УДК 533.6.011 + 517.948.34

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В ТОНКОМ СЛОЕ

А. К. Хе

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрено стационарное трехмерное движение идеального газа в тонком слое переменной высоты. В приближении длинных волн уравнения газовой динамики сводятся к интегродифференциальной системе уравнений. Найдены обобщенные характеристики и условия гиперболичности полученной системы.

Ключевые слова: стационарная газовая динамика, интегродифференциальные уравнения, обобщенные характеристики.

1. Система уравнений. Рассмотрим стационарное трехмерное движение невязкого и нетеплопроводного газа. Система уравнений газовой динамики имеет вид

$$uu_x + vu_y + wu_z + \rho^{-1}p_x = 0,$$
$$uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y = 0, \qquad uw_x + vw_y + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0,$$
$$(\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \qquad uS_x + vS_y + wS_z = 0.$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости; p — давление; ρ — плотность; S — удельная энтропия. Система замыкается уравнением состояния

$$\rho = R(p, S).$$

Будем рассматривать течение газа между двумя твердыми стенками $z = 0$, $z = h(x, y)$, на которых выполняются граничные условия непротекания

$$w\big|_{z=0} = 0, \qquad w\big|_{z=h} = uh_x + vh_y.$$

Пусть L_0, U_0 — характерные горизонтальные масштаб и скорость течения, H_0 — вертикальный масштаб, R_0, S_0 — характерные плотность и энтропия.

После замены переменных

$$x = L_0x', \qquad y = L_0y', \qquad z = H_0z',$$
$$u = U_0u', \quad v = U_0v', \quad w = (U_0H_0/L_0)w', \quad \rho = R_0\rho', \quad p = R_0U_0^2p', \quad S = S_0S'$$

изменится только третье уравнение импульсов, которое примет вид (штрихи опущены)

$$\varepsilon^2(uw_x + vw_y + ww_z) + \rho^{-1}p_z = 0$$

($\varepsilon = H_0/L_0$). Приближение длинных волн связано с предположением, что $H_0 \ll L_0$ ($\varepsilon \ll 1$). В предельном случае $\varepsilon \to 0$ давление не зависит от вертикальной координаты:

$$p = p(x, y).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS (код проекта 01-868) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00767).

Оставшиеся уравнения упрощаются, если ввести лагранжеву координату $\lambda \in [0,1]$, параметризующую материальные поверхности от $z = 0$ до $z = h$ [1]. Введем переменную λ формулой

$$z = \Phi(x, y, \lambda), \qquad \lambda \in [0,1],$$

где функция Φ является решением начально-краевой задачи

$$u(x, y, \Phi)\Phi_x + v(x, y, \Phi)\Phi_y = w(x, y, \Phi),$$

$$\Phi\big|_{x=x_0} = \Phi_0(y, \lambda), \qquad \Phi\big|_{\lambda=0} = 0, \qquad \Phi\big|_{\lambda=1} = h.$$

Предполагается, что $u(x_0, y, \Phi_0) \neq 0$ и $\Phi_0\big|_{\lambda=0} = 0$, $\Phi_0\big|_{\lambda=1} = h$.

Тогда система уравнений длинноволнового приближения преобразуется к виду

$$uu_x + vu_y + \rho^{-1}p_x = 0, \qquad uv_x + vv_y + \rho^{-1}p_y = 0,$$

$$p_\lambda = 0, \qquad (uH)_x + (vH)_y = 0, \qquad uS_x + vS_y = 0,$$

где введена новая функция $H(x, y, \lambda) = \rho\Phi_\lambda$.

В силу того что $h = \int\limits_0^1 \Phi_\lambda \, d\lambda$, получаем формулу, связывающую давление и функции H, S:

$$h(x, y) = \int\limits_0^1 \frac{H}{R(p, S)} \, d\lambda.$$

Дифференцируя это соотношение, находим

$$\nabla p = \Big(\int\limits_0^1 \frac{HR_p}{R^2} \, d\lambda\Big)^{-1} \Big(\int\limits_0^1 \frac{\nabla H}{R} \, d\lambda - \int\limits_0^1 \frac{HR_S}{R^2} \nabla S \, d\lambda - \nabla h\Big).$$

Здесь оператор ∇ вычисляется по переменным x, y.

В итоге приходим к интегродифференциальной системе уравнений вида

$$A\boldsymbol{U}_x + B\boldsymbol{U}_y = \boldsymbol{G}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{U} = (u, v, H, S)^{\text{т}}$; $\boldsymbol{G} = (\sigma h_x, \sigma h_y, 0, 0)^{\text{т}}$; $\sigma = \Big(\int\limits_0^1 R^{-2} H R_p \, d\lambda\Big)^{-1}$; A, B — линейные операторы. Операторы A, B действуют на пробную функцию $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\text{т}}$ по правилам

$$A\boldsymbol{\varphi} = \Big(u\varphi_1 + \frac{\sigma}{R}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_3}{R} \, d\lambda - \frac{\sigma}{R}\int\limits_0^1 \frac{HR_S}{R^2} \varphi_4 \, d\lambda, u\varphi_2, u\varphi_3 + H\varphi_1, u\varphi_4\Big)^{\text{т}},$$

$$B\boldsymbol{\varphi} = \Big(v\varphi_1, v\varphi_2 + \frac{\sigma}{R}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_3}{R} \, d\lambda - \frac{\sigma}{R}\int\limits_0^1 \frac{HR_S}{R^2} \varphi_4 \, d\lambda, v\varphi_3 + H\varphi_2, v\varphi_4\Big)^{\text{т}}.$$

В работе [2] изучалось распространение стационарных возмущений в плоскопараллельном сдвиговом течении газа в канале переменного сечения, в [3] исследованы простые волны в пространственных течениях однородной жидкости, в [4] — трехмерные стационарные простые волны в течениях баротропной жидкости.

2. Характеристики и собственные функционалы. В работе [1] понятие гиперболичности систем дифференциальных уравнений с частными производными обобщено на случай дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами.

Пусть $\mathcal{B}$ — некоторое банахово пространство вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}(\lambda)$, операторы A, B действуют на пространстве $\mathcal{B}$. Тогда вектор (ξ, η) на плоскости (x, y) называется характеристическим, если пара (ξ, η) является решением задачи на собственные значения

$$\langle \boldsymbol{F}, (\xi A + \eta B)\boldsymbol{\varphi}\rangle = 0, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{F} \in \mathcal{B}'$ — искомый собственный вектор-функционал; $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{B}$ — произвольная пробная вектор-функция. Задача (2.1) решается для каждой фиксированной точки (x, y).

Кривая на плоскости (x, y) называется характеристикой уравнения (1.1), если направление нормали к ней в каждой точке параллельно направлению (ξ, η). Равенство

$$\langle \boldsymbol{F}, A\boldsymbol{U}_x + B\boldsymbol{U}_y\rangle = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}\rangle \tag{2.2}$$

называется соотношением на характеристике.

Система уравнений (1.1) называется гиперболической [1], если задача (2.1) имеет только действительные корни ξ, η и совокупность соотношений на характеристиках (2.2) эквивалентна системе (1.1).

Далее, рассмотрим уравнение (2.1) в некоторой фиксированной точке (x, y). В силу однородности уравнения относительно ξ, η можно считать, что $\xi^2 + \eta^2 = 1$, и ввести новую неизвестную величину γ — угол между касательной к характеристике и осью x:

$$\xi = -\sin\gamma, \qquad \eta = \cos\gamma.$$

Сделаем также замену переменных на плоскости годографа

$$u = q\cos\vartheta, \qquad v = q\sin\vartheta.$$

В силу независимости пробных функций φ_j уравнение (2.1) расщепляется на систему четырех уравнений

$$\langle F_1, \varphi_1 q\sin(\vartheta - \gamma)\rangle - \sin\gamma\,\langle F_3, H\varphi_1\rangle = 0, \qquad \langle F_2, \varphi_2 q\sin(\vartheta - \gamma)\rangle + \cos\gamma\,\langle F_3, H\varphi_2\rangle = 0,$$

$$\langle F_3, \varphi_3 q\sin(\vartheta - \gamma)\rangle + \sigma\int\limits_0^1 \frac{\varphi_3}{R}\,d\lambda\,\Big\langle -\sin\gamma\,F_1 + \cos\gamma\,F_2,\ \frac{1}{R}\Big\rangle = 0,$$

$$\langle F_4, \varphi_4 q\sin(\vartheta - \gamma)\rangle - \sigma\int\limits_0^1 \frac{HR_S}{R^2}\,\varphi_4\,d\lambda\,\Big\langle -\sin\gamma\,F_1 + \cos\gamma\,F_2,\ \frac{1}{R}\Big\rangle = 0.$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma \ne \vartheta(\lambda) + m\pi$ для всех $\lambda \in [0, 1]$, $m \in \mathbb{Z}$. В этом случае возможна замена пробной функции $\boldsymbol{\varphi}$ на $\boldsymbol{\varphi}/(q\sin(\vartheta - \gamma))$. В результате получаем выражение для функционалов

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \int\limits_0^1 \frac{H(-\varphi_1\sin\gamma + \varphi_2\cos\gamma)}{Rq^2\sin^2(\vartheta - \gamma)}\,d\lambda - \int\limits_0^1 \frac{\varphi_3}{Rq\sin(\vartheta - \gamma)}\,d\lambda + \int\limits_0^1 \frac{HR_S}{R^2}\,\frac{\varphi_4}{q\sin(\vartheta - \gamma)}\,d\lambda,$$

при этом соответствующее собственное значение γ должно удовлетворять характеристическому уравнению

$$\chi(\gamma) \equiv 1 - \sigma\int\limits_0^1 \frac{H}{R^2q^2\sin^2(\vartheta - \gamma)}\,d\lambda = 0. \tag{2.3}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в случае, когда $\gamma = \vartheta^\nu \equiv \vartheta\big|_{\lambda=\nu}$, функционалы

$$\langle \boldsymbol{F}^{1\nu}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \varphi_1^\nu \cos\vartheta^\nu + \varphi_2^\nu \sin\vartheta^\nu,$$

$$\langle \boldsymbol{F}^{2\nu}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = -(R\varphi_1)'\big|_{\lambda=\nu} \sin\vartheta^\nu + (R\varphi_2)'\big|_{\lambda=\nu} \cos\vartheta^\nu - \frac{R}{q\vartheta'\varphi_3} H\Big|_{\lambda=\nu}, \quad \langle \boldsymbol{F}^{3\nu}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \varphi_4,$$

$$\langle \boldsymbol{F}^{4\nu}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \langle F_0^\nu, -\varphi_1 \sin\vartheta^\nu + \varphi_2 \cos\vartheta^\nu\rangle - \\ - \sigma \int\limits_0^1 \frac{\varphi_3}{Rq \sin(\vartheta - \vartheta^\nu)}\, d\lambda + \sigma \int\limits_0^1 \frac{HR_S}{R^2}\, \frac{\varphi_4}{q\sin(\vartheta - \vartheta^\nu)}\, d\lambda$$

$$\Big(\langle F_0^\nu, \varphi\rangle = R^\nu \varphi^\nu + \sigma \int\limits_0^1 \frac{H(R\varphi - R^\nu\varphi^\nu)}{R^2 q^2 \sin^2(\vartheta - \vartheta^\nu)}\, d\lambda\Big)$$

являются собственными. Здесь и далее штрих обозначает частную производную по λ, а верхний индекс ν — значение функции при $\lambda = \nu$.

3. Условие отсутствия комплексных корней. Таким образом, показано, что решениями задачи (2.1) является множество значений ϑ^ν и γ^k, где $\vartheta^\nu = \vartheta\big|_{\lambda=\nu}$ $(\nu \in (0,1))$, а γ^k — множество решений (вообще говоря, комплексных) уравнения (2.3), не лежащих на отрезке $[\min_\lambda \vartheta, \max_\lambda \vartheta]$. Найдем теперь условия, при которых уравнение (2.3) имеет лишь действительные корни γ.

Рассмотрим только случай, когда функция $\vartheta(\lambda)$ монотонная. Пусть для определенности $\partial\vartheta/\partial\lambda > 0$. Обозначим $\vartheta^0 = \vartheta\big|_{\lambda=0}$, $\vartheta^1 = \vartheta\big|_{\lambda=1}$, причем $\vartheta^1 - \vartheta^0 < \pi$ (в противном случае функция $\chi(\gamma)$ не определена на вещественной оси).

Лемма 1. *Функция $\chi(\gamma)$ при действительных γ обладает следующими свойствами:*

1) *$\chi(\gamma)$ периодична с периодом π;*

2) *если $\sigma H/(R^2q^2\vartheta') \neq 0$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, то $\chi \to -\infty$ при $\gamma \to \vartheta^1 + 0$ и $\gamma \to \vartheta^2 - 0$, где $\vartheta^2 = \vartheta^0 + \pi$;*

3) *$\chi(\gamma)$ выпукла вверх (на периоде).*

Действительно, функция $\sin^2$ является π-периодической, поэтому справедливо свойство 1).

Заметим, что если значения γ различаются на величину, кратную π, то они определяют одну и ту же характеристическую нормаль.

Утверждение 2) следует из того, что функцию $\chi(\gamma)$ можно представить в виде

$$\chi(\gamma) = 1 + \frac{\sigma H}{R^2q^2\vartheta'}\, \operatorname{ctg}(\vartheta - \gamma)\Big|_{\lambda=0}^1 - \sigma \int\limits_0^1 \Big(\frac{H}{R^2q^2\vartheta'}\Big)' \vartheta' \operatorname{ctg}(\vartheta - \gamma)\, d\lambda.$$

Далее, вторая производная имеет вид

$$\chi''(\gamma) = -2\sigma \int\limits_0^1 \frac{H}{R^2q^2}\, \frac{1 + 2\cos^2(\vartheta - \gamma)}{\sin^4(\vartheta - \gamma)}\, d\lambda < 0,$$

откуда следует утверждение 3) леммы.

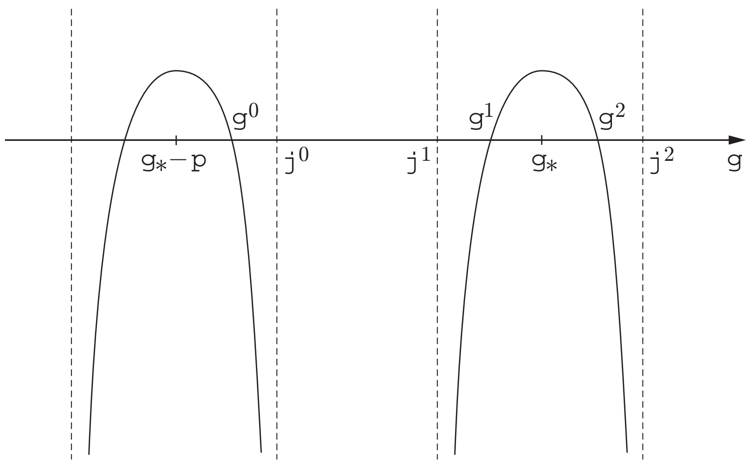

Рис. 1

График функции $\chi(\gamma)$ схематично представлен на рис. 1.

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. *На интервале* $(\vartheta^1, \vartheta^2)$ *функция* $\chi(\gamma)$ *достигает единственного максимума* $\chi(\gamma_*)$. *При этом если*

$$\chi(\gamma_*) > 0, \tag{3.1}$$

то характеристическое уравнение (2.3) *имеет два различных (с точностью до периода) вещественных корня* γ^1 *и* γ^2. *В точках* γ^1, γ^2 *выполняются неравенства*

$$\chi'(\gamma^1) > 0, \qquad \chi'(\gamma^2) < 0. \tag{3.2}$$

Если $\chi(\gamma_*) < 0$, *то уравнение* (2.3) *не имеет действительных корней.*

Неравенства (3.2) следуют из того, что $\chi'' < 0$.

Рассмотрим теперь функцию $\chi(\gamma)$ при комплексных значениях переменной γ. В силу периодичности $\chi(\gamma)$ достаточно рассмотреть полосу $\operatorname{Re}\gamma \in (\gamma_* - \pi, \gamma_*)$ (Re означает действительную часть комплексного числа). Сделаем замену переменных в интеграле функции χ (2.3)

$$t = \mathrm{e}^{2i\vartheta}, \qquad k = \mathrm{e}^{2i\gamma}. \tag{3.3}$$

Тогда t будет изменяться на дуге Γ единичной окружности от $t^0 = \mathrm{e}^{2i\vartheta^0}$ до $t^1 = \mathrm{e}^{2i\vartheta^1}$, а $k \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$. Края полосы $\operatorname{Re}\gamma = \gamma_* - \pi$ и $\operatorname{Re}\gamma = \gamma_*$ отображаются в берега разреза вдоль луча $\arg k = 2i\gamma_*$, которые можно склеить в силу периодичности функции $\chi(\gamma)$. Функцию $\chi(\gamma)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\chi(k) = 1 - \frac{2i\sigma t H}{R^2 q^2 \vartheta'(k-t)}\Big|_{t^0}^{t^1} - \sigma \int\limits_{\Gamma} \Big(\frac{H}{R^2 q^2 \vartheta'}\Big)' \frac{1}{\vartheta'} \frac{dt}{t-k}.$$

Пусть выполняется условие $\chi(\gamma_*) > 0$, т. е. существует два вещественных корня $\gamma^0 \in (\gamma_* - \pi, \vartheta^0)$ и $\gamma^1 \in (\vartheta^1, \gamma_*)$. Этим корням будут соответствовать точки $k^0 = \mathrm{e}^{2i\gamma^0}$ и $k^1 = \mathrm{e}^{2i\gamma^1}$, расположенные на единичной окружности комплексной плоскости. Заметим также, что комплексным корням функции $\chi(\gamma)$ соответствуют корни функции $\chi(k)$, не лежащие на единичной окружности.

Рассмотрим контур, состоящий из следующих элементов: внутреннего и наружного берегов разреза вдоль Γ, окружностей достаточно малого радиуса с центрами в точках t^0, t^1 и окружности достаточно большого радиуса с центром в начале координат (рис. 2).

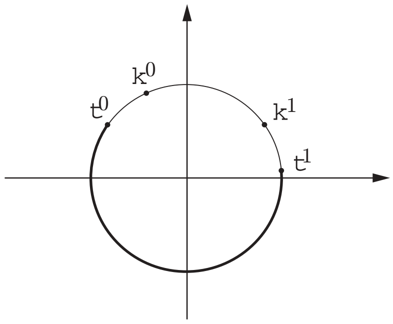

Рис. 2

Функция $\chi(k)$ в точках $k = t^0$, $k = t^1$ имеет особенности типа простого полюса, $\chi \to 1$ при $k \to \infty$, поэтому в силу принципа аргумента уравнение $\chi(k) = 0$ имеет только два корня k^0, k^1, если

$$\chi^+ \neq 0, \quad \Delta \arg \chi^+/\chi^- = 0 \quad \text{вдоль} \quad \Gamma. \tag{3.4}$$

4. Полнота системы собственных функционалов. Пусть выполняются условия (3.1) и (3.4) и уравнение $\langle \boldsymbol{F}^j, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \boldsymbol{F}^{l\nu}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$ ($j = 1, 2$; $l = 1, 2, 3, 4$; $\nu \in (0, 1)$). Докажем, что $\boldsymbol{\varphi} \equiv 0$.

Из уравнения $\langle \boldsymbol{F}^{3\nu}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$ получаем $\varphi_4 \equiv 0$.

Введем функцию $\psi = -\varphi_1 \sin\vartheta + \varphi_2 \cos\vartheta$. Из уравнения $\langle \boldsymbol{F}^{1\nu}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$ следует $\varphi_1 = -\psi \sin\vartheta$, $\varphi_2 = \psi \cos\vartheta$, а из уравнения $\langle \boldsymbol{F}^{2\nu}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$ находим $\varphi_3 = H(R\psi)'/(Rq\vartheta')$.

Тогда уравнение $\langle \boldsymbol{F}^{4\nu}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$ можно преобразовать к виду

$$R^\nu \psi^\nu + \sigma \int\limits_0^1 \frac{H(R\psi \cos(\vartheta - \vartheta^\nu) - R^\nu \psi^\nu)}{R^2 q^2 \sin^2(\vartheta - \vartheta^\nu)}\, d\lambda - \sigma \int\limits_0^1 \frac{H}{R^2 q^2 \vartheta'} \frac{(R\psi)'}{\sin(\vartheta - \vartheta^\nu)}\, d\lambda = 0.$$

Нетрудно проверить, что этому уравнению удовлетворяют функции $\psi = 1/(R \sin(\vartheta - \gamma^j))$, $j = 1, 2$. Полагаем

$$\psi = \psi_0 + \frac{C_1}{R \sin(\vartheta - \gamma^1)} + \frac{C_2}{R \sin(\vartheta - \gamma^2)}, \tag{4.1}$$

где константы C_1, C_2 выбраны так, чтобы $\psi_0 = 0$ при $\lambda = 0, 1$. Тогда уравнение для ψ_0 можно привести к следующему виду:

$$\Big(1 - \sigma \int\limits_0^1 \Big(\frac{H}{R^2 q^2 \vartheta'}\Big)' \operatorname{ctg}(\vartheta - \vartheta')\, d\lambda + \frac{\sigma H \operatorname{ctg}(\vartheta - \vartheta^\nu)}{R^2 q^2 \vartheta'}\Big|_{\lambda=0}^1\Big) R^\nu \psi_0^\nu + \\ + \sigma \int\limits_0^1 \Big(\frac{H}{R^2 q^2 \vartheta'}\Big)' \frac{R\psi_0}{\sin(\vartheta - \vartheta^\nu)}\, d\lambda = 0.$$

С помощью замены переменных (3.3) приходим к уравнению

$$\Big(1 - \sigma \int\limits_\Gamma \Big(\frac{H}{R^2 q^2 \vartheta'}\Big)' \frac{1}{\vartheta'} \frac{dt}{t - t^\nu} + \frac{2i\sigma t H}{R^2 q^2 \vartheta'} \frac{1}{t - t^\nu}\Big|_{t^0}^{t^1}\Big) \frac{R^\nu \psi_0^\nu}{\sqrt{t^\nu}} + \\ + \sigma \int\limits_\Gamma \Big(\frac{H}{R^2 q^2 \vartheta'}\Big)' \frac{1}{\vartheta'} \frac{R\psi_0/\sqrt{t}}{t - t^\nu}\, dt = 0. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) является сингулярным интегральным уравнением, союзным характеристическому, с ядром Коши для функции $R\psi_0/\sqrt{t}$.

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \Big(\frac{H}{R^2 q^2 \vartheta'}\Big)' \frac{1}{\vartheta'} \, \frac{R\psi_0/\sqrt{t}}{t - z} \, dt = 0,$$

которая определена на комплексной плоскости с разрезом вдоль Г. По свойствам интеграла Коши (4.2) функция $\Phi(z)$ будет ограниченной вблизи концов контура Г и исчезающей на бесконечности. В силу формул Сохоцкого — Племеля и свойств интеграла Коши [5] интегральное уравнение преобразуется к задаче сопряжения для функции $\Phi(z)$

$$\Phi^+(t^\nu) = G(t^\nu)\Phi^-(t^\nu),$$

где $G(t^\nu) = \chi^+(t^\nu)/\chi^-(t^\nu)$ — коэффициент задачи сопряжения. В силу условий (3.4) индекс задачи сопряжения будет равен нулю, поэтому согласно общей теории [5] задача имеет только тривиальное решение. Отсюда, используя формулы Сохоцкого — Племеля, получим $\psi_0 = 0$.

Заметим, что $\langle \boldsymbol{F}^j, 1/(R\sin(\vartheta - \gamma^k))\rangle = 0$ при $j \neq k$ $(j,k = 1,2)$, поэтому из (4.1) следует, что $C_j = 0$, так как

$$\Big\langle \boldsymbol{F}^j, \frac{1}{R\sin(\vartheta - \gamma^j)} \Big\rangle = \chi'(\gamma^j) \neq 0.$$

Из изложенного выше вытекает

Утверждение. При выполнении условий (3.1) и (3.4) уравнения (1.1) являются гиперболическими.

Автор выражает благодарность В. М. Тешукову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
2. **Тешуков В. М.** Модель длинноволновой аппроксимации для сдвигового течения газа в канале переменного сечения // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 1. С. 15–27.
3. **Тешуков В. М.** Пространственные простые волны на сдвиговом течении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 28–40.
4. **Хе А. К.** Стационарные простые волны на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 34–41.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 4/VI 2003 г.,
в окончательном варианте — 16/X 2003 г.