РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2014 № 1

УДК 539.37

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ПОРОД ВОКРУГ ВЫРАБОТКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ СМЕЩЕНИЙ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

А. И. Чанышев[1, 2], И. М. Абдулин[1]

[1]Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
[2]Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова ,2, 630090, г. Новосибирск, Россия

Напряженно-деформированное состояние (НДС) вокруг выработок определяется по значениям напряжений на “бесконечности”, т. е. требуется знание распределения напряжений в нетронутом массиве пород. Для выработки с произвольной геометрией сечения контура предлагается другой способ определения НДС, основанный на непосредственном измерении перемещений ее контура. Способ предполагает применение формул Колосова – Мусхелишвили. Рассмотрены выработки, имеющие формы кругового и эллиптического цилиндров.

Напряжения, деформации, смещения, измерение смещений, потенциалы Колосова – Мусхелишвили

В механике деформируемого твердого тела вообще и в механике горных пород в частности сложилась такая ситуация, когда основными являются 1, 2, 3-я краевые задачи. Если рассмотреть 2-ю краевую задачу, то здесь на всем контуре исследуемой области задаются только смещения (т. е. некоторая векторная функция), в 1-й краевой задаче задается вектор усилий — вектор Коши (т. е. производная по нормали от некоторой векторной функции, выражающей смещения). В 3-й краевой задаче на одной части границы тела задается сама функция, а на другой — производная по нормали.

Эти краевые задачи связаны с именами Дирихле, Неймана, Робена. Для них доказаны теоремы существования и в определенном смысле единственности решения. Следует отметить некоторые неудобства этих классических постановок. Во-первых, чтобы решать задачу, необходимо предварительно полностью указать геометрию всей области, возможные полости, трещины, включения в ней. Во-вторых, на всех границах, включая бесконечно удаленные точки, должны быть определены граничные условия.

Однако в горном деле это не всегда удается сделать. По существу, более близкой для геомеханики является следующая задача: дан какой-то один контур, на котором известен вектор напряжений Коши и, кроме того, на этом же контуре известен вектор перемещений. Задача состоит в том, чтобы, зная свойства среды, определить наличие возможных дефектов в самой среде, их расположение, геометрию, найти распределение напряжений, деформаций, смещений среды вне контура, в том числе условия нагружения массива пород на “бесконечности” и на самих дефектах.

Работа выполнена по проекту, поддержанному Министерством образования и науки РФ.

Как пример решения, рассмотрена задача о выработке с произвольной геометрией контура, на котором задаются переопределенные с точки зрения классики условия [1 – 6].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется протяженная цилиндрическая выработка, поперечное сечение которой имеет вид, показанный на рис. 1*а*. Предполагается, что контур выработки нагружен нормальным давлением σ_n и касательным напряжением τ_n. Кроме того, на контуре сечения заданы еще смещения. На произвольном контуре L (рис. 1*а*) горизонтальную и вертикальную составляющие вектора перемещений будем считать заданными функциями полярного угла θ:

$$u_x = u_x(\theta), \quad u_y = u_y(\theta). \tag{1}$$

Считаем также известными константы упругости массива пород: модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν. Задача заключается в том, чтобы по этим данным найти распределение напряжений, деформаций, смещений как на самом контуре выработки, так и за его пределами.

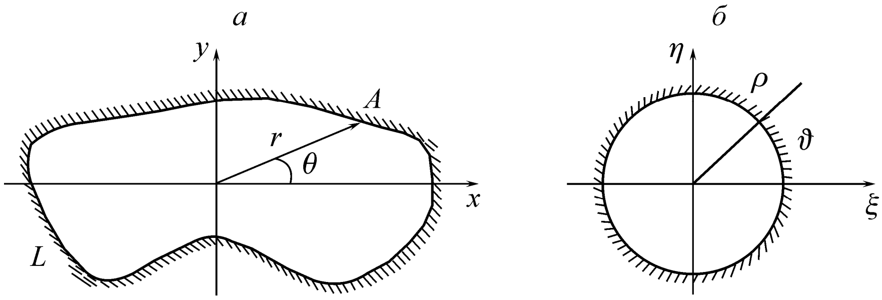

Рис. 1. Сечение выработки произвольной конфигурации (*а*) с контуром L и область деформирования (*б*) в комплексной плоскости ξ

Для решения задачи воспользуемся конформным отображением исходной области (рис. 1*а*) на внешность единичной окружности, изображенной на рис. 1*б*.

Далее используем формулы Колосова – Мусхелишвили [7]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \tag{2}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \tag{3}$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \aleph\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{4}$$

где

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)dz, \quad \psi(z) = \int \Psi(z)dz, \tag{5}$$

$\Phi(z)$, $\Psi(z)$ — комплексные потенциалы; $z = x + iy$, i — мнимая единица; 2μ — модуль сдвига; $\aleph = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона.

Отметим, что (2) выражает общее решение условия совместности напряжений ($\Delta\sigma = 0$, где Δ — лапласиан; σ — среднее значение), (3) — общее решение системы дифференциальных уравнений равновесия [8], (4) — связано с учетом закона Гука.

Пусть отображающая функция имеет вид

$$z = w(\xi), \tag{6}$$

где w — заданная комплексная функция.

Задача состоит в определении потенциалов $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ по заданным на границе сечения $r=r(\theta)$ граничным значениям функций $\sigma_n(r,\theta)$, $\tau_n(r,\theta)$, $u_x(r,\theta)$, $u_y(r,\theta)$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задачи требуется связь между углом, образуемым нормалью к контуру сечения выработки (рис. 2*а*), и отображающей функцией. Установим ее, исходя из рис. 2*б*.

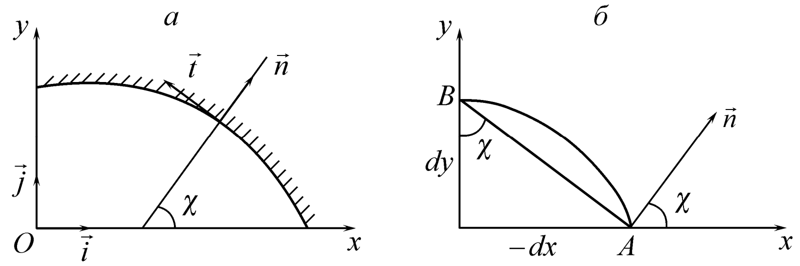

Рис. 2. Нормаль, образующая с осью *Ox* угол χ, и касательная $\vec{t}$ к контуру сечения выработки (*а*); параметры кривой *dx*, *dy* и нормаль $\vec{n}$ к ней (*б*)

При переходе из точки *A* в точку *B* ордината получает приращение *dy*, абсцисса — *dx*. В этом случае $\cos\chi = dy/ds$, $\sin\chi = -dx/ds$, $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$.

Из рис. 2*б* находим

$$e^{2i\chi} = \cos 2\chi + i\sin 2\chi = \frac{(dy)^2-(dx)^2-2i(dx)(dy)}{ds^2} = -\frac{(dx+idy)^2}{dz\,d\bar{z}} = -\frac{dz}{d\bar{z}} = -\frac{w'(\xi)d\xi}{\overline{w'(\xi)}d\bar{\xi}}. \qquad (7)$$

Далее, учитывая, что

$$\sigma_t-\sigma_n+2i\tau_{nt} = (\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})e^{2i\chi} = \sigma_\vartheta-\sigma_\rho+2i\tau_{\rho\vartheta}, \quad \sigma_t+\sigma_n=\sigma_x+\sigma_y=\sigma_\vartheta+\sigma_\rho, \qquad (8)$$

имеем

$$2(\sigma_\rho - i\tau_{\rho\vartheta}) = \sigma_x+\sigma_y-(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})e^{2i\chi}.$$

Используя (2), (3), (6), (7), получаем

$$\sigma_\rho+i\tau_{\rho\vartheta} = \Phi(\xi)+\overline{\Phi(\xi)}+\left[w(\xi)\frac{\overline{\Phi'(\xi)}}{\overline{w'(\xi)}}+\overline{\Psi(\xi)}\right]\frac{\overline{w'(\xi)}d\bar{\xi}}{w'(\xi)d\xi}. \qquad (9)$$

Рассмотрим теперь контур единичной окружности на рис. 1*б*. Свяжем полярный угол θ в плоскости *z* с полярным углом ϑ в плоскости ξ. Имеем $e^{i\theta}=\sqrt{z/\bar{z}}$. С учетом (6) находим

$$\theta = \frac{1}{2i}\ln\frac{w(\xi)}{\overline{w(\xi)}} = \frac{1}{2i}\ln\frac{w(\sigma)}{\bar{w}\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = \frac{1}{2i}\ln\frac{w(e^{i\vartheta})}{\bar{w}(e^{-i\vartheta})}, \qquad (10)$$

где σ — обозначение переменной ξ при $\xi\bar{\xi}=1$.

Обратимся теперь к формуле (4). Здесь смещения u_x, u_y на контуре выработки есть функции полярного угла θ или в силу (10) — полярного угла ϑ. Продифференцируем (4) по углу ϑ. Имея в виду, что

$$\sigma = e^{i\vartheta}, \quad d\sigma = ie^{i\vartheta}d\vartheta,$$

получаем

$$\frac{2\mu(u_x+iu_y)'_\vartheta}{i\sigma} = \aleph\varphi'(\sigma)-w'(\sigma)\overline{\Phi(\sigma)}+\left[w(\sigma)\bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\bar{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\bar{w}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]\frac{1}{\sigma^2}. \qquad (11)$$

Запишем теперь (9) на контуре выработки. При этом учтем, что

$$d\overline{\sigma} = d\left(\frac{1}{\sigma}\right) = -\frac{1}{\sigma^2}\,d\sigma\,, \tag{12}$$

тогда

$$\sigma_\rho + i\tau_{\rho\vartheta} = \Phi(\sigma) + \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \left[w(\sigma)\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \overline{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\overline{w}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]\frac{1}{w'(\sigma)}\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right). \tag{13}$$

Складывая (13), (11) (последнее поделим на $w'(\sigma)$), имеем уравнение для определения потенциала $\Phi(\sigma)$ (или $\Phi(\xi)$, или $\Phi(z)$) в виде

$$(1+\aleph)\Phi(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\vartheta} - \frac{2\mu i}{\sigma w'(\sigma)}(u_x + iu_y)'_\vartheta$$

или

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{1+\aleph}\left[\sigma_\rho + i\tau_{\rho\vartheta} - \frac{2\mu i}{\sigma w'(\sigma)}(u_x + iu_y)'_\vartheta\right]. \tag{14}$$

Отметим, что на основании (8)

$$\sigma_\rho + i\tau_{\rho\vartheta} = \sigma_n + i\tau_{nt}\,,$$

где σ_n, τ_{nt} — заданные нагрузки на контуре сечения выработки. Это означает, что справа в (14) стоит известная функция σ. Заменяя здесь σ на ξ, получаем $\Phi(\xi)$; заменяя ξ на z через отображение (6), получаем $\Phi(z)$.

После того как определена функция $\Phi(\sigma)$, требуется восстановить функцию $\Psi(\sigma)$. Если воспользоваться (9), то

$$\sigma_\rho - i\tau_{\rho\vartheta} = \Phi(\sigma) + \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \left[\overline{w(\sigma)}\,\frac{\Phi'(\sigma)}{w'(\sigma)} + \Psi(\sigma)\right]\frac{w'(\sigma)}{\overline{w}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)}.$$

Решая это уравнение относительно $\Psi(\sigma)$, получаем

$$\Psi(\sigma) = \left\{\Phi(\sigma) + \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sigma_\rho + i\tau_{\rho\vartheta}\right\}\frac{\overline{w}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2 w'(\sigma)} - \frac{\overline{w}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\Phi'(\sigma)}{w'(\sigma)}.$$

Здесь $\Psi(\sigma)$ — функция одного аргумента, комплексного числа σ. Заменяя в этом выражении σ на ξ, находим искомую функцию $\Psi(\xi)$:

$$\Psi(\xi) = \left\{\Phi(\xi) + \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \sigma_\rho + i\tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\sigma=\xi}\right\}\frac{\overline{w}'\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^2 w'(\xi)} - \frac{\overline{w}\left(\frac{1}{\xi}\right)\Phi'(\xi)}{w'(\xi)}. \tag{15}$$

Заменяя в (15) ξ на z посредством (6), получаем $\Psi(z)$, функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ восстанавливаем с помощью (5). Таким образом поставленная задача полностью решена.

Приведем пример решения задачи о НДС массива пород с цилиндрической выработкой эллиптического сечения с заданными на ее контуре, свободном от напряжений, перемещениями. Пусть в этой задаче считаются заданными радиальные перемещения и тангенциальные смещения u_r, u_θ (r, θ — полярная система координат). Для простоты определим их выражениями

$$u_r = R(A + B\cos 2\theta), \quad u_\theta = RC\sin 2\theta. \tag{16}$$

где A, B, C, R — эмпирические константы.

Параметр R свяжем с отображением эллиптического отверстия на внешность единичной окружности. Последнее зададим в виде

$$z = R\left(\xi + \frac{m}{\xi}\right), \tag{17}$$

где параметр m ($0 \le m < 1$) отвечает за отношение полуосей эллипса:

$$\frac{x^2}{R^2(1+m)^2} + \frac{y^2}{R^2(1-m)^2} = 1.$$

Составим выражение $u_r + iu_\theta$. С учетом (16) получаем

$$\frac{u_r + iu_\theta}{R} = A + B\cos 2\theta + iC\sin 2\theta. \tag{18}$$

Так как $e^{2i\theta} = z/\bar{z}$, то, подставляя сюда (17) при $\xi = \sigma$, находим

$$e^{2i\theta} = \frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2}.$$

Из этого выражения определяем

$$\cos 2\theta = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2} + \frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 + m}\right], \quad \sin 2\theta = \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2} - \frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 + m}\right].$$

Тогда

$$\frac{u_r + iu_\theta}{R} = A + \frac{B+C}{2}\frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2} + \frac{B-C}{2}\frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 + m}.$$

Для определения зависимости u_x, u_y от θ воспользуемся формулой

$$u_x + iu_y = (u_r + iu_\theta)e^{i\theta},$$

где $e^{i\theta} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2}}$.

Отсюда находим

$$\frac{u_x + iu_y}{R} = A\sqrt{\frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2}} + \frac{B+C}{2}\frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2}\sqrt{\frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2}} + \frac{B-C}{2}\frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 + m}\sqrt{\frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2}}.$$

Далее вычисляем производную от этой функции по σ:

$$\frac{(u_x + iu_y)'_\sigma}{R} = \frac{\sigma(1 - m^2)}{\sqrt{(\sigma^2 + m)(1 + m\sigma^2)}}\left[\frac{A}{1 + m\sigma^2} + \frac{3(B+C)(\sigma^2 + m)}{2(1 + m\sigma^2)^2} - \frac{B-C}{2(\sigma^2 + m)}\right].$$

Теперь вычисляем $\Phi(\sigma)$, применяя (14):

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{1+\aleph}\left[\sigma_\rho + i\tau_{\rho\vartheta} + \frac{2\mu}{w'(\sigma)}(u_x + iu_y)'_\sigma\right] =$$

$$= \frac{2\mu(1 - m^2)\sigma^3}{(1+\aleph)(\sigma^2 + m)\sqrt{(\sigma^2 + m)(1 + m\sigma^2)}}\left[\frac{A}{1 + m\sigma^2} + \frac{3(B+C)(\sigma^2 + m)}{2(1 + m\sigma^2)^2} - \frac{B-C}{2(\sigma^2 + m)}\right]. \tag{19}$$

Здесь учтено, что $\sigma_\rho = \tau_{\rho\vartheta} = \sigma_n = \sigma_{nt} = 0$.

Если $m=0$, то

$$\Phi(\sigma)=\frac{2\mu}{1+\aleph}\left[A+\frac{3(B+C)}{2}\sigma^2-\frac{B-C}{2\sigma^2}\right].$$

Таким образом, получаем

$$\Phi(\xi)=\frac{2\mu(1-m^2)\xi^3}{(1+\aleph)(\xi^2-m)\sqrt{(\xi^2+m)(1+m\xi^2)}}\left[\frac{A}{1+m\xi^2}+\frac{3(B+C)(\xi^2+m)}{2(1+m\xi^2)^2}-\frac{B-C}{2(\xi^2+m)}\right].$$

Для определения $\Psi(\xi)$ имеем выражение, следующее из (15):

$$\Psi(\xi)=\left[\Phi(\xi)+\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right]\frac{1-m\xi^2}{\xi^2-m}-\frac{\xi(1+m\xi^2)}{\xi^2-m}\Phi'(\xi)\,.$$

Поскольку на контуре выработки

$$\sigma_\rho+\sigma_\vartheta\Big|_{|\sigma|=1}=\sigma_\vartheta=2\left[\Phi(\sigma)+\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right],$$

то с учетом (19) находим

$$\sigma_\vartheta=\frac{4\mu(1-m^2)}{1+\aleph}\frac{1}{\sqrt{1+m^2+2m\cos\vartheta}}\left[\frac{2A(1-m^2)}{(1-m^2)^2+4m^2\sin^2 2\vartheta}+3(B+C)\times\right.$$

$$\times\frac{(m+\cos 2\vartheta)(1-2m^2+m(1-m^2)\cos 2\vartheta+m^2\cos 4\vartheta)+m((3-m)\sin 2\vartheta+m\sin 4\vartheta)\sin 2\vartheta}{(1-2m^2+m(1-m^2)\cos 2\vartheta+m^2\cos 4\vartheta)^2+m^2((3-m)\sin 2\vartheta+m\sin 4\vartheta)^2}-$$

$$\left.-(B-C)\frac{(1-m^2)\cos 2\vartheta}{(1-m^2)^2\cos^2 2\vartheta+(1+m^2)^2\sin^2 2\vartheta}\right].$$

На рис. 3 приведены расчетные кривые $\sigma_\vartheta=\sigma_t$ (тангенциального напряжения σ_t) на контуре выработки при значениях параметров $R=1$, $A=1$, $B=1$, $C=-1$ и разных значениях m и $\aleph$.

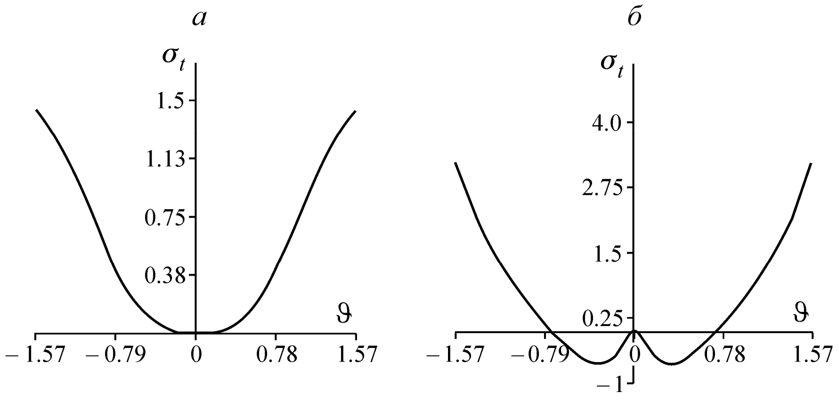

Рис. 3. Зависимость тангенциального напряжения σ_t от угла ϑ для случаев: *а* — $m=0.3$, $\aleph=2.2$; *б* — $m=0.7$, $\aleph=1.8$

Для $m=0$ зависимости напряжений σ_ρ, $\tau_{\rho\vartheta}$, σ_ϑ от полярных координат ρ, ϑ имеют вид, совпадающий с [7, 9]:

$$\sigma_\rho = \frac{2\mu}{1+\aleph}\left[2A\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)+\left(2B+C-\frac{2(B-C)}{\rho^2}-\frac{3C}{\rho^4}\right)\cos 2\vartheta\right],$$

$$\tau_{\rho\vartheta} = \frac{2\mu}{1+\aleph}\left[3(B+C)\rho^2-2B-C-\frac{1}{\rho^2}\left(B-C+\frac{3C}{\rho^2}\right)\right]\sin 2\vartheta,$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{2\mu}{1+\aleph}\left[2A\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)+\left(6(B+C)\rho^2-2B-C+\frac{3C}{\rho^4}\right)\cos 2\vartheta\right].$$

Отсюда для $\rho=1$ получаем

$$\sigma_\rho=0, \quad \tau_{\rho\vartheta}=0, \quad \sigma_\vartheta=\frac{8\mu}{1+\aleph}(A+(B+2C)\cos 2\vartheta).$$

Следует отметить, что значения напряжений $\tau_{\rho\vartheta}$, σ_ϑ при $\rho\to\infty$ стремятся к бесконечности. Чтобы эти решения были ограниченными на бесконечности, требуется положить $B + C = 0$.

ВЫВОДЫ

Построено решение плоской задачи о выработке произвольного сечения с известными значениями перемещений на ее контуре. Показано, что решение такой задачи существует, единственно и непрерывно зависит от входных параметров.

Как пример исследован случай выработки с эллиптическим сечением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шваб А. А.** Неклассическая упругопластическая задача // Изв. АН СССР. МТТ. — 1988. — № 1.
2. **Чанышев А. И.** К проблеме разрушения деформируемых сред. Ч. I: Основные уравнения // ФТПРПИ. — 2001. — № 3.
3. **Чанышев А. И., Абдулин И. М.** Характеристики и соотношения на характеристиках на запредельной стадии деформирования горных пород // ФТПРПИ. — 2008. — № 5.
4. **Чанышев А. И.** Об одном методе определения теплового состояния среды // ФТПРПИ. — 2012. — № 4.
5. **Миренков В. Е.** Связь напряжений и смещений на контуре выработки // ФТПРПИ. — 1978. — № 3.
6. **Миренков В. Е.** К вопросу решения упругопластических задач // ФТПРПИ. — 1979. — № 3.
7. **Мусхелишвили Н. Н.** Некоторые основные задачи математической теории упругости — М.: Наука, 1966.
8. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для мехмат. и физ. спец. университетов. — М.: Наука, 1988.
9. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наук. думка, 1968.

Поступила в редакцию 2/XII 2013