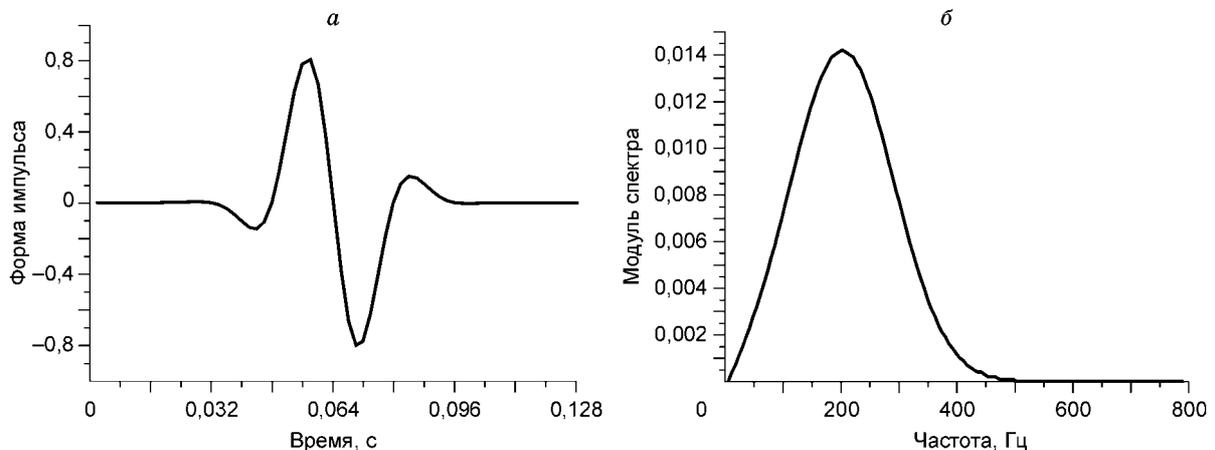


Рис. 1. Форма импульса источника (а) и его спектр (б).

Полное поле в полупространстве D_1 представляется суммой $p_1^*(\mathbf{R}, t) + p_1(\mathbf{R}, t)$, а в D_2 совпадает с рассеянным $p_2(\mathbf{R}, t)$. Спектры рассеянных полей (4) в каждом полупространстве D_m удовлетворяют приведенным волновым уравнениям $(\nabla^2 + \omega^2/c_m^2) p_m(\mathbf{R}, \omega) = 0$, граничным условиям на S

$$p_1^*(\mathbf{r}, \omega) + p_1(\mathbf{r}, \omega) = p_2(\mathbf{r}, \omega), \quad \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{\partial p_1^*(\mathbf{r}, \omega)}{\partial n} + \frac{\partial p_1(\mathbf{r}, \omega)}{\partial n} \right] = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2(\mathbf{r}, \omega)}{\partial n} \quad (5)$$

и условиям излучения на бесконечности, где вектор \mathbf{r} обозначает любую точку на границе S , $\partial/\partial n$ — оператор дифференцирования по нормали к границе S , направленной в полупространство D_1 . Рассматриваемая теория отражения–преломления [12—15] сводит нахождение граничных значений в условиях (5) к решению специальной системы граничных интегральных уравнений. Разложение решения этой системы в ряд Неймана порождает последовательность полей, имеющих смысл многократных отражений и преломлений. В результате поле (4) в области D_m расщепляется на многократно рассеянные от границы S поля, каждое из которых описывается поверхностным сингулярным интегралом.

Далее в численных примерах мы рассматриваем только однократно рассеянное поле в области D_1 при высоких частотах, спектр которого представлен интегралом

$$p(\mathbf{R}, \omega) = \iint_S \left[\frac{\partial g(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \omega)}{\partial n(\mathbf{r})} u(\mathbf{r}, \omega) - g(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \omega) \frac{\partial u(\mathbf{r}, \omega)}{\partial n(\mathbf{r})} \right] dS, \quad (6)$$

где $g(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \omega)$ — спектр фундаментального решения (функция Грина) приведенного волнового уравнения в полупространстве D_1 с абсолютно поглощающей границей S , $u(\mathbf{r}, \omega)$ — спектр однократно отраженного поля. Граничные значения спектров однократно отраженного поля и его нормальной производной под знаком интеграла (6) выражаются через спектр поля источника и его нормальной производной

$$u(\mathbf{r}, \omega) = K(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}\omega) p_1^*(\tilde{\mathbf{r}}\omega), \quad \frac{\partial u(\mathbf{r}, \omega)}{\partial n(\mathbf{r})} = -K(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}\omega) \frac{\partial p_1^*(\tilde{\mathbf{r}}\omega)}{\partial n(\tilde{\mathbf{r}})}, \quad (7)$$

где вектор $\tilde{\mathbf{r}}$ также обозначает текущую точку границы. Спектры поля источника и его нормальной производной в текущей точке $\tilde{\mathbf{r}}$ границы S в преобразованиях (7) являются функциями поверхностных гауссовых координат $\tilde{\mathbf{r}}(x_1, x_2)$, начало которых совпадает с точкой \mathbf{r} . В начале координат единичные векторы осей x_1 и x_2 должны принадлежать плоскостям главных нормальных сечений границы. В соотношениях (7) фигурирует *интегральный оператор отражения*

$$K(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}\omega) \langle \dots \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\zeta_1, \zeta_2, \omega) \frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \dots \rangle \exp[-i(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2)] \frac{dx_1 dx_2}{2\pi}, \quad (8)$$

$$k(\zeta_1, \zeta_2, \omega) = \frac{q_1(\zeta_1, \zeta_2, \omega) - q_2(\zeta_1, \zeta_2, \omega)}{q_1(\zeta_1, \zeta_2, \omega) + q_2(\zeta_1, \zeta_2, \omega)}, \quad (9)$$

где переменные интегрирования ζ_1 и ζ_2 соответствуют пространственным частотам. При высоких частотах ω справедливо представление

$$q_m(\zeta_1, \zeta_2, \omega) = \frac{1}{\rho_m} \sqrt{\frac{\omega^2}{c_m^2} - \zeta_1^2 - \zeta_2^2}, \quad (10)$$

в силу которого величина (9) обращается в коэффициент отражения плоских акустических волн.

Численная реализация соотношений (6)—(8) сталкивается со значительными трудностями. Во-первых, возникает проблема параметризации произвольной криволинейной границы с помощью поверхностных координат (x_1, x_2) с последующим вычислением внутреннего интеграла в (8) по криволинейной поверхности. Во-вторых, возникает проблема нахождения фундаментального решения приведенного волнового уравнения для абсолютно поглощающей границы S . Однако ситуация существенно упрощается в том случае, когда рассматривается приближенное значение интеграла (6) на высоких частотах ω . Именно этот случай рассматривается в настоящей статье. Мы не имеем возможности изложить вывод соответствующих высокочастотных аппроксимаций выражений (6)—(8) из-за его объема в рамках настоящей статьи. Поэтому мы ограничимся лишь указанием возникающих аппроксимаций.

Во-первых, асимптотическое значение внутреннего интеграла в (8) на высоких частотах ω формируется за счет вкладов по малой окрестности точки \mathbf{r} , что позволяет использовать локальную аппрокси-

мацию границы S , заменяя поверхностные криволинейные координаты (x_1, x_2) прямоугольными координатами в плоскости, которая касается криволинейной границы в точке \mathbf{r} . Во-вторых, проблема нахождения фундаментального решения приведенного волнового уравнения исключается автоматически при вычислении интеграла (6) методом наложения концевых волн [16—18], который является его высокочастотным аналогом, но не требует знания фундаментального решения. Эти аппроксимации использованы в рассматриваемых далее примерах, где сейсмограммы вычисляются методом наложения концевых волн с использованием коэффициента отражения плоских волн или интегрального оператора отражения на касательной плоскости [19].

Ниже приводятся примеры моделирования однократного отражения для четырех моделей границы при $\rho_1/\rho_2 = 1$ и различных контрастах скоростей на контакте сред, которые демонстрируют различие между сейсмограммами, полученными при учете граничных условий с помощью коэффициента отражения плоских волн и интегрального оператора отражения. Одновременно показывается двумерное сечение соответствующей трехмерной модели среды, система наблюдения и график распределения углов отражения вдоль границы. Во всех примерах используется система прямоугольных координат (x_1, x_2, z) .

Пример 1. Демонстрация этого примера преследует две цели: 1) показать, что используемый вычислительный алгоритм обеспечивает достаточную точность для интерпретации результатов численных экспериментов; 2) позволить понять причину помехи, возникающей в случае учета граничных условий с помощью коэффициента отражения. В этом примере рассматривается плоская горизонтальная граница, заданная уравнением $z = -1$ км. Скорости над и под границей соответственно равны $c_1 = 2$ км/с и $c_2 = 4$ км/с. Приемники расположены на поверхности $z = 0$ с шагом 0,025 км (рис. 2,а).

На рис. 2,б—д приводится сравнение трасс высокочастотного асимптотического решения, полученного с помощью интегрального оператора отражения, с трассами известного аналитического решения для трех положений приемника 0, 1,55 и 2,55 км соответственно. Рисунок 2,б показывает график косинуса угла отражения γ вдоль профиля приемников. Пересечения графиков косинусов угла отражения γ и угла критического отражения $\gamma_{\text{крит}}$ соответствуют точкам отражения критических лучей. Максимальные амплитуды асимптотического решения незначительно больше соответствующих амплитуд точного решения для докритического (см. рис. 2,в), критического (см. рис. 2,г) и закритического (см. рис. 2,д) углов отражения. Численное сравнение амплитуд показывает, что относительная погрешность используемого вычислительного алгоритма менее 5 % и не зависит от расстояния источник—приемник.

На рис. 2,е показана сейсмограмма, полученная с использованием коэффициента отражения. Она воспроизводит отраженную волну, но содержит помеху. Как следует из рис. 2,б, точки критического отражения образуют на границе окружность с радиусом 0,577 км и центром в проекции источника на границу. Кинематический анализ показывает, что экстремум годографа помехи совпадает с экстремумом годографа волны, дифрагированной окружностью точек критического отражения. Это позволяет понять причину помехи: использование коэффициента отражения не позволяет учесть граничные условия в окрестности линии точек критического отражения. Мы видим, что применение интегрального оператора отражения (см. рис. 2,ж) позволяет полностью удалить помеху и воспроизвести головную волну.

Пример 2. Положение точек критического отражения при фиксированном положении источника зависит от формы отражающей границы. В этом и следующем примерах мы сравниваем два способа учета граничных условий (коэффициент отражения и интегральный оператор отражения) для случаев локального искривления плоской границы. Формы границ выбраны так, чтобы помехи, возникающие при использовании коэффициента отражения, легко прослеживались визуально на синтетических сейсмограммах. В этом примере локально криволинейная граница синклиналильного типа со значительным отклонением от плоскости задана уравнением $z = -1 - 0,3 \exp[-16(x_1^2 + x_2^2)]$ км. Скорости те же, что и в примере 1. Приемники расположены на поверхности $z = 0$ с шагом 0,02 км. Все точки границы „видимы“ из источника и приемников. На рис. 3,а и б представлены соответственно вертикальное сечение модели среды и график косинуса углов отражения. На границе имеются три окружности, образованные точками критического отражения, с общим центром в проекции источника на границу и радиусами 0,075, 0,242 и 0,577 км, которые соответствуют трем критическим углам отражения. Сейсмограммы, полученные с помощью коэффициента и оператора отражения, показаны на рис. 3,в и г соответственно.

Импульс с наибольшей амплитудой — отражение от выпуклой и плоской частей границы между точками отражения $x_1 = 0,381$ и 1 км. Слабые импульсы на сближающихся годографах образованы отражением от синклиналильной части границы между точками отражения $x_1 = -0,381$ и 0 км. Фактически, эти два импульса являются каустической петлей отраженной волны с фокальной точкой при $x_1 = 0$ км.

На рис. 3,в головные волны отсутствуют, но возникает помеха в форме краевой волны от двух внутренних контуров критических отражений (радиусы 0,075 и 0,242 км). Головная волна от плоской

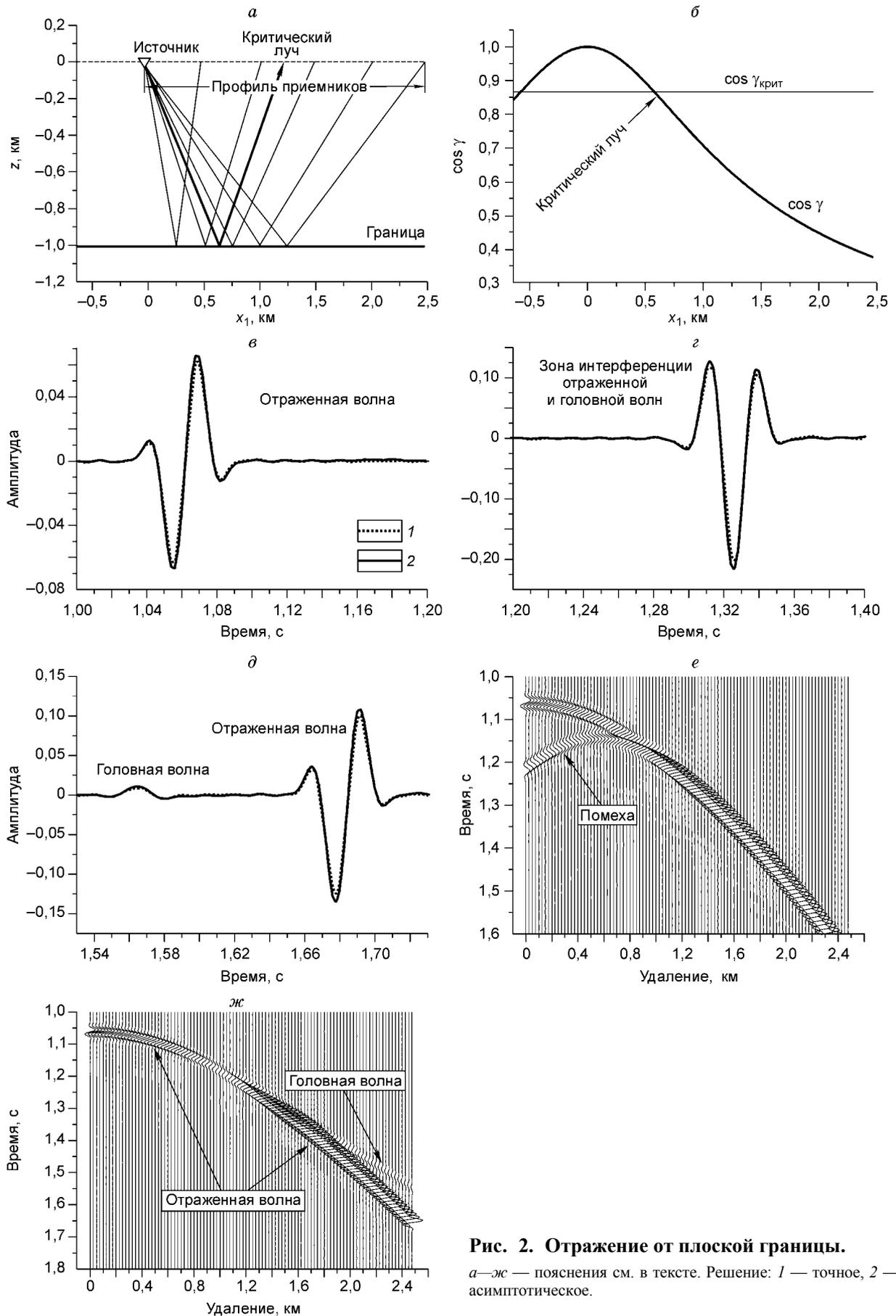


Рис. 2. Отражение от плоской границы.

а–ж — пояснения см. в тексте. Решение: 1 — точное, 2 — асимптотическое.

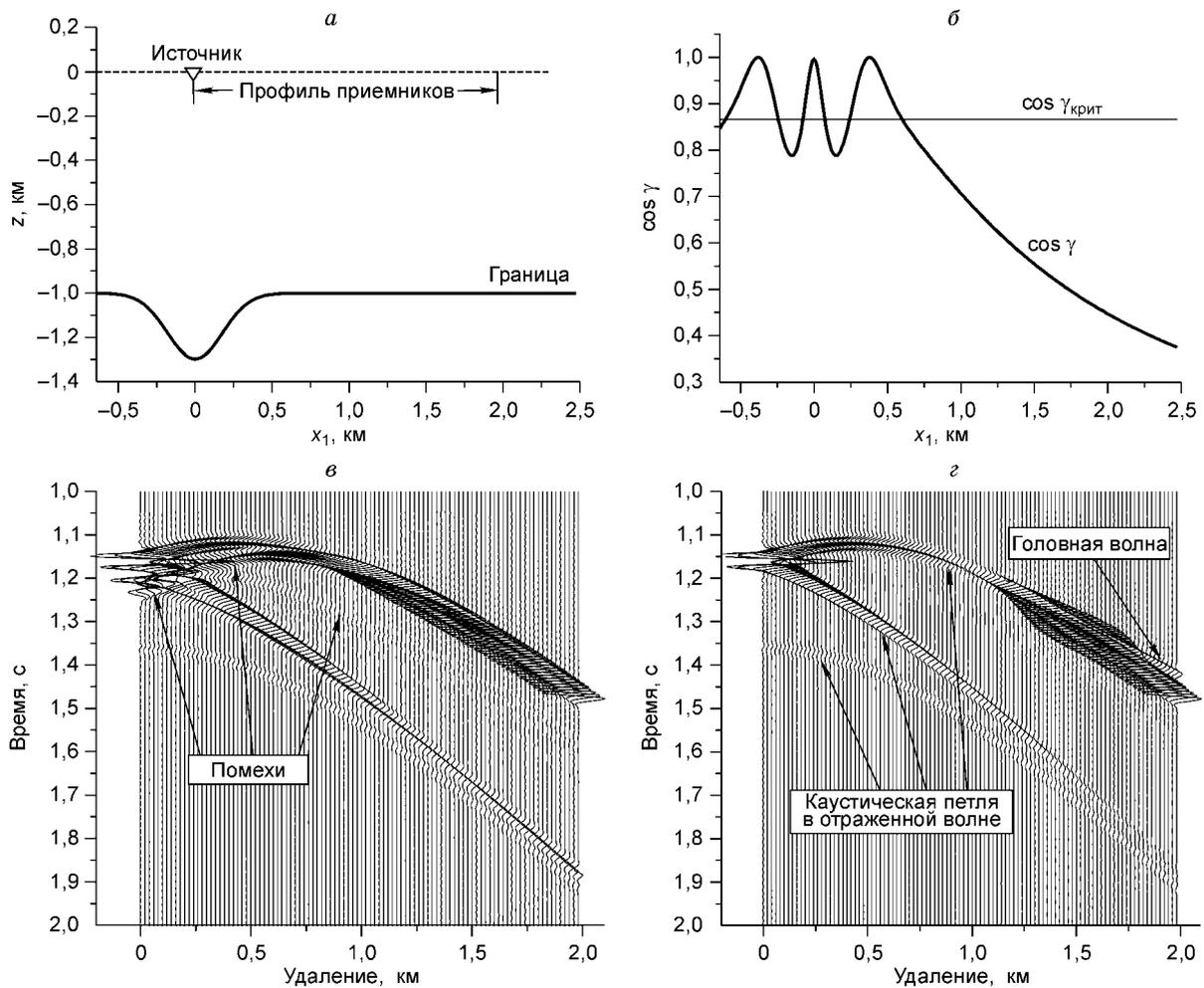


Рис. 3. Отражение от границы синклиальной формы.

a—z — пояснения см. в тексте.

части границы при $0,577 < x_1 < 1$ км наблюдается при $x_1 \geq 1,2$ км только на рис. 3,з. Выбранное положение приемников не позволяет увидеть другую головную волну от закритической полосы $-0,242 < x_1 < -0,075$ км на синклиальной части границы. Заметим, что она движется от одной из сторон синклиальной части границы к противоположной и порождает двукратное рассеяние, которое в данной статье не учитывается. Мы видим, что и в случае криволинейной границы применение интегрального оператора отражения (см. рис. 3,з) позволяет удалить помеху и воспроизвести головную волну.

Пример 3. Этот пример демонстрирует эффективность использования интегрального оператора отражения в ситуации, когда учет граничных условий с помощью коэффициента отражения порождает помехи, которые, практически, не позволяют интерпретировать синтетическую сейсмограмму. Здесь локально криволинейная граница антиклинального типа со значительным отклонением от плоскости задана уравнением $z = -1 + 0,1 \exp[-16(x_1^2 + x_2^2)]$ км. Скорости те же, что и в примере 1, а распределение приемников, как в примере 2. Модель среды с системой наблюдения и распределение углов отражения показаны на рис. 4,а и б. По распределению углов отражения видно, что точки критического отражения образуют на границе три окружности с общим центром под источником и радиусами 0,185, 0,29 и 0,577 км. Соответствующие сейсмограммы (см. рис. 4,в, з) содержат только один импульс отраженной волны, который имеет относительно слабую амплитуду на интервале $0 < x_1 < 1$ км, но большую на удалениях $1 < x_1 < 2$ км, соответствующих зоне закритических отражений $0,577 < x_1 < 1$ км на границе. Сейсмограмма, полученная с помощью коэффициента отражения (см. рис. 4,в), искажена помехами, тогда как сейсмограмма, полученная с помощью оператора отражения (см. рис. 4,з), легко интерпретируется в терминах отраженных и головных волн.

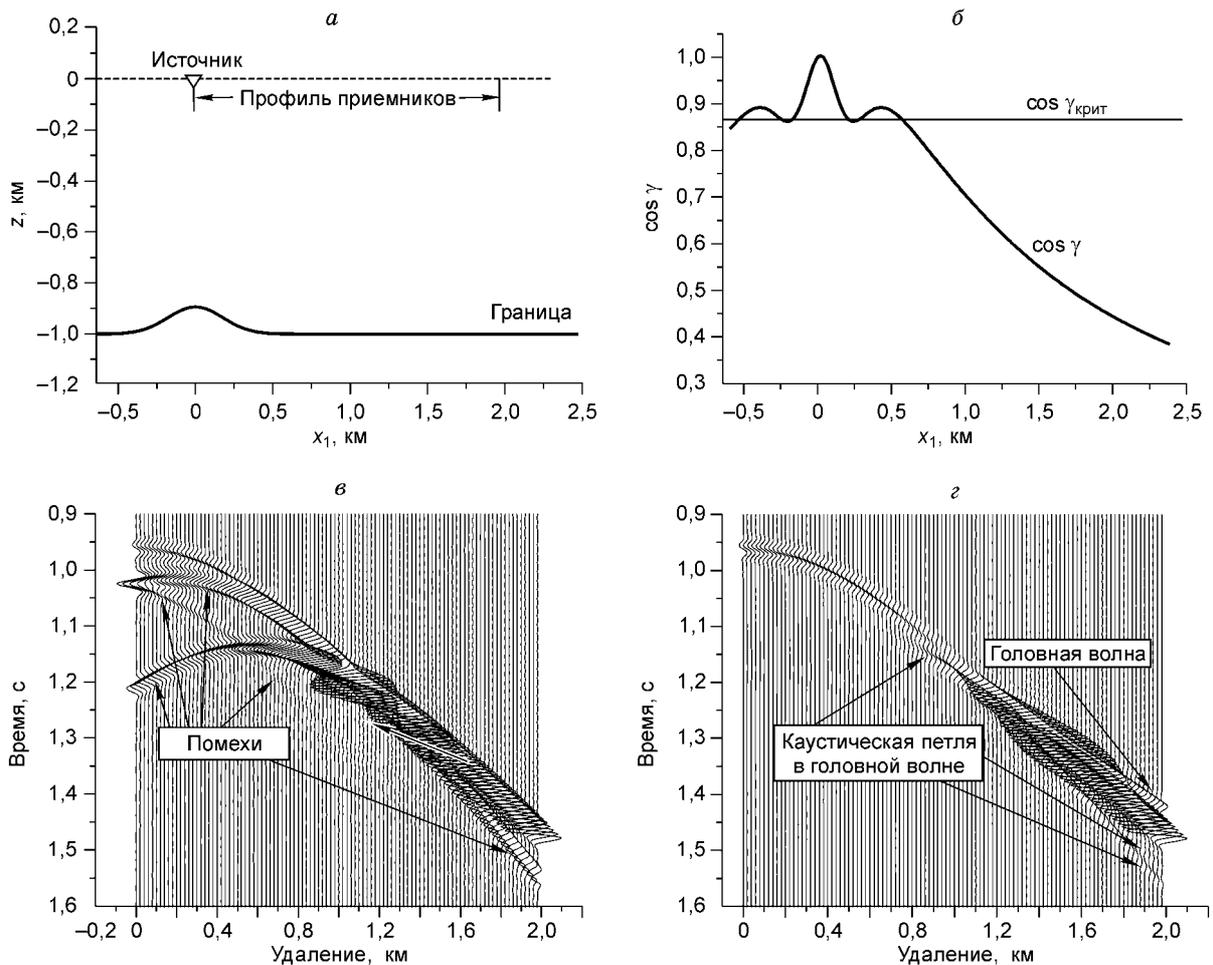


Рис. 4. Отражение от границы антиклинальной формы.

a—г — пояснения см. в тексте.

Четко выделяются две головные волны. Первая порождается в закритической зоне $0,577 < x_1 < 1$ км на плоской части границы. Ее импульс виден на интервале $1,14 < x_1 < 2$ км. Она подобна головной волне, наблюдаемой на рис. 3,з. Вторая головная волна возникает на полосе закритических отражений $0,185 < x_1 < 0,29$ км и фокусируется в точке $(0,98, -0,247)$ км. Здесь лучи головной волны образуют каустическую петлю, порождаемую вогнутой частью границы. Соответствующая каустическая петля, запаздывающая относительно отраженной волны, видна на сейсмограмме (см. рис. 4,г). Первая ветвь петли прослеживается на интервале $1,4 < x_1 < 2$ км как достаточно сильный импульс с почти линейным годографом и низкой кажущейся скоростью. Вторая ветвь прослеживается как слабый импульс с почти линейным годографом между отраженной волной и первой ветвью. При $0,8 < x_1 < 1$ км наблюдается продолжение второй головной волны в зону ее каустической тени.

Пример 4. Этот пример показывает, что учет граничных условий с помощью интегрального оператора отражения обеспечивает регулярное описание поля в каустических областях головных волн. Он демонстрирует образование головной волны и каустики в этой волне на вогнутом склоне антиклинали, когда наклон и кривизна последней изменяются с увеличением ее амплитуды. Рассматривается граница, подобная использованной в примере 3, но заданная уравнением $z = -1 + \Delta z \exp \{-16[(x_1 - 0,92)^2 + x_2^2]\}$ км с меняющимся по величине параметром Δz (рис. 5,а). Скорости над ($c_1 = 2$ км/с) и под ($c_2 = 8$ км/с) границей обеспечивают отделение головной волны от отраженной на малом удалении от источника. Система наблюдения содержит 80 приемников с шагом 0,05 км над антиклинальной частью границы. Распределение углов отражения для различных значений амплитуды антиклинали $\Delta z = 0,005; 0,02; 0,04$;

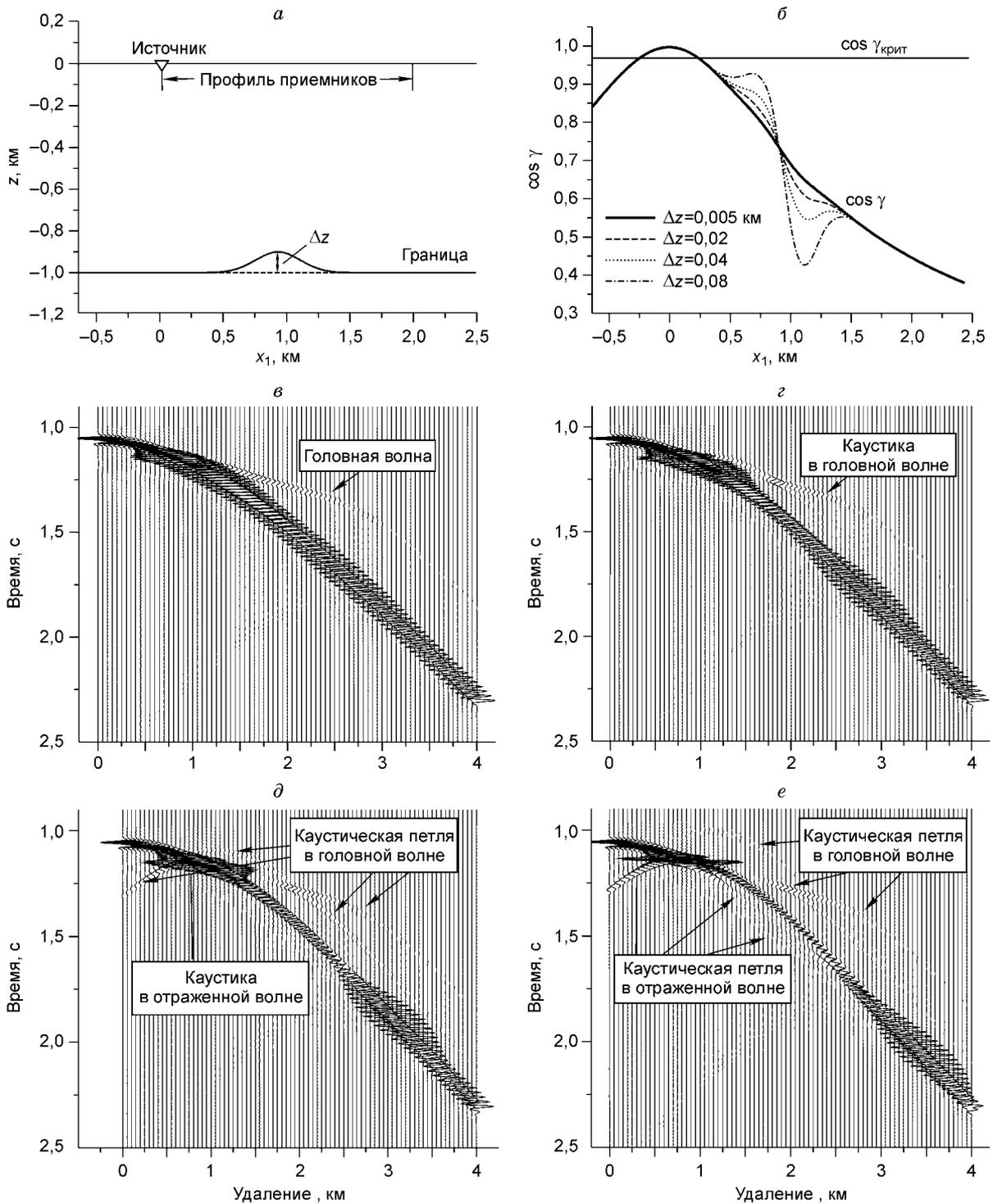


Рис. 5. Формирование головной волны от антиклинальной границы.

a—e — пояснения см. в тексте.

0,08 км показано на рис. 5,б. На рис. 5,в—е приведены соответствующие сейсмограммы, полученные с использованием оператора отражения. Рассмотрим сейсмограммы в порядке возрастания Δz .

При $\Delta z = 0,005$ км (см. рис. 5,в) наблюдаются отраженная и головная волны, подобные волнам на плоской границе. При $\Delta z = 0,02$ км (см. рис. 5,г) начинает развиваться локальное разрастание амплитуды отраженной волны в интервале $0,5 < x_1 < 1$ км на временах от 1,1 до 1,2 с. Амплитуды отраженной волны

возрастают с ростом значений Δz , так как рост Δz соответствует возрастанию кривизны склона антиклинали в интервале $0,5 < x_1 < 0,75$ км. На сейсмограмме возникают две ветви каустической петли в головной волне. Поскольку фронт головной волны распространяется от вогнутой части правого склона, фокус ее лучей расположен между границей и приемником. После прохождения головной волны через фокус в ней возникает петлевая структура, которая видна на сейсмограмме. При $\Delta z = 0,04$ км (см. рис. 5,д) видно локальное пятно разрастания амплитуды на неразрешенной каустической петле волны, отраженной от освещенного (левого) склона антиклинали. При $\Delta z = 0,08$ км (см. рис. 5,е) ветви годографа головной волны более развиты, но имеют слабые амплитуды. Видна каустическая петля отраженной волны.

Рассмотренные примеры показывают, что использование интегрального оператора отражения вместо коэффициента отражения плоских волн существенно улучшает результаты математического моделирования волновой картины. Во-первых, на сейсмограммах исчезают помехи, которые возникают при учете граничных условий с помощью коэффициента отражения. Во-вторых, синтетические сейсмограммы дают регулярное описание суммарного поля отраженных и головных волн в областях докритических, критических и закритических отражений, включая каустические зоны. В рассмотренных примерах использование интегрального оператора отражения обеспечивает воспроизведение высокочастотного приближения полного однократно рассеянного волнового поля. Результаты численных экспериментов позволяют предполагать, что использование интегральных операторов отражения и преломления представляет одно из возможных направлений совершенствования методов решения прямых задач сейсмологии. Несомненный интерес представляет исследование перспектив использования таких операторов в алгоритмах сейсмической инверсии.

Авторы выражают благодарность Исследовательскому центру Норск Гидро (Берген, Норвегия) за содействие в проведении этого исследования.

Работа поддержана грантами РФФИ (инициативные трехлетние проекты 00-05-65397 и 03-05-64941, „мас“ 02-05-06136), грантом Президента РФ № НШ 1302.2003.5 и грантом Роснауки № РИ-112/001/252.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдин С.В.** Оценка коэффициента отражения при миграции обменных и монотипных волн // Геология и геофизика, 1992 (4), с. 90—105.
2. **Орлов Ю.А.** Коэффициенты отражения и прохождения на основе решения уравнения Ламе в борновском приближении // Геология и геофизика, 2000, т. 41, с. 428—435.
3. **Bleistein N., Cohen J.K., Stockwell J.W. Jr.** Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion. Interdisciplinary applied mathematics, Vol. 13. New York, Springer-Verlag, 2001.
4. **Sen M.K., Frazer L.N.** Kirchhoff-Helmholtz reflection seismograms in a laterally inhomogeneous multilayered elastic medium — II. Computations // Geophys. J. Roy. astr. Soc., 1985, v. 82, p. 415—437.
5. **Kampfmann W.** A study of diffraction-like events on DEKORP 2-S by Kirchhoff theory // J. Geophys., 1988, v. 62, № 3, p. 163—174.
6. **Sen M.K., Frazer L.N.** Multifold phase space path integral synthetic seismograms // Geophys. J. Int., 1991, v. 104, p. 479—487.
7. **Treitel S., Lines L.** Past, present and future of geophysical inversion — a new millennium analysis // Geophysics, 2001, v. 66, p. 21—24.
8. **Tygel M., Ursin B.** Weak-contrast edge and vertex diffractions in anisotropic elastic media // Wave Motion, 1999, v. 29, p. 363—373.
9. **Tygel M., Schleicher J., Santos L.T., Hubral P.** An asymptotic inverse to the Kirchhoff-Helmholtz integral // Inverse Problems, 2000, v. 16, № 2, p. 425—445.
10. **Ursin B., Tygel M.** Reciprocal volume and surface scattering integrals for anisotropic elastic media // Wave Motion, 1997, v. 26, p. 31—42.
11. **Wenzel F., Stenzel K.-J., Zimmermann U.** Wave propagation in laterally heterogeneous layered media // Geophys. J. Int., 1990, v. 103, p. 675—684.
12. **Klem-Musatov K., Aizenberg A., Helle H.B., Pajchel J.** Reflection and transmission at curvilinear interface in terms of surface integrals // Wave Motion, 2004, v. 39, № 1, p. 77—92.
13. **Klem-Musatov K., Aizenberg A., Helle H.B., Pajchel J.** Reflection and transmission in multilayered media in terms of surface integrals // Wave Motion, 2005, v. 41, № 4, p. 293—305.
14. **Айзенберг А.М., Айзенберг М.А.** Моделирование следа интерференционного поля, отраженного или преломленного плоским контактом двух акустических сред // Динамика сплошной среды, Т. 121. Акустика неоднородных сред. Новосибирск, 2002, с. 50—55 (Труды Ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН).

15. **Айзенберг А.М., Айзенберг М.А., Хелле Х.Б., Пэйчел Я.** Отражение и преломление акустических волновых полей на криволинейной границе между двумя неоднородными средами // Динамика сплошной среды, Т. 123. Акустика неоднородных сред. Новосибирск, 2005, с. 73—79 (Труды Ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН).
16. **Klem-Musatov K.D., Aizenberg A., Helle H.B., Pajchel J.** Seismic simulation by the tip wave superposition method in complex 3D geological models // Extended Abstracts, 55th Meeting EAGE, 1993, Paper P103.
17. **Aizenberg A.M., Helle H.B., Klem-Musatov K.D., Pajchel J.** The tip wave superposition method based on the refraction transform // Extended Abstracts, 58th Meeting EAGE, 1996, Paper C001.
18. **Aizenberg A.M., Aizenberg M.A., Helle H.B. et al.** Modeling of single reflection by tip wave superposition method using effective coefficient // Extended Abstracts, 66th EAGE Conference & Exhibition (Paris, France, 7—10 June 2004). Paris, 2004, Paper P187.
19. **Айзенберг М.А.** Исследование свойств оператора отражения/преломления в задаче прохождения на плоском контакте двух однородных полупространств // Геофизический бюллетень ЕАГО, 2002, № 1, с. 10—12.

*Поступила в редакцию
17 ноября 2005 г.*