

7. Альтшулер Л. В. Фазовые превращения в ударных волнах (обзор) // ПМТФ.— 1978.— № 4.
8. Duvall G. E., Graham R. A. Phase transitions under shock-wave loading // Rev. Modern Phys.— 1977.— V. 49, N 3.
9. Hayes D. B. Wave propagation in a condensed medium with N transforming phases: Application to solid-I — solid-II — liquid bismuth // J. Appl. Phys.— 1975.— V. 46, N 8.
10. Нагорнов О. В., Чижев В. Е. Термодинамические свойства льда, воды и их смеси при высоких давлениях // ПМТФ.— 1990.— № 3.
11. Bridgman P. W. Water, in the liquid and five solid forms, under pressure // Proc. Amer. Acad. Arts Sci.— 1944.— V. 47, N 13.
12. Dorsey N. E. Properties of ordinary water substance.— N. Y.: Reinhold, 1940.
13. Durham W. B., Kirby S. H., Heard H. C., Stern L. A. Inelastic properties of several high-pressure crystalline phases of H<sub>2</sub>O: ices II, III and V // VII Sympos. on the Phys. and Chem. of Ice, Grenoble, 1986.
14. Gagnon R. E., Kieffe H., Clouter M. J., Whalley E. Elastic constants of ice Ih, up to 2.8 kbar, by Brillouin spectroscopy // Ibid.
15. Gagnon R. E., Kieffe H., Clouter M. J., Whalley E. Acoustic velocities in ice Ih, II, III, V and VI, by Brillouin spectroscopy // Ibid.
16. Landolt-Bornstein. Numerical data and functional relationships in science and technology. New series. Group IV.— Berlin et al.: Springer, 1980.— V. 4.
17. Fletcher N. H. The chemical physics of ice.— Cambridge: Univ. Press, 1970.
18. Shaw G. H. Elastic properties and equation of state of high pressure ice // J. Chem. Phys.— 1986.— V. 84, N 10.
19. Zemansky M. W. Heat and thermodynamics.— N. Y.: McGraw Hill, 1968.
20. Зацепина Г. Н. Физические свойства и структура воды.— М.: Изд-во МГУ, 1987.
21. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Т. 1.
22. Таблицы физических величин. Справочник/Под ред. акад. И. К. Кикоина.— М.: Атомиздат, 1976.
23. Gammon P. H., Kieffe H., Clouter M. J., Denner W. W. Elastic constants of artificial and natural ice by Brillouin spectroscopy // J. Glaciology.— 1983.— V. 29, N 103.
24. Левич В. Г. Курс теоретической физики.— М.: Наука, 1969.— Т. 1.
25. Murro R. G., Block S., Mauer F. A., Piermarini G. Isothermal equation of state for H<sub>2</sub>O-VII and D<sub>2</sub>O-VII // J. Appl. Phys.— 1982.— V. 53, N 9.
26. Беляев А. М., Воробьев В. С., Хомкин А. Л. Широкодиапазонное уравнение состояния воды // ТВТ.— 1990.— Т. 28, № 3.

г. Москва

Поступила 11/II 1992 г.

УДК 539.3

А. О. Ватульян, И. А. Гусева

## О КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОЛОСТЬЮ

В настоящее время задачи о колебаниях полуограниченных тел с полостями детально исследованы для полостей канонической формы в изотропном случае на основе метода суперпозиции. Учет анизотропии и неканоничность формы дефекта требуют для анализа волновых полей совершенно иных методов, к числу которых можно отнести метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). Развитый в последние годы метод граничных элементов (ГЭ) основан на знании фундаментальных решений для ортотропной среды. В настоящей работе методы ГИУ и ГЭ применены к ортотропным средам на основе построенного авторами фундаментального решения в виде однократных интегралов по контуру в комплексной плоскости, причем такое представление позволяет эффективно строить коэффициенты матрицы системы в виде однократных интегралов при простейшей аппроксимации неизвестных величин на элементе и рассчитывать волновое поле в любой точке среды.

1. Рассматривается задача об установившихся колебаниях упругой ортотропной полуплоскости  $x_3 < 0$ , ослабленной полостью с гладкой границей  $l$ . Считаем, что колебания полуплоскости вызываются нормальной нагрузкой, приложенной на границе  $x_3 = 0$ . Уравнения движения, опре-

деляющие соотношения и граничные условия после отделения временно-го множителя, имеют вид

$$(1.1) \quad \sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (i = 1, 3, j = 1, 3);$$

$$(1.2) \quad \sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{33}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{13} = 2C_{55}\varepsilon_{13},$$

при  $x_3 = 0$   $\sigma_{13} = 0$ ,  $\sigma_{33} = -p(x_1)$

$$p(x_1) = \begin{cases} 0, & [x_1 \notin l_1, \\ p(x_1), & x_1 \in l_1, \end{cases} \quad \sigma_{ij} n_j |_l = 0$$

( $n_j$  — компоненты единичного вектора нормали к кривой  $l$ , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой). Замыкают постановку задачи условия излучения, при формулировке которых использовался принцип предельного поглощения [1].

В [2] получено представление фундаментального решения для ортотропной полуплоскости, с помощью которого краевая задача сводится к системе ГИУ. Фундаментальное решение, удовлетворяющее однородным граничным условиям при  $x_3 = 0$ ,  $\sigma_{13}^{(m)} = 0$ ,  $\sigma_{33}^{(m)} = 0$  ( $m = 1, 3$ ), построено при помощи интегрального преобразования Фурье:

$$(1.3) \quad U_k^{(m)} = \overset{\circ}{U}_k^{(m)} + S_k^{(m)} \quad (k, m = 1, 3),$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{U}_k^{(m)}(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) &= (4\pi C_{55})^{-1} r_{km}(x_3, \xi_3) \int_{\sigma} \exp[ik\beta(\xi_1 - x_1)] \times \\ &\times \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \varphi_k^{(m)}(\lambda_j) \mu^{-1}(\lambda_j) \exp(-k\lambda_j |\xi_3 - x_3|) d\beta; \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} S_k^{(m)}(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) &= (4\pi C_{55})^{-1} \int_{\sigma} \exp[ik\beta(\xi_1 - x_1)] \times \\ &\times \sum_{r,p=1}^2 Q_{krp}^{(m)}(\beta) \Delta^{-1}(\beta) \mu^{-1}(\lambda_r) \exp[k(\lambda_r \xi_3 + \lambda_p x_3)] d\beta. \end{aligned}$$

Здесь

$$(1.5) \quad \begin{aligned} r_{km}(x_3, \xi_3) &= i(1 - \delta_{km}) \text{sign}(\xi_3 - x_3) + \delta_{km}, \\ \lambda_j &= \lambda_j(\beta) = [(2\gamma_5)^{-1}(-b(\beta) \pm d^{1/2}(\beta))]^{1/2}, \\ b(\beta) &= (\gamma_7^2 + 2\gamma_5\gamma_7 - \gamma_1)\beta^2 + 1 + \gamma_5, \quad c(\beta) = (\gamma_1\beta^2 - 1)(\gamma_5\beta^2 - 1), \\ d(\beta) &= b^2(\beta) - 4\gamma_5c(\beta), \quad \mu(\lambda) = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda, \end{aligned}$$

а также введены следующие параметры:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= C_{11}/C_{33}, \quad \gamma_5 = C_{55}/C_{33}, \quad \gamma_7 = C_{13}/C_{33}, \quad k^2 = \rho\omega^2/C_{33}, \\ \varphi_1^{(1)}(\lambda) &= \lambda^2 - \gamma_5\beta^2 + 1, \quad \varphi_1^{(3)}(\lambda) = \varphi_3^{(1)}(\lambda) = (\gamma_5 + \gamma_7)\lambda\beta, \\ \varphi_3^{(3)}(\lambda) &= \gamma_5\lambda^2 - \gamma_1\beta^2 + 1, \end{aligned}$$

$$Q_{11j}^{(m)}(\beta) = K_{1j}^{(m)}(\beta) \varphi_1^{(3)}(\lambda_j) (i\beta)^{\varkappa_m} \quad (\varkappa_1 = 0, \varkappa_3 = 1),$$

$$Q_{31j}^{(m)}(\beta) = K_{1j}^{(m)}(\beta) R_{3j}(\beta) \quad (j = 1, 2),$$

$Q_{k22}^{(m)}(\beta)$  и  $Q_{k21}^{(m)}(\beta)$  получаются из  $Q_{k11}^{(n)}(\beta)$  и  $Q_{i12}^{(m)}(\beta)$  соответственно заменой  $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ ;

$$(1.6) \quad K_{11}^{(1)}(\beta) = \lambda_1\lambda_2 A(\lambda_1) P(\lambda_2) - \beta^2 Q(\lambda_2) B(\lambda_1),$$

$$K_{12}^{(1)}(\beta) = \beta^2 Q(\lambda_1) B(\lambda_1) - A(\lambda_1) \lambda_1^2 P(\lambda_1),$$

$$K_{11}^{(3)}(\beta) = -\beta(\lambda_1 P(\lambda_1) Q(\lambda_2) + \lambda_2 P(\lambda_2) Q(\lambda_1)),$$

$$K_{12}^{(3)}(\beta) = 2\lambda_1 P(\lambda_1) Q(\lambda_1), \quad A(\lambda) = \lambda^2 + \gamma_7\beta^2 + 1,$$

$$B(\lambda) = \gamma_5\lambda^2 + \gamma_5\gamma_7\beta^2 - \gamma_7, \quad P(\lambda) = (\gamma_7^2 + \gamma_5\gamma_7 - \gamma_1)\beta^2 + \gamma_5\lambda^2 + 1,$$

$$Q(\lambda) = \gamma_1\beta^2 + \gamma_7\lambda^2 - 1, \quad R_{3j} = \gamma_5\lambda_j^2 - \gamma_1\beta^2 + 1,$$

$$\Delta(\beta) = \beta(\gamma_5 + \gamma_7)(\lambda_2 - \lambda_1) [\lambda_1\lambda_2(\beta^2(\gamma_1 - \gamma_7^2) - 1) - (\gamma_1\beta^2 - 1)].$$

Подынтегральные функции в (1.4) — (1.6) имеют две пары точек ветвления на вещественной оси:  $\beta = \pm \gamma_1^{-1/2}$ ,  $\beta = \pm \gamma_5^{-1/2}$ , а также еще две пары, определяемые из уравнения  $d(\beta) = 0$ . Отметим, что в зависимости от сочетания упругих постоянных у этого уравнения могут быть вещественные, чисто мнимые и комплексные корни [3]. Кроме того, функция  $\Delta(\beta)$  имеет нуль на вещественной оси, что отвечает рэлеевской волне для ортотропной полуплоскости [4]. Контур  $\sigma$  всюду совпадает с вещественной осью, за исключением вещественных полюсов и точек ветвления, которые он обходит в соответствии с принципом предельного поглощения следующим образом: положительные огибаются снизу, а отрицательные — сверху.

2. На основе динамической теоремы взаимности [5] и анализа предельных значений фундаментального решения [2] задача сведена к системе ГНУ относительно смещений на границе полости:

$$(2.1) \quad \frac{1}{2} u_m(y) + \int \sigma_{kj}^{(m)}(x, y) n_j(x) u_k(x) dl_x = u_m^{\text{пр}}(y), \quad x = (x_1, x_3), y = (y_1, y_3) \in l.$$

Отметим, что интеграл в (2.1) понимается в смысле главного значения по Коши и  $u_m^{\text{пр}}(y) = - \int_{l_1} p(x_1) U_3^{(m)}(x_1, 0, y) dx_1$  есть эталонные смещения в среде без полости.

Здесь  $\sigma_{kj}^{(m)}(x, y)$  находится согласно определяющим соотношениям (1.2), в которых вместо  $\epsilon_{ij}$  подставлено  $\epsilon_{ij}^{(m)} = (1/2)(U_{i,j}^{(m)} + U_{j,i}^{(m)})$ , а  $U_j^{(m)}$  в свою очередь имеют вид (1.3).

Интегральные уравнения вида (2.1) эффективно анализируются с помощью метода ГЭ, согласно которому граница полости  $l$  аппроксимируется ломаной  $l_0$ , состоящей из  $N$  элементов. Пусть  $(x_{1p}^-, x_{3p}^-)$  — координаты начала  $p$ -го элемента, а  $(x_{1p}^+, x_{3p}^+)$  — его конца, тогда узлами будут точки с координатами  $(y_{1p}, y_{3p})$ , причем

$$y_{kp} = (x_{kp}^- + x_{kp}^+)/2 \quad (k=1, 3, p=1, 2, \dots, N).$$

При дискретизации будем считать, что компоненты вектора перемещений  $u_m$  постоянны на элементе  $p$  и равны значениям смещений в соответствующем узле:

$$(2.2) \quad u_m(y_{1p}, y_{3p}) = u_{mp}.$$

Используя метод коллокаций, потребуем, чтобы система (2.1) была выполнена для узловых точек  $(y_{1q}, y_{3q})$  при  $q=1, 2, \dots, N$ . В результате придем к линейной алгебраической системе относительно неизвестных узловых перемещений порядка  $2N$ :

$$(2.3) \quad u_{mp}/2 + \sum_{r=1}^N a_{mprj} u_{jr}^- = g_{mp} \quad (m, j=1, 3, p=1, 2, \dots, N).$$

Здесь

$$(2.4) \quad a_{mprj} = \int_{l_r} \sigma_{jk}^{(r)}(y_{1p}, y_{3p}, x_1, x_3) n_k(x_1, x_3) dl_x,$$

$$g_{mp} = u_m^{\text{пр}}(y_p) \quad (m, j=1, 3, p=1, 2, \dots, N).$$

Отметим, что в (2.4)  $a_{mprj}$  после интегрирования по элементу представлены в виде однократных интегралов по контуру  $\sigma$ , как это выполнено в [6], которые в силу громоздкости получаемых выражений в данной работе не приводятся. Решив систему (2.3) и найдя значения узловых перемещений, определим волновое поле на границе полуплоскости:

$$(2.5) \quad u_m(\xi_1, 0) = - \sum_{r=1}^N a_{mj}(\xi_1, 0, y_{1r}, y_{3r}) u_{jr} + g_m(\xi_1, 0),$$

$$a_{mj}(\xi_1, 0, y_{1r}, y_{3r}) = \int_{-1}^1 (-\sigma_{j1}^{(m)}(\xi_1, 0, y_{1r} + \beta_{1r}t, y_{3r} + \beta_{3r}t) \beta_{3r} + \sigma_{j3}^{(m)}(\xi_1, 0, y_{1r} + \beta_{1r}t, y_{3r} + \beta_{3r}t) \beta_{1r}) dt.$$

Для расчета волнового поля на границе полуплоскости составлена программа на языке Фортран для ЭВМ ЕС-1055, которая определяет узловые перемещения на границе полости, а затем вычисляет волновое поле на границе полуплоскости по формуле (2.5) при заданном числе точек разбиения полости, причем интегралы по контуру  $\sigma$  вычисляются

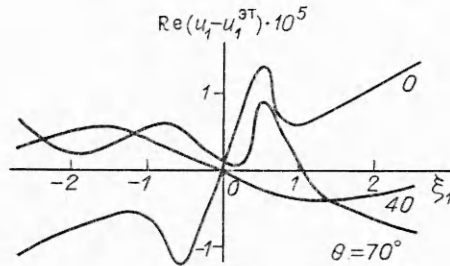


Рис. 1

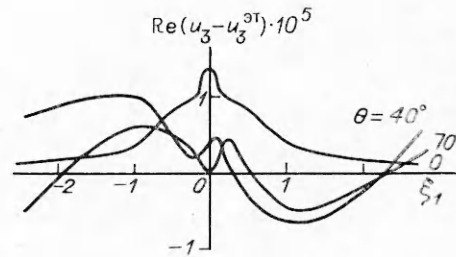


Рис. 2

по квадратурным формулам Гаусса. При численной реализации в качестве источника колебаний взята сосредоточенная сила, приложенная в начале координат, т. е.  $p(x_1) = p\delta(x_1)$ . В качестве области  $l$  выбран эллипс с полуосями  $d_1, d_3$  и координатами центра  $x_{10}, x_{30}$ , повернутый относительно оси  $Ox_1$  на угол  $\theta_i = \pi i/18, i = 1, 2, \dots, 9$ . Расчеты приведены (аустенитная сталь) для

$$C_{11} = 26,27 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad C_{13} = 14,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ C_{33} = 21,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad C_{55} = 12,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$$

и геометрических параметров

$$d_1 = 0,2, \quad d_3 = 0,1, \quad x_{10} = 0, \quad x_{30} = -0,5.$$

При аппроксимации полости  $l$  использовались 8 и 16 элементов. Отметим, что относительная погрешность определения перемещений на границе полуплоскости при 8 и 16 элементах не превосходит 5%. Кроме того, сравнивались результаты расчетов волнового поля на поверхности при аппроксимации полости вписанным и описанным 8-угольником, при этом при  $k \leq 3$  относительная погрешность не превосходила 6%. С ростом волнового числа  $k$  ( $k \geq 5$ ) отмечено снижение эффективности предложенного алгоритма, что связано с простейшей аппроксимацией неизвестных вида (2.2) на элементе. Однако схема дискретизации сохраняется и при аппроксимации неизвестных функций линейными и квадратными функциями на элементе, и коэффициенты системы (2.4) также выражены в виде однократных интегралов по контуру  $\sigma$ . На рис. 1, 2 приведены зависимости  $\text{Re}(u_1 - u_1^{\text{ст}})$  и  $\text{Re}(u_3 - u_3^{\text{ст}})$  от угла  $\theta$ , которые могут служить исходной информацией для решения обратных задач по определению формы дефекта по отраженному полю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.
2. Ватульян А. О., Гусева И. А., Сюнякова И. М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки.— 1989.— № 2.
3. Будаев В. С. Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ.— 1978.— № 3.

4. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Динамические контактные задачи для ортотропной упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ.—1990.—Т. 54, № 4.  
 5. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов.—М.: Мир, 1987.  
 6. Вагупьян А. О., Кацевич А. Я. Колебания упругого ортотропного слоя с полостью // ПМТФ.—1991.—№ 1.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 4/1 1992 г.

УДК 531.534

А. И. Весницкий, А. В. Метрикин

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЕ

При равномерном и прямолинейном движении источника возмущений в неоднородной среде возникает переходное излучение, имеющее место для волн различной природы. В [1, 2] дан обзор работ по переходному излучению электромагнитных и акустических волн. В [3] исследовано излучение упругих волн, возникающее при равномерном движении механического объекта по неоднородной упругой системе. Особенности переходного излучения в упругих системах связаны с взаимообусловленностью излучения и колебаний объекта, являющегося источником возмущений. В настоящей работе рассмотрен случай параметрического возбуждения колебаний объекта в процессе излучения.

Известно [4], что при движении источника возмущений в периодически неоднородной среде переходное излучение имеет в установившемся режиме дискретный спектр. В системе отсчета, связанной с движущимся источником возмущений, этот спектр оказывается эквидистантным. Таким образом, на равномерно движущийся по периодически неоднородной упругой системе объект в поперечном направлении действует сила, эквивалентная реакции пружины с периодически изменяющейся жесткостью. Такая ситуация, естественно, приводит к параметрическому возбуждению колебаний объекта [4], что и показано в данной работе. Необходимость изучения взаимодействия механического объекта с периодически неоднородными направляющими обусловлена, например, потребностями высокоскоростного железнодорожного транспорта. Движущийся по рельсовому пути состав при определенных условиях может начать «галопировать». В настоящей работе показано, что область параметров системы, при которых наступает «галопирование», расширяется с увеличением скорости движения состава.

1. Рассмотрим равномерное  $z = vt$  движение тела массы  $m$  по бесконечной струне, натяжение и погонная плотность которой соответственно  $N$  и  $\rho$ , лежащей на периодически неоднородном упругом основании. Положим, что жесткость основания описывается выражением

$$k(z) = k_0(1 + \mu \cos(2\pi z/d)),$$

где  $k_0$  — средняя жесткость;  $d$  — период неоднородности;  $\mu \ll 1$  — безразмерный малый параметр.

Согласно [5], задача, описывающая самосогласованное движение тела и струны, имеет вид

$$(1.1) \quad U_{tt} - U_{xx} + U(1 + \mu \cos(\kappa x)) = 0, \quad U(\alpha t, t) = y(t), \\ (1 - \alpha^2) [U_x]_{x=\alpha t} = M \dot{y}(t), \quad [U]_{x=\alpha t} = 0, \quad U \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm \infty.$$

Здесь  $U(x, t)$  — поперечное отклонение струны;  $x = zh/c$  и  $t = h\tau$  ( $c^2 = N/\rho$ ,  $h^2 = k_0/\rho$ ) — безразмерные координата и время;  $y(t)$  — поперечная координата тела;  $M = mh/c\rho$  и  $\alpha = v/c$  (в дальнейшем будем счи-