УДК 539.375

ТОРМОЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ С ПОМОЩЬЮ НАВЕДЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Р. И. Кадиев, В. М. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку
E-mail: irakon63@hotmail.com

Рассмотрены локальные изменения температуры вблизи конца трещины при наличии областей, в которых берега трещины взаимодействуют. Полагается, что эти области примыкают к вершине трещины, а их размеры могут быть сравнимы с размером трещины. Задача локальных изменений температуры состоит в задержке или торможении роста трещины. Краевая задача о равновесии трещины со связями между берегами при действии внешних растягивающих нагрузок, наведенного термоупругого поля напряжений и усилий в связях, препятствующих ее раскрытию, сводится к системе нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром типа Коши. Из решения этой системы уравнений находятся нормальные и касательные усилия в связях. Вычисляются коэффициенты интенсивности напряжений. Рассматриваются энергетические характеристики трещины с концевой областью. Условие предельного равновесия трещины с концевой областью формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей.

Ключевые слова: трещины, термоупругое поле напряжений.

Постановка задачи. Создание надежных противоаварийных систем представляет собой жизненно важную задачу, особенно когда речь идет об уникальных сооружениях и безопасности людей. Одним из эффективных средств торможения роста трещин могут быть температурные и термоупругие поля [1, 2]. В механике разрушения важное значение имеет проблема “залечивания” существующей в теле трещины. Как видно из результатов работы [3], воздействие теплового источника уменьшает деформацию растягиваемой плоскости в направлении, перпендикулярном трещине, в связи с чем снижается коэффициент интенсивности напряжений в окрестности конца трещины.

Рассмотрим неограниченную упругую плоскость, ослабленную одной прямолинейной трещиной длины $2l$ в начале координат. Полагаем наличие областей, в которых берега трещины взаимодействуют, так что это взаимодействие сдерживает раскрытие трещины. Считается, что эти области примыкают к вершине трещины, а их размеры могут быть сравнимы с длиной трещины.

Берега трещины вне концевых областей свободны от внешних нагрузок. На бесконечности плоскость подвергается однородному растяжению вдоль оси ординат $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ (рис. 1).

Для торможения развития трещины на пути ее распространения с помощью нагрева тепловым источником области S до температуры T_0 создается зона сжимающих напряжений.

Приняты следующие допущения:

а) все термоупругие характеристики материала плоскости не зависят от температуры;

б) материал плоскости представляет собой однородное и изотропное тело.

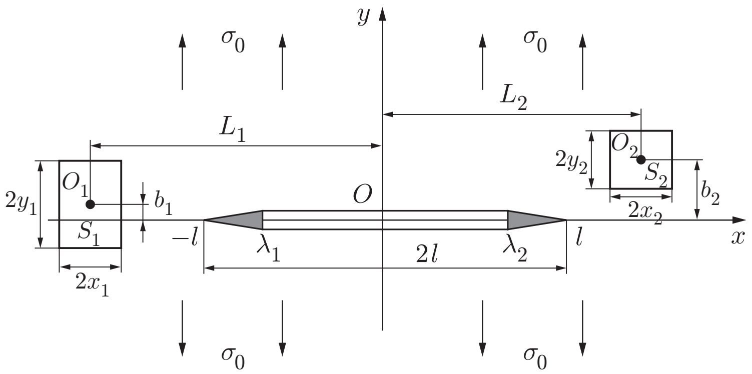

Рис. 1. Расчетная схема задачи

Будем полагать, что в момент $t = 0$ произвольная область S на пути роста трещины в плоскости мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$. Остальная часть плоскости имеет в начальный момент нулевую температуру.

Выделим части трещины длиной d_1 и d_2 (концевые области), примыкающие к ее вершинам, в которых берега трещины взаимодействуют. Взаимодействие берегов трещины в концевых областях моделируется путем введения между берегами трещины связей (сил сцепления) с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры концевых областей, в которых осуществляется взаимодействие берегов трещины, зависят от вида материала.

Концевые области малы по сравнению с остальной частью плоскости. Поэтому их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала.

При действии внешних силовой и тепловой нагрузок на пластинку в связях, соединяющих берега трещины, будут возникать в общем случае нормальные $(q_y(x))$ и касательные $(q_{xy}(x))$ усилия. Следовательно, к берегам трещины в концевых областях будут приложены нормальные и касательные напряжения $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$ соответственно. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \lambda_1 < x < \lambda_2,$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = q_y - iq_{xy} \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad -l \leqslant x \leqslant \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 \leqslant x \leqslant l,$$

где напряженное состояние представлено в виде

$$\sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_0}, \qquad \sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_0}, \qquad \tau_{xy} = \tau_{xy_1} + \tau_{xy_0}.$$

Здесь σ_{x_0}, σ_{y_0}, τ_{xy_0} — решение задачи термоупругости для плоскости без трещины.

Решение краевой задачи. Для определения напряжений σ_{x_0}, σ_{y_0}, τ_{xy_0} решаем задачу термоупругости для сплошной плоскости. Вначале находим распределение температуры в плоскости. Для этого решается следующая краевая задача теории теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T,$$

$$T = \begin{cases} T_0, & x, y \in S, \\ 0, & x, y \notin S, \end{cases}$$

где a — температуропроводность материала плоскости; Δ — оператор Лапласа.

Пусть, для определенности, нагретые со стороны каждой вершины трещины тепловым источником области S_1 и S_2 представляют собой прямоугольники со сторонами $2x_k$ и $2y_k$ $(k = 1, 2)$, а центр O_k прямоугольника S_k $(k = 1, 2)$ имеет координаты (L_k, b_k) (см. рис. 1).

Распределение температуры будет иметь следующий вид:

$$T(x, y, t) = T_1(x, y, t) + T_2(x, y, t),$$

$$T_k(x, y, t) = \frac{T_0}{4}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - L_k + x_k}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_k - L_k - x}{2\sqrt{at}}\right)\right] \times$$

$$\times\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y - b_k + y_k}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y_k + b_k - y}{2\sqrt{at}}\right)\right],$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-u^2)\,du.$$

Для упрощения задачи при определении температурного поля не учитывается возмущенное температурное поле, вызванное наличием трещины. В частности, при симметричном расположении областей S_k $(k = 1, 2)$ относительно оси абсцисс возмущенное температурное поле будет отсутствовать.

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим перемещения раскрытия трещины и усилия в связях. Это уравнение без потери общности можно представить в следующем виде [4, 5]:

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = C_y(x, \sigma)q_y(x) - iC_x(x, \sigma)q_{xy}(x), \tag{1}$$

где функции $C_y(x, \sigma)$ и $C_x(x, \sigma)$ можно рассматривать как эффективные податливости связей, зависящие от их натяжения; $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$ — модуль вектора усилий в связях. При постоянных значениях C_y, C_x имеем в (1) линейный закон деформирования. В общем случае закон деформирования является нелинейным и задан.

Напряженно-деформированное состояние в бесконечной плоскости в условиях плоской задачи с разрезом вдоль оси абсцисс описывается двумя аналитическими функциями $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ [6]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}],$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = k_0\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \overline{z\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)},$$

$$\Omega(z) = \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z),$$

где $k_0 = 3 - 4\nu$ для плоской деформации и $k_0 = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния; ν — коэффициент Пуассона материала плоскости.

Для определения функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ имеем задачу линейного сопряжения [6]

$$[\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) + \Omega(x)]^- = 2p(x); \tag{2}$$

$$[\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \Omega(x)]^- = 0, \tag{3}$$

где $-l \leqslant x \leqslant l$, x — аффикс точек контура трещины с концевыми зонами;

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{на свободных берегах трещины,} \\ q_y - iq_{xy} & \text{на берегах концевых зон трещины.} \end{cases}$$

Решение краевой задачи (2), (3) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \qquad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \Omega_1(z).$$

Здесь потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ описывают термоупругое состояние сплошной плоскости под действием теплового источника.

Комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ должны быть определены из краевых условий (2), (3). Для нахождения функций $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ представим граничные условия (2), (3) в виде

$$[\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^+ + [\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^- = 2p(x) + 2q_0(x); \tag{4}$$

$$[\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^+ - [\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^- = 0, \tag{5}$$

где $2q_0(x) = -[\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^+ - [\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^- = \sigma_{y_0}(x) - i\tau_{xy_0}$.

При $z \to \infty$ $\Phi_0(z) \to 0$, $\Phi(z) \to \Phi_1(z) \to \sigma_0/4$, $\Omega_0(z) \to 0$, $\Omega(z) \to \Omega_1(z) \to 3\sigma_0/4$.

На основе решения задачи термоупругости для сплошной плоскости имеем

$$2q_0(x,0) = \sigma_{y_0}(x,0) - i\tau_{xy_0}(x,0).$$

Здесь $\sigma_{y_0} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_{y_{0k}}$, $\tau_{xy_0} = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_{xy_{0k}}$, $n = 2$,

$$\sigma_{y_{0k}} = -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{4\sqrt{\pi}}\Big\{4\sqrt{\pi}A(x,y) + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Big[\operatorname{arctg}\Big(\frac{y-b_k+y_k}{x-L_k+x_k}\Big) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{y_k+b_k-y}{x_k+L_k-x}\Big) +$$
$$+ \operatorname{arctg}\Big(\frac{y_k+b_k-y}{x-L_k+x_k}\Big) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{y-b_k+y_k}{x_k+L_k-x}\Big) -$$
$$-\int\limits_0^t \frac{1}{\tau\sqrt{a\tau}}\Big[(x-L_k+x_k)\exp\Big(-\frac{(x-L_k+x_k)^2}{4a\tau}\Big) + (x_k+L_k-x)\exp\Big(-\frac{(x_k+L_k-x)^2}{4a\tau}\Big) \times$$
$$\times \Big[\operatorname{erf}\Big(\frac{y-b_k+y_k}{2\sqrt{a\tau}}\Big) + \operatorname{erf}\Big(\frac{y_k+b_k-y}{2\sqrt{a\tau}}\Big)\Big]\,d\tau\Big\},$$

$$\tau_{xy_{0k}} = -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi}\Big\{\ln\frac{(x-x_k-L_k)^2 + (y-b_k+y_k)^2}{(x-x_k-L_k)^2 + (y-y_k-b_k)^2} +$$
$$+ \ln\frac{(x-L_k+x_k)^2 + (y-y_k-b_k)^2}{(x-L_k+x_k)^2 + (y-b_k+y_k)^2} -$$
$$-\int\limits_0^t \frac{1}{\tau}\Big[\exp\Big(-\frac{(x-L_k+x_k)^2}{4a\tau}\Big) - \exp\Big(-\frac{(x_k+L_k-x)^2}{4a\tau}\Big)\Big] \times$$
$$\times \Big[\exp\Big(-\frac{(y-b_k+y_k)^2}{4a\tau}\Big) - \exp\Big(-\frac{(y_k+b_k-y)^2}{4a\tau}\Big)\Big]\,d\tau\Big\},$$

где

$$A(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y \in S_k, \\ 0, & x,y \notin S_k; \end{cases}$$

μ — модуль сдвига материала плоскости; α — коэффициент линейного температурного расширения.

Общие решения краевых задач (4) и (5) будут иметь вид [6]

$$\Phi_1(z) - \Omega_1(z) = -\sigma_0/2,$$

$$\Phi_1(z)+\Omega_1(z)=\frac{1}{\pi i\sqrt{z^2-l^2}}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{t^2-l^2}\,[p(t)+q_0(t)]}{t-z}\,dt+\frac{2F(z)}{\sqrt{z^2-l^2}},$$

где $F(z)=c_0z+c_1$, а под функцией $(z^2-l^2)^{-1/2}$ подразумевается ветвь, имеющая при больших $|z|$ вид

$$(z^2-l^2)^{-1/2}=\frac{1}{z}+\frac{l^3}{2z^3}+\ldots.$$

Окончательно для комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ имеем

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i\sqrt{z^2-l^2}}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{t^2-l^2}\,[p(t)+q_0(t)]\,dt}{t-z}+\frac{F(z)}{\sqrt{z^2-l^2}}-\frac{\sigma_0}{4}; \tag{6}$$

$$\Omega_1(z)=\frac{1}{2\pi i\sqrt{z^2-l^2}}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{t^2-l^2}\,[p(t)+q_0(t)]\,dt}{t-z}+\frac{F(z)}{\sqrt{z^2-l^2}}+\frac{\sigma_0}{4}.$$

Для определения коэффициента c_0 необходимо функцию (6) разложить в ряд по степеням z в окрестности точки $|z|\to\infty$ и сопоставить это разложение с выражением

$$\Phi_1(z)=\sigma_0/4+O(1/z^2).$$

В результате получим $c_0=\sigma_0/2$. Постоянную c_1 определяем из условия однозначности смещений [6]:

$$\int\limits_{-l}^{l}[\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x)]\,dx=0.$$

Для окончательного определения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ необходимо найти усилия q_y и q_{xy} в связях. Используя соотношения $2\mu\,\partial(u+iv)/\partial x=k_0\Phi(z)-\Omega(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)}$ и граничные значения функций $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ и $F(z)$, получим на отрезке $|x|\leqslant l$ следующее равенство:

$$\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x)=\frac{2\mu}{1+k_0}\Big[\frac{\partial}{\partial x}(u^+-u^-)+i\frac{\partial}{\partial x}(v^+-v^-)\Big]. \tag{7}$$

Используя формулы Сохоцкого — Племеля [7], с учетом формулы (6) находим

$$\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x)=-\frac{i}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\Big[\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}\,[p(t)+q_0(t)]\,dt}{t-x}+2(c_0x+c_1)\Big]. \tag{8}$$

Подставив выражение (8) в левую часть уравнения (7), с учетом соотношения (1) после некоторых преобразований получаем систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$:

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\Big[\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_y(t)\,dt+\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,\sigma_{y_0}(t)\,dt+2(c_0x+c_1)\Big]=$$

$$=\frac{2\mu}{1+k_0}\frac{\partial}{\partial x}\,(C_y(x,\sigma)q_y(x)); \tag{9}$$

$$
-\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\Big[\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_{xy}(t)\,dt+\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,\tau_{xy_0}(t)\,dt\Big]=
$$
$$
=\frac{2\mu}{1+k_0}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(C_y(x,\sigma)q_{xy}(x)). \qquad (10)
$$

Напомним, что

$$
I_1=\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_y(t)\,dt=\int\limits_{-l}^{\lambda_1}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_y(t)\,dt+\int\limits_{\lambda_2}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_y(t)\,dt,
$$
$$
I_2=\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_{xy}(t)\,dt=\int\limits_{-l}^{\lambda_1}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_{xy}(t)\,dt+\int\limits_{\lambda_2}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_{xy}(t)\,dt.
$$

Методика численного решения и анализ. Поставленная задача, как и следовало ожидать, распалась на две независимые задачи: для трещины нормального разрыва — уравнение (9) и для трещины поперечного сдвига — уравнение (10). Каждое из этих уравнений представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа Коши и может быть решено только численно. Для их решения можно использовать коллокационную схему с аппроксимацией неизвестных функций. В случае, когда закон деформирования связей нелинейный, для определения усилий q_y, q_{xy} в связях целесообразно использовать итерационную схему, подобную методу упругих решений [8].

Чтобы избежать решения интегродифференциальных уравнений, представим (9) и (10) в следующем виде:

$$
-\frac{1+k_0}{2\mu}\int\limits_{-l}^{x}Q_1(x)\,dx=C_y(x,\sigma)q_y(x), \qquad -\frac{1+k_0}{2\mu}\int\limits_{-l}^{x}Q_2(x)\,dx=C_x(x,\sigma)q_{xy}(x). \qquad (11)
$$

Здесь

$$
Q_1(x)=-\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\Big[\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_y(t)\,dt+\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,\sigma_{y_0}(t)\,dt+2(c_0x+c_1)\Big],
$$
$$
Q_2(x)=-\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\Big[\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,q_{xy}(t)\,dt+\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-x}\,\tau_{xy_0}(t)\,dt\Big].
$$

Разобьем отрезок $(-l,l)$ на M узловых точек t_m $(m=1,2,\ldots,M)$ и потребуем выполнения условий (11) в узловых точках. В результате получим вместо каждого из уравнений (11) алгебраические системы из M_1 уравнений для определения приближенных значений $q_y(t_m)$ и $q_{xy}(t_m)$ $(m=1,2,\ldots,M_1)$ соответственно:

$$
\begin{gathered}
CQ_1(t_1)=C_y(t_1)q_y(t_1),\\
C(Q_1(t_1)+Q_1(t_2))=C_y(t_2)q_y(t_2),\\
\ldots\ldots\\
C\sum_{m=1}^{M_1}Q_1(t_m)=C_y(t_{M_1})q_y(t_{M_1});
\end{gathered} \qquad (12)
$$

$$
\begin{gathered}
CQ_2(t_1) = C_x(t_1)q_{xy}(t_1), \\
C(Q_2(t_1)+Q_2(t_2)) = C_x(t_2)q_{xy}(t_2), \\
\cdots\cdots \\
C\sum_{m=1}^{M_1} Q_2(t_m) = C_x(t_{M_1})q_{xy}(t_{M_1}),
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где $C = -\dfrac{1+k_0}{2\mu}\dfrac{\pi l}{M}$; M_1 — число узловых точек, принадлежащих концевым зонам трещины.

При получении алгебраических систем все интервалы интегрирования были приведены к одному интервалу $[-1, 1]$, а затем интегралы были заменены конечными суммами с помощью квадратурных формул типа распределения Гаусса.

При рассмотрении в частном случае линейно-упругих связей системы (12) и (13) оказываются линейными, и для их численного решения использовался метод Гаусса с выбором главного элемента. После решения алгебраических систем (12) и (13) вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений.

Согласно принципу суперпозиций коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} при наличии связей (сил сцепления) в концевой зоне трещины удобно представить в следующем виде:

$$
K_I - iK_{II} = (K_I^{\text{н}} + K_I^{\text{с}}) - i(K_{II}^{\text{н}} + K_{II}^{\text{с}}),
\tag{14}
$$

где $K_I^{\text{н}}$, $K_{II}^{\text{н}}$ — коэффициенты интенсивности напряжений от действия силовой и тепловой нагрузок; $K_I^{\text{с}}$, $K_{II}^{\text{с}}$ — коэффициенты интенсивности напряжений от действия напряжений, возникающих в концевой зоне трещины.

По известным формулам [9] находим для левого конца трещины

$$
\begin{gathered}
K_I^{\text{н}} = \sigma_0\sqrt{\pi l} + \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l} \sigma_{y_0}(x)\sqrt{\frac{l-x}{x+l}}\,dx, \qquad K_I^{\text{с}} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l} q_y(x)\sqrt{\frac{l-x}{x+l}}\,dx, \\
K_{II}^{\text{н}} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l} \tau_{xy_0}(x)\sqrt{\frac{l-x}{x+l}}\,dx, \qquad K_{II}^{\text{с}} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l} q_{xy}(x)\sqrt{\frac{l-x}{x+l}}\,dx.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Аналогично для правого конца трещины имеем

$$
\begin{gathered}
K_I^{\text{н}} = \sigma_0\sqrt{\pi l} + \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l} \sigma_{y_0}(x)\sqrt{\frac{x+l}{l-x}}\,dx, \qquad K_I^{\text{с}} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l} q_y(x)\sqrt{\frac{x+l}{l-x}}\,dx, \\
K_{II}^{\text{н}} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l} \tau_{xy_0}(x)\sqrt{\frac{x+l}{l-x}}\,dx, \qquad K_{II}^{\text{с}} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l} q_{xy}(x)\sqrt{\frac{x+l}{l-x}}\,dx.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Рассмотрим энергетические характеристики для трещины со связями между берегами. Независимо от формы закона деформирования связей, скорость высвобождения энергии деформации определяется соотношением [2, 9]

$$
G_{\text{в}} = (1-\nu)K_{\text{св}}^2/(2\mu),
\tag{17}
$$

где $K_{\text{св}} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ — модуль коэффициентов интенсивности напряжений при наличии связей в концевой зоне трещины.

Запишем выражение для скорости потребления энергии деформации связями в концевой зоне трещины:

$$G_n = \frac{1}{b}\,\frac{\partial U_n}{\partial l}, \qquad U_n = b\int\limits_{\lambda_k}^{l} f(u)\,dx, \qquad f(u) = \int\limits_0^{v(x)} q_y(v)\,dv + \int\limits_0^{u(x)} q_{xy}(u)\,du, \tag{18}$$

где b — толщина плоскости; U_n — работа по деформированию связей; $f(u)$ — плотность энергии деформации связей в концевой зоне трещины.

Из соотношения (18), а также учитывая, что

$$v^+(l) - v^-(l) = 0, \qquad v^+(l) - v^-(l) = 0,$$

получим [5]

$$G_n = b\int\limits_{l-\lambda_k}^{l} \frac{\partial}{\partial l}\,(v^+ - v^-) q_y(x)\,dx + b\int\limits_{l-\lambda_k}^{l} \frac{\partial}{\partial l}\,(u^+ - u^-) q_{xy}(x)\,dx. \tag{19}$$

Как известно, состоянию предельного равновесия соответствует выполнение условия

$$G_{\text{в}} = G_{\text{п}}. \tag{20}$$

Условие (20) является необходимым, но не достаточным для предельно-равновесного состояния трещины с концевой зоной. Следовательно, для определения предельно-равновесного состояния вершины трещины и концевой зоны необходимо ввести дополнительное критическое условие. В качестве такого дополнительного условия принимаем критическое раскрытие трещины. Принимаем, что разрыв связей на краю концевой зоны ($x_0 = \lambda_k$) происходит при выполнении условия

$$V(x_0) = \sqrt{v^2(x_0) + u^2(x_0)} = \delta_k, \tag{21}$$

где δ_k — предельная вытяжка (длина) связей; $v = v^+ - v^-$; $u = u^+ - u^-$. Совместное решение уравнений (20), (21) дает возможность (при заданной длине трещины и характеристиках связей) найти критическую внешнюю нагрузку и размер концевой зоны $d_k = l - |\lambda_k|$ для предельно-равновесного состояния вершины трещины и края концевой зоны. Скорость потребления энергии деформации $G_k(d_k, l)$, найденная из этого решения, является энергетической характеристикой сопротивления разрушению, т. е. $G_k = G_n(d_k, l)$.

На основании сказанного для заданных размеров трещины и концевой зоны, используя предельные значения δ_k и G_k, можно выделить режимы равновесия и роста трещины при монотонном нагружении.

Если выполняются условия $G_{\text{в}} \geqslant G_k$, $V(x_0) < \delta_k$ для заданного размера концевой зоны, то происходит продвижение вершины трещины с одновременным увеличением длины концевой зоны без разрыва связей.

Этот этап развития трещины можно считать процессом приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок. Рост вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны будет происходить при выполнении условий $G_{\text{в}} \geqslant G_k$, $V(x_0) \geqslant \delta_k$. Так, например, при выполнении неравенств $G_{\text{в}} < G_k$, $V(x_0) \geqslant \delta_k$ происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины и размер концевой зоны сокращается, стремясь к критическому значению для данного уровня нагрузки.

Наконец, при выполнении условий $G_{\text{в}} < G_k$, $V(x_0) < \delta_k$ положения вершины трещины и концевой зоны не будут изменяться.

Таким образом, анализ показывает, что величина внешней нагрузки и критические параметры δ_k, G_k определяют характер разрушения, а именно:

— рост вершины трещины с продвижением концевой зоны;

— сокращение размера концевой зоны без роста вершины трещины;

— рост вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны.

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в концевых зонах используется итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [8].

Принимается, что закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) является линейным при $V \leqslant V_*$.

Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении систем уравнений (12), (13) для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в случаях, когда на части концевой зоны имеет место соотношение $V(x) > V_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с эффективной податливостью, переменной вдоль концевой зоны трещины и зависящей от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [10]. Процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия вдоль концевой зоны, полученные на двух последовательных итерациях, будут мало отличаться друг от друга.

Нелинейная часть кривой деформирования связей представлялась в форме билинейной зависимости [5], восходящий участок которой соответствовал упругому деформированию связей ($0 < V(x) \leqslant V_*$) с их максимальным натяжением. При $V(x) > V_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками (V_*, σ_*) и (δ_k, σ_k). Причем при $\sigma_k \geqslant \sigma_*$ имеем возрастающую линейную зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Таким образом, билинейная зависимость между натяжением связи $\sigma(x)$ и ее вытяжкой $V(x)$ была представлена в [5] в виде

$$\sigma(V) = \begin{cases} V(x)/C(x), & 0 \leqslant V(x) \leqslant V_*, \\ \sigma_k + (\sigma_* - \sigma_k)(\delta_k - V(x))/(\delta_k - V_*), & V_* < V(x) \leqslant \delta_k, \end{cases}$$

где $C(x) = C_y(x) = C_x(x)$ — эффективная податливость связей в точке концевой области с координатой x. Очевидно, что если податливости упругих связей изменяются вдоль концевой зоны трещины, то эффективная податливость $C(x)$ тоже будет переменной, что соответствует изменению закона деформирования связей вдоль концевой зоны трещины.

На рис. 2 приведены графики распределения нормальных усилий в связях концевых зон трещины для следующих значений свободных параметров:

$$t_* = 4at/L_1^2 = 10, \qquad x_1/L_1 = 0{,}75, \qquad y_1/L_1 = 0{,}5, \qquad b_1/L_1 = 0{,}2;$$

$$\nu = 0{,}3, \qquad x_2/L_2 = 0{,}7, \qquad y_2/L_2 = 0{,}6, \qquad b_2/L_2 = 0{,}3, \qquad L_1 = L_2.$$

Расчеты показывают, что наличие температурных напряжений, наведенных тепловым источником, уменьшает значения коэффициентов интенсивности напряжений, усилий в связях между берегами и раскрытие трещины. При линейном законе деформирования связей усилия в них всегда имеют максимальные значения на краю концевой зоны. Аналогичная картина наблюдается и для величин раскрытия трещин, а именно: на краю концевой зоны оно максимально при линейном и нелинейном законах деформирования, причем с увеличением относительной податливости связей раскрытие трещины возрастает.

На рис. 3 представлены графики зависимости относительного модуля коэффициентов интенсивности напряжений $K_0 = K_{\text{св}}/K^{\text{н}}$ ($K^{\text{н}} = \sqrt{(K_I^{\text{н}})^2 + (K_{II}^{\text{н}})^2}$) (который можно

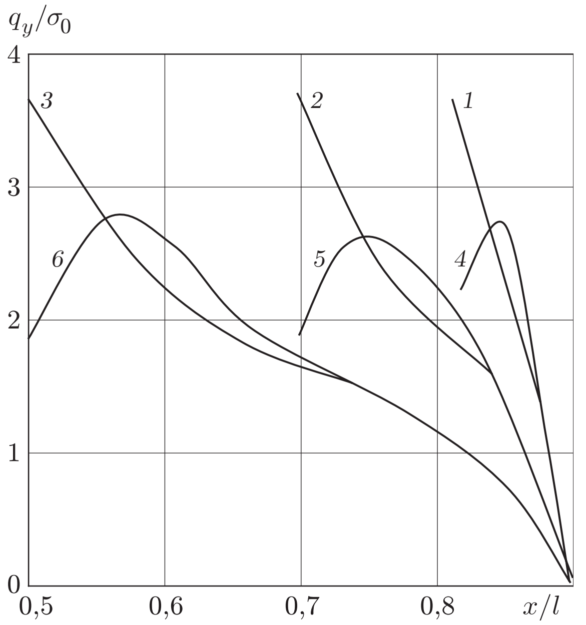

Рис. 2

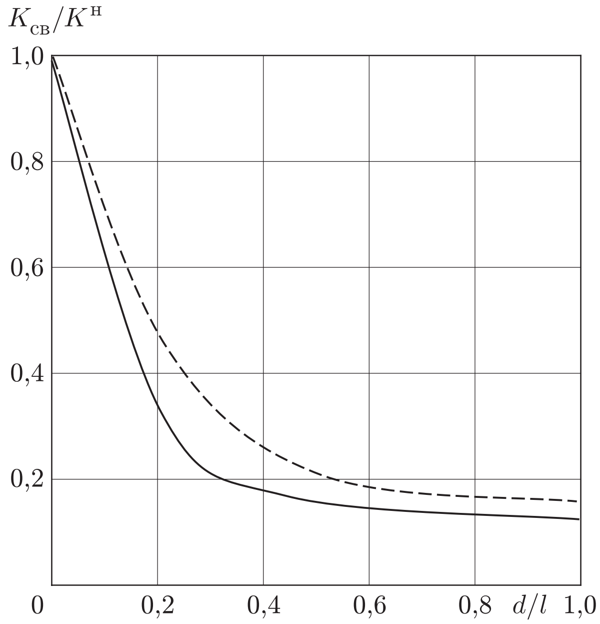

Рис. 3

Рис. 2. Зависимости распределения нормальных усилий в связях концевых зон трещины:

кривые *1–3* соответствуют линейной связи, *4–6* — билинейной зависимости; $d/l = 0{,}15$ (*1, 4*), 0,3 (*2, 5*), 0,5 (*3, 6*)

Рис. 3. Зависимости относительного модуля коэффициентов интенсивности напряжений от размера концевой зоны трещины

рассматривать как коэффициент упрочнения) от размера концевой зоны трещины в плоскости. Здесь сплошная кривая соответствует правому концу трещины, а штриховая — левому концу трещины. Расчеты показывают, что при уменьшении относительной податливости коэффициент упрочнения снижается.

Анализ предельно-равновесного состояния плоскости при наличии трещины со связями в концевых зонах и действии температурных напряжений, наведенных с помощью тепловых источников, сводится к параметрическому исследованию решения алгебраических систем (12), (13) при различных законах деформирования связей, размерах концевых областей трещин, теплофизических и упругих постоянных материала плоскости. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем в каждом приближении определяются нормальные и касательные усилия в связях и раскрытие трещины. Раскрытие трещины в пределах концевых зон можно также определять согласно соотношению (1). Значения коэффициентов интенсивности напряжений, скоростей высвобождения и поглощения энергии вычисляются по формулам (14)–(16), (17) и (18) соответственно.

Следуя работе [11] и другим, можно было бы считать, что усилия взаимодействия берегов трещины (силы сцепления) распределены так, что суммарный коэффициент интенсивности напряжений, определяемый как разность между коэффициентами интенсивности напряжений от действия внешних и тепловых нагрузок и коэффициентом интенсивности напряжений от сил сцепления, приложенных в концевых зонах трещин, равен нулю. В случае принятия такой модели изложенная выше расчетная схема решения задачи сохраняется, при этом, однако, размеры концевых зон трещины со связями заранее неизвестны и подлежат определению. Для их определения используется постулат уничтожения особенностей в распределении напряжений, т. е. условие равенства нулю суммарного коэффициента интенсивности напряжений. Таким образом, к основным разрешающим уравнениям добавляются еще условия конечности напряжений для окрестности каждой вершины трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Финкель В. М.** Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977.
2. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
3. **Кадиев Р. И., Мирсалимов В. М.** Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестн. Даг. гос. ун-та. 2001. № 4. С. 69–73.
4. **Гаджиев В. Д., Мирсалимов В. М.** Предельно-равновесное состояние детали типа втулки при наличии трещин со связями между берегами // Оптимальное проектирование механических систем. Баку: Элм, 1999. С. 50–63.
5. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С. 94–112.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
8. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
9. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
10. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.
11. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
12. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Рост трещины по границе соединения материалов // Проблемы механики: Сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.

Поступила в редакцию 8/X 2003 г.,
в окончательном варианте — 22/IV 2004 г.