УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ф. С. Латифов, М. А. Мехтиев*

Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
AZ 1073 Баку, Азербайджан
* Институт математики и механики НАН Азербайджана,
AZ 1141 Баку, Азербайджан
E-mails: flatifov@mail.ru, mahirmehdiyev@mail.ru

С использованием вариационного принципа в геометрически нелинейной постановке решена задача о параметрических колебаниях продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с упругой средой и находящейся под действием внутреннего давления. Влияние внешней среды учтено с помощью модели Пастернака. Построены амплитудно-частотные зависимости для параметрических колебаний ортотропной цилиндрической подкрепленной оболочки, заполненной средой.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, заполнитель, нелинейные параметрические колебания, вариационный принцип, подкрепленная оболочка.

DOI: 10.15372/PMTF20180422

Введение. В последнее время представляет интерес исследование напряженно-деформированного состояния ребристых анизотропных оболочек при воздействии на них динамических нагрузок. Нелинейное деформирование цилиндрических оболочек при действии на них различных динамических нагрузок изучается в работе [1].

Исследованию нелинейных колебаний ребристых цилиндрических оболочек посвящено небольшое количество работ [2–5]. В работе [2] при решении этой задачи применяется метод последовательных приближений, в [4, 5] — метод конечных элементов. В геометрически нелинейной постановке с использованием вариационного принципа нелинейные параметрические колебания подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с внешней вязкоупругой средой и находящейся под действием внутреннего давления, исследованы в [6–12]. При этом подкрепление оболочек проводилось продольной, поперечной и перекрестной системами ребер. Исследования выполнялись как без учета поперечного сдвига оболочек [6–8], так и с его учетом [9–12].

Постановка задачи. В данной работе исследуются параметрические колебания [13] продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с заполнителем. Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия задачи получим на основе вариационного принципа Остроградского — Гамильтона.

Выражение для потенциальной энергии упругой деформации ортотропной цилиндрической оболочки имеет вид [2]

$$V_0 = \frac{hR}{2} \iint \Big[B_{11} \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 - 2(B_{11} + B_{22}) \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 - (B_{11} + B_{22}) \frac{w}{R} \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \\ + \frac{B_{11}}{4} \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^4 + \frac{w^2}{R^2} (B_{11} + 2B_{12} + B_{22}) + \frac{B_{22}}{R^2} \Big(\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)^2 - (B_{12} + B_{22}) \frac{w}{R^3} \Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2 - \\ - 2(B_{12} + B_{22}) \frac{w}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + B_{22} \frac{1}{R^3} \frac{\partial v}{\partial \theta} \Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2 + B_{22} \frac{1}{4R^4} \Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^4 + 2B_{12} \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ + B_{12} \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2 + B_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \frac{1}{2R^2} (B_{12} + 2B_{66}) \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 \Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2 + \\ + B_{66} \frac{1}{R^2} \Big(\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big)^2 + B_{66} \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + B_{66} \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + 2B_{66} \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} + 2B_{66} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big] \, dx \, d\theta,$$

где

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1\nu_2}, \quad B_{66} = G_{12} = G,$$

R — радиус срединной поверхности оболочки; h — толщина оболочки; u, v, w — компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки; E_1, E_2 — модули упругости ортотропного материала; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона ортотропного материала; x, θ — координаты в продольном и окружном направлениях.

Выражение для потенциальной энергии упругой деформации i-го продольного ребра записывается в виде [13]

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int\limits_{x_2}^{x_1} \Big[\tilde{E}_i F_i \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \Big(\frac{\partial w_i}{\partial x}\Big)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x}\Big)^2 + \tilde{G}_i J_{\text{кр}\, i} \Big(\frac{\partial \varphi_{\text{кр}\, i}}{\partial x}\Big)^2 \Big] \, dx,$$

где x_1, x_2 — координаты криволинейных и прямолинейных краев оболочки; F_i, J_{zi}, J_{yi}, $J_{\text{кр}\, i}$ — площадь поперечного сечения i-го продольного стержня и моменты инерции относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; $\tilde{E}_i$, $\tilde{G}_i$ — модули упругости и сдвига материала i-го продольного стержня; u_i, v_i, w_i — компоненты вектора перемещения точек осей ребер,

$$\varphi_{\text{кр}\, i}(x) = \varphi_2(x, y_i) = -\Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}\Big)\Big|_{y=y_i}.$$

Потенциальная энергия оболочки, находящейся под действием внешних поверхностных и краевых нагрузок, представляет собой работу, совершаемую этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное состояние, и представляется в виде

$$A_0 = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y v + q_z w) \, dx \, dy - \int\limits_{y_1}^{y_2} (T_1 u + S_1 v + Q_1 w + M_1 \varphi_1)\Big|_{x=x_2}^{x=x_1} dy - \\ - \int\limits_{x_1}^{x_2} (S_2 u + T_2 v + Q_2 w + M_2 \varphi_2)\Big|_{y=y_2}^{y=y_1} dx.$$

Здесь q_x, q_y, q_z — компоненты вектора внешних нагрузок, причем $q_z = q_{z1} + q_{z2}$; q_{z1} — интенсивность нагрузки, действующей на оболочку со стороны упругого заполнителя;

q_{z2} — интенсивность внешних поверхностных нагрузок; T_1, S_1, Q_1, T_2, S_2, Q_2 и M_1, M_2 — внутренние силы и моменты в оболочке.

Потенциальные энергии внешних краевых нагрузок, приложенных к торцам i-го продольного стержня, определяются следующими выражениями (принимается, что к ребрам приложены только краевые нагрузки):

$$A_i = -(T_i u_i + S_i v_i + Q_i w_i + M_i \varphi_i + M_{1i}\varphi_{zi} + M_{\text{кр}\,i}\varphi_{\text{кр}\,i})\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}$$

(T_i, S_i, Q_i, M_i, M_{1i}, $M_{\text{кр}\,i}$ — внутренние силы и моменты в ребрах).

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций оболочки и ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок:

$$\Pi = V_0 + \sum_{i=1}^{k_1} \Pi_i + A_0 + \sum_{i=1}^{k_1} A_i.$$

Выражения для кинетических энергий оболочки и ребер записываются в виде

$$K_0 = \frac{\rho_0 R^2 h}{2} \int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2\Big]\, d\xi\, d\theta,$$

$$K_i = \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \Big[\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_i}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w_i}{\partial t}\Big)^2 + \frac{J_{\text{кр}\,i}}{F_i}\Big(\frac{\partial \varphi_{\text{кр}\,i}}{\partial t}\Big)^2\Big]\, dx,$$

где t — время; ρ_0, ρ_i — плотности материалов, из которых изготовлены оболочка и i-й продольный стержень.

Кинетическая энергия ребристой оболочки определяется по формуле

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{k_1} K_i.$$

Полагая, что радиальные прогибы постоянны по высоте сечений и ребра жестко соединены с оболочкой, запишем соотношения

$$\begin{gathered} u_i(x) = u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i), \quad v_i(x) = v(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i), \quad w_i(x) = w(x, y_i), \\ \varphi_i(x) = \varphi_1(x, y_i), \qquad \varphi_{\text{кр}\,i}(x) = \varphi_2(x, y_i), \end{gathered} \tag{1}$$

где $h_i = 0{,}5h + H_i^1$; H_i^1 — расстояние от оси i-го продольного стержня до поверхности оболочки; x, y_i — координаты линий сопряжения ребер с оболочкой; $\varphi_1 = -\partial w/\partial x$, $\varphi_2 = -(\partial w/\partial y + v/R)$ — углы поворота нормальных элементов относительно координатных линий y и x; φ_i, $\varphi_{\text{кр}\,i}$ — углы поворота и кручения поперечных сечений продольных стержней.

Уравнения движения подкрепленной ортотропной оболочки, контактирующей со средой, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского — Гамильтона

$$\delta W = 0, \tag{2}$$

где $W = \int\limits_{t'}^{t''} L\, dt$ — действие по Гамильтону; $L = K - \Pi$ — функция Лагранжа; t', t'' — заданные произвольные моменты времени.

Выражение для интенсивности нагрузки, действующей на оболочку со стороны упругого заполнителя, можно записать в следующем виде:

$$q_{z1} = k_c w.$$

Здесь k_c — коэффициент, определяемый зависимостью $k_c = q_1 + q_0\nabla^2$ (модель Пастернака); ∇^2 — двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта; w — прогиб оболочки; q_1, q_0 — постоянные.

С учетом соотношений (1) перемещение стержней можно выразить через перемещение оболочки. Из условия стационарности (2) получаем систему нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений относительно искомых неизвестных.

Решение задачи. Рассмотрим нелинейные параметрические колебания продольно подкрепленной круговой ортотропной цилиндрической оболочки под действием радиальной нагрузки $q_{z2} = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 \sin(\omega_1 t)$, где $\tilde{q}_0$ — средняя или основная нагрузка; $\tilde{q}_1$ — амплитуда изменения нагрузки; ω_1 — частота изменения давления оболочки, находящейся в вязкоупругой среде. Считаем, что края оболочки шарнирно оперты, т. е. при $x = 0$, $x = l$

$$N_x = 0, \qquad M_x = 0, \qquad w = 0, \qquad v = 0.$$

Граничные условия удовлетворяются точно, если положить

$$u = u_0(t)\sin(kx)\sin(m\theta), \quad v = v_0(t)\sin(kx)\cos(m\theta), \quad w = w_0(t)\sin(kx)\sin(m\theta), \tag{3}$$

где m — число волн в окружном направлении; u_0, v_0, w_0 — неизвестные амплитуды изменения искомых величин; $k = \pi/l$. Подставим аппроксимации (3) в выражение для функционала L и, учитывая, что $x_1 = 0$, $x_2 = l$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2\pi$, $t' = 0$, $t'' = \pi/\omega$, проинтегрируем это выражение по x, y, t. В результате получаем функцию искомых величин u_0, v_0, w_0. Стационарное значение полученной функции определяется нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial u_0} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial v_0} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial w_0} = 0,$$

или

$$\begin{gathered}
\Big(\rho_0 h\,\frac{\pi L}{2} + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i F_i \sin^2(m\theta_i)\Big)\,\frac{d^2 u_0}{dt^2} = \\
= \Big(\frac{hRL\pi k^2 B_{11}}{2} + \frac{hm^2\pi L B_{66}}{2R} + \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1} E_i F_i k^2 \sin^2(m\theta_i)\Big)u_0 + \frac{hRk^2\pi L B_{11}}{4}\,w_0, \\
\Big(\rho_0 h\,\frac{\pi L}{2} + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i F_i\cos^2(m\theta_i) + L\sum_{i=1}^{k_1}\frac{\rho_i J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}\Big)\frac{d^2 v_0}{dt^2} + \\
+ L\sum_{i=1}^{k_1}\frac{m\rho_i J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}\,\frac{d^2 w_0}{dt^2} = \\
= \frac{hR}{2}\,\frac{B_{22}\pi m^2}{R^2}\,L + \frac{hR}{2}\,B_{66}k^2\pi L + \sum_{i=1}^{k_1} E_i J_{zi} k^4\cos^2(m\theta_i) + \\
+ \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_i J_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,k^2\cos^2(m\theta_i)v_0 + \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_i J_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,k^2 m\cos^2(m\theta_i)w_0,
\end{gathered} \tag{4}$$

$$L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\,\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}\,m\,\frac{d^2v_0}{dt^2}+$$

$$+\Big(\frac{\rho_0 h\pi L}{R^2}+L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_iF_i\sin^2(m\theta_i)+L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\,\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)m^2}{R^2}\Big)\frac{d^2w_0}{dt^2}=$$

$$=\frac{hRk^2\pi LB_{11}}{4}\,u_0+\Big(\frac{hm\pi L(B_{12}+B_{22})}{2R}+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,mk^2\cos^2(m\theta_i)\Big)v_0+$$

$$+\Big[\frac{h\pi L(B_{11}+2B_{12}+B_{22})}{2R}+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}E_iI_{yi}k^4\sin^2(m\theta_i)+$$

$$+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,m^2k^2\cos^2(m\theta_i)+L\pi k_c+\pi\tilde q_0\Big(1+\frac{\tilde q_1}{\tilde q_0}\sin(\omega_1 t)\Big)\Big]w_0+$$

$$+\Big(\frac{9k^4\pi LB_{11}}{32}+\frac{9m^4\pi LB_{22}}{32}+\frac{\pi m^2k^2L(B_{12}+2B_{66})}{16R^2}\Big)w_0^3.$$

Приведем решение в первом приближении, полагая колебания гармоническими. Представим решение системы уравнений (4) в виде

$$u_0(t)=A\cos(\omega t),\qquad v_0(t)=B\cos(\omega t),\qquad w_0(t)=C\cos(\omega t),$$

где A, B, C — безразмерные амплитуды; ω — частота колебаний. С использованием метода Бубнова — Галеркина получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона при следующих исходных данных: $R=0{,}16$ м, $h=0{,}000\,45$ м, $l=0{,}8$ м, $\rho_0=\rho_i=7800$ кг/м^3, $\tilde E_i=6{,}67\cdot10^9$ Па, $\nu_1=0{,}11$, $\nu_2=0{,}19$, $|h_i|=0{,}1375\cdot10^{-1}R$, $k_1=16$, $m=8$, $F_i/(2\pi Rh)=0{,}1591\cdot10^{-1}$, $J_{yi}/(2\pi R^3h)=0{,}8289\cdot10^{-6}$, $J_{zi}/(2\pi R^3h)=0{,}13\cdot10^{-6}$, $J_{\text{кр}\,i}/(2\pi R^3h)=0{,}5305\cdot10^{-6}$, $\tilde q_0/E_1=0{,}002$, $\tilde q_1/\tilde q_0=0{,}3$, $k_c/E_1=0{,}028$.

На рис. 1 приведены амплитудно-частотные зависимости в случае параметрических колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки с заполнителем при различных значениях отношения E_1/E_2 материала оболочки. Видно, что с увеличением отношения E_1/E_2 амплитуда параметрических колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки с заполнителем увеличивается.

Рассмотрим уточненное решение задачи, аппроксимируя изогнутую поверхность оболочки с помощью нескольких параметров. Такое решение позволяет исследовать изменение формы изогнутой поверхности во времени. Функции $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ представим в виде рядов, удовлетворяющих приведенным выше граничным условиям:

$$\begin{aligned}u&=u_0(t)\sin(kx)\sin(m\theta)+u_1(t)\sin(2kx)\sin(m\theta),\\ v&=v_0(t)\sin(kx)\cos(m\theta)+v_1(t)\sin(2kx)\cos(m\theta),\\ w&=w_0(t)\sin(kx)\sin(m\theta)+w_1(t)\sin(2kx)\sin(m\theta).\end{aligned}\tag{5}$$

Применяя принцип Остроградского — Гамильтона, получаем шесть уравнений движения

$$\Big(\rho_0h\,\frac{\pi L}{2}+L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_iF_i\sin^2(m\theta_i)\Big)\frac{d^2u_0}{dt^2}=$$

$$=\Big(\frac{hRL\pi k^2B_{11}}{2}+\frac{hm^2\pi Lk^2B_{66}}{2R}+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}E_iF_ik^2\sin^2(m\theta_i)\Big)u_0+$$

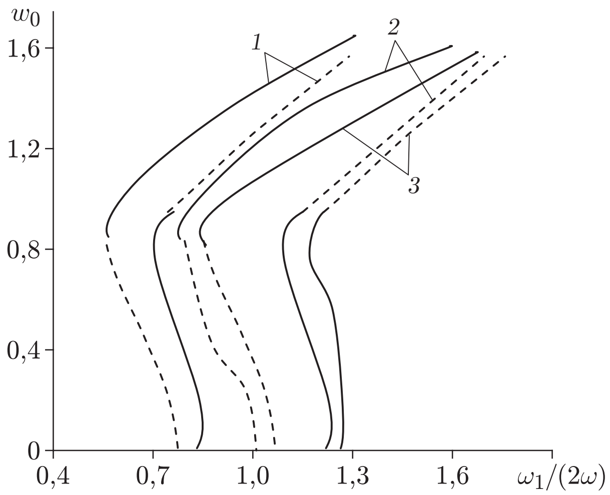

Рис. 1. Амплитудно-частотные зависимости в случае параметрических колебаний цилиндрической подкрепленной оболочки при различных значениях E_1/E_2: сплошные линии — устойчивые ветви решений, штриховые — неустойчивые ветви решений; *1* — $E_1/E_2 = 0{,}75$, *2* — $E_1/E_2 = 1{,}00$, *3* — $E_1/E_2 = 1{,}25$

$$+ \frac{hRk^2\pi LB_{11}}{4} w_0 - \frac{h\pi}{3}(B_{11}+B_{12})((-1)^n+2)w_1 + \frac{hB_{66}m\pi}{3}((-1)^n-1)v_1,$$

$$\Big(\rho_0\frac{h\pi L}{2} + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i F_i\cos^2(m\theta_i) + L\sum_{i=1}^{k_1}\frac{\rho_i J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}\Big)\frac{d^2v_0}{dt^2} + \\ + L\sum_{i=1}^{k_1}\frac{\rho_i J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)m}{R^2}\frac{d^2w_0}{dt^2} =$$

$$= \Big(\frac{hR}{2}\frac{B_{22}\pi m^2L}{R^2} + \frac{hR}{2}B_{66}k^2\pi L + \sum_{i=1}^{k_1}E_iI_{zi}k^4\cos^2(m\theta_i) + \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}k^2\cos^2(m\theta_i)\Big)v_0 + \\ + \Big(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}k^2m\cos^2(m\theta_i) + L\pi k_c\Big)w_0 - \frac{4B_{66}}{3R}m\pi((-1)^n-1)u_1, \qquad (6)$$

$$L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}m\frac{d^2v_0}{dt^2} + \\ + \Big(\frac{\rho_0 h\pi L}{2} + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_iF_i\sin^2(m\theta_i) + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)m^2}{R^2}\Big)\frac{d^2w_0}{dt^2} =$$

$$= \frac{hRk^2\pi LB_{11}}{4}u_0 + \Big(\frac{hm\pi L(B_{12}+B_{22})}{2R} + \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}mk^2\cos^2(m\theta_i)\Big)v_0 + \\ + \Big(\frac{h\pi L(B_{11}+2B_{12}+B_{22})}{2R} + \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}E_iJ_{yi}k^4\sin^2(m\theta_i) + \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}m^2k^2\cos^2(m\theta_i) +$$

$$+ L\pi k_c + \pi\tilde{q}_0\Big(1 + \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_0}\sin(\omega_1 t)\Big)w_0 + \Big(\frac{9k^4\pi L B_{11}}{32} + \frac{9m^4\pi L B_{22}}{32} + \frac{\pi m^2 k^2 L(B_{12}+2B_{66})}{16R^2}\Big)w_0^3 +$$

$$+ \frac{2h\pi(B_{11}+B_{12})}{3}\,((-1)^n+1)u_1 + \Big(\frac{9B_{11}k^4\pi L}{4} + \frac{9B_{22}m^4\pi L}{4} + \frac{5\pi m^2 k^2 L(B_{12}+B_{66})}{16R^2}\Big)w_0 w_1^2,$$

$$\Big(\frac{\rho_0 h\pi L}{2} + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i F_i \sin^2(m\theta_i)\Big)\frac{d^2u_1}{dt^2} =$$

$$= \frac{2h\pi}{3}\,(B_{11}+B_{12})((-1)^n+1)w_0 - \frac{4B_{66}}{3R}\,m\pi((-1)^n-1)v_0 +$$

$$+ \Big(2hRk^2L\pi B_{11} + \frac{B_{66}m^2\pi L}{R^2} + 2\sum_{i=1}^{k_1}E_iF_ik^2L\sin^2(m\theta_i)\Big)u_1 + hRB_{11}k^2\pi L w_1,$$

$$\Big(\frac{\rho_0 h\pi L}{2} + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i F_i\cos^2(m\theta_i) + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\,\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}\Big)\frac{d^2v_1}{dt^2} =$$

$$= 2L\sum_{i=1}^{k_1}m\rho_i\,\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}\,\frac{d^2w_1}{dt^2} + \frac{4B_{66}m\pi}{32}\,((-1)^n+1)u_0 +$$

$$+ \Big(\frac{hB_{22}\pi m^2 L}{2R} + 4B_{66}k^2\pi L + 16\sum_{i=1}^{k_1}E_iJ_{zi}k^4\cos^2(m\theta_i) + 2L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\,\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,k^2\cos^2(m\theta_i)\Big)v_1 +$$

$$+ 2Lmk^2\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iI_{\text{кр}\,i}}{R^2}\cos^2(m\theta_i)w_1,$$

$$2mL\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\,\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}\,\frac{d^2v_1}{dt^2} +$$

$$+ \Big(\frac{\rho_0 h\pi L}{2} + L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_iF_i\sin^2(m\theta_i) + 4m^2L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\,\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)}{R^2}\Big)\frac{d^2w_1}{dt^2} =$$

$$= -\frac{h\pi}{3}\,(B_{11}+B_{12})((-1)^n+2)u_0 + hRB_{11}k^2\pi L u_1 + \Big(\frac{h\pi L}{2R}\,(B_{11}+2B_{12}+B_{22}) +$$

$$+ 8Lk^4\sum_{i=1}^{k_1}E_iJ_{yi}\sin^2(m\theta_i) + 2L\,\frac{k^2m^2}{R^2}\sum_{i=1}^{k_1}G_iJ_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i) + L\pi k_c\Big)w_1 +$$

$$+ \Big(\frac{hm\pi L}{2R}\,(B_{12}+B_{22}) + \frac{2mLk^2}{R^2}\sum_{i=1}^{k_1}G_iJ_{\text{кр}\,i}\cos^2(m\theta_i)\Big)v_1 +$$

$$+ \Big(\frac{9hRk^4\pi LB_{11}}{8} + \frac{9hRm^4\pi LB_{22}}{8} + \frac{5h\pi m^2k^2L(B_{12}+2B_{66})}{32R}\Big)w_0^2w_1 +$$

$$+ \Big(\frac{3hRk^4\pi B_{11}L}{4} + \frac{hR\pi m^2k^2L(B_{12}+2B_{66})}{8} + \frac{3hm^4\pi LB_{22}}{4R^3}\Big)w_1^3.$$

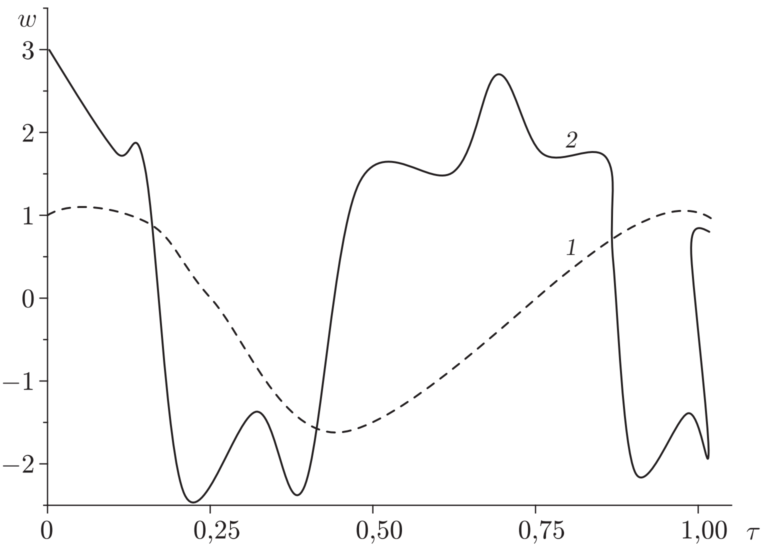

Рис. 2. Зависимость прогиба в срединном сечении оболочки от времени при $E_1/E_2 = 1{,}25$ и различных начальных перемещениях:
1 — $A = 1$, *2* — $A = 3$

Начальное перемещение задано в виде синусоиды, т. е. при $t = 0$

$$u_0 = A, \quad \frac{du_0}{dt} = 0, \quad u_1 = 0, \quad \frac{du_1}{dt} = 0, \quad v_0 = B, \quad \frac{dv_0}{dt} = 0,$$
$$v_1 = 0, \quad \frac{dv_1}{dt} = 0, \quad w_0 = C, \quad \frac{dw_0}{dt} = 0, \quad w_1 = 0, \quad \frac{dw_1}{dt} = 0.$$

Интегрируя систему (6) методом Рунге — Кутты, находим значения u_1, v_1, w_1. Шаг по времени $\Delta t = 0{,}05$ выбирается таким образом, чтобы обеспечивалась устойчивость решения системы уравнений (6). Далее вычисления повторяются: путем интегрирования системы определяются величины $u_1(2\Delta t)$, $v_1(2\Delta t)$, $w_1(2\Delta t)$ и т. д. Значения $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ в произвольной точке оболочки для заданного момента времени вычисляются по формулам (5) с точностью до 0,001.

На рис. 2 приведена зависимость прогиба в центральном сечении оболочки от безразмерного времени $\tau = t/T_0$ (T_0 — период основного тона малых колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки с заполнителем) при различных начальных перемещениях. При $A = 1$ колебания оболочки являются гармоническими, а форма изогнутой поверхности не меняется. Полученное решение практически совпадает с решением в первом приближении. Если начальное перемещение превышает толщину оболочки, то колебания не являются гармоническими. При этом форма колебаний в некоторые моменты времени существенно отличается от полуволны синусоиды, полученной при амплитуде $A = 3$. Следует отметить, что период колебаний больше периода колебаний, полученного из решения в первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кубенко В. Д.** Нелинейные колебания цилиндрических оболочек: Учеб. пособие / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Н. П. Подчасов. Киев: Выща шк., 1989.
2. **Кантор Б. Я.** Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев: Наук. думка, 1971.

3. **Енджиевский Л. В.** Нелинейные деформации ребристых оболочек. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1982.
4. **Постнов В. А., Корнеев В. С.** Использование метода конечных элементов в расчете устойчивости подкрепленных оболочек // Прикл. механика. 1976. Т. 25, № 1. С. 27–35.
5. **Заруцкий В. А.** Оптимизация подкрепленных цилиндрических оболочек / В. А. Заруцкий, Ю. М. Почтман, В. В. Скалозуб. Киев: Выща шк., 1990.
6. **Мехтиев М. А.** Нелинейные параметрические колебания подкрепленной продольными ребрами цилиндрической оболочки, контактирующей со средой // Механика. 2011. № 1. С. 23–27.
7. **Мехтиев М. А.** Нелинейные параметрические колебания подкрепленной цилиндрической оболочки с вязкоупругим заполнителем // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 3. С. 28–30.
8. **Мехтиев М. А.** Нелинейные параметрические колебания подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической оболочки, контактирующей с вязкоупругой средой // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2011. № 3. С. 80–86.
9. **Мехтиев М. А.** Нелинейные параметрические колебания подкрепленной продольными ребрами цилиндрической оболочки, контактирующей со средой, с применением динамической модели Пастернака // Теорет. и прикл. механика. 2011. № 3/4. С. 131–137.
10. **Mehdiyev M. A.** Nonlinear parametric vibrations of medium-contacting cylindrical shell stiffened with longitudinal ribs with regard to lateral shift // J. Phys. Sci. Appl. 2012. V. 2, N 2. P. 56–60.
11. **Mehdiyev M. A.** Nonlinear parametric vibrations of a ridge cylindrical shell dynamically contacting with medium // Trans. NAS Acad. Azerb. 2012. V. 32, N 4. P. 101–108.
12. **Mehdiyev M. A.** Investigating non-linear parametric vibrations of viscoelastic medium-filled cylindrical shell stiffened with cross system of ribs with regard to lateral shift // Intern. J. Environment. Sci. Technol. 2012. V. 4, N 12. P. 4957–4962.
13. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
14. **Амиро И. Я.** Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. Киев: Наук. думка, 1980.

Поступила в редакцию 10/III 2017 г.,
в окончательном варианте — 18/IX 2017 г.