

УДК 533.6.011.5

Численная квадратурная формула для функции Прандтля–Майера при высокой температуре с приложением к воздуху

Т. Зеббиш, М. Баун-Джад

Университет СААД Далел Блidy, Блidy, Алжир

E-mail : z_toufik270169@yahoo.fr

При увеличении температуры торможения камеры сгорания или окружающего воздуха удельные теплоемкости и их отношение не остаются постоянными и начинают меняться. Газ остается совершенным, за исключением того, что он будет калорически несовершенным и термически совершенным. Разработана новая обобщенная форма функции Прандтля–Майера путем добавления влияния изменения этой температуры, более низкой, чем порог диссоциации. Представлено новое соотношение в виде интеграла от сложной аналитической функции, имеющей бесконечную производную при критической температуре. В этом контексте представлена надежная формула численной квадратуры. Классическая форма функции Прандтля–Майера совершенного газа становится частным случаем разработанной формы. Проведено сравнение с моделью совершенного газа с целью найти предел ее применимости. Приложения даны для воздуха.

Ключевые слова: сверхзвуковое течение, высокая температура, функция Прандтля–Майера, квадратура Гаусса–Лежандра, относительная ошибка.

В работе [1] была разработана новая форма функции Прандтля–Майера (ПМ) при высокой температуре (ВТ), которая применяется при высокой температуре торможения потока как обобщение ПМ-функции модели совершенного газа. Известно, что проектирование любых сверхзвуковых сопел основывается на применении метода характеристик, который формулируется с применением ПМ-функции. Сверхзвуковое течение рассчитывается в каждой выбранной точке поля, где необходимо вычислить значение ПМ-функции. Становится необходимым выбор эффективной квадратурной формулы, обеспечивающей быстрое и высокоточное вычисление.

Цель настоящей работы — представить надежную квадратурную формулу, обеспечивающую быстрое вычисление с учетом специфики функции [1]. Подынтегральное выражение всегда содержит критическую температуру. Можно вычислить функцию с очень высокой точностью при значительно уменьшенном количестве точек.

Согласно [1], значение v при числе Маха $M > 1 (T < T_*)$ и высокой температуре дается формулой

$$v(T) = \int_T^{T_*} F_v(T) dT, \quad (1)$$

где

$$F_v(T) = \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{2H(T)/a^2(T) - 1}. \quad (2)$$

Выражения для членов $M(T)$, $a(T)$ и $C_p(T)$ даны в работах [1, 2]. Для того, чтобы вычислить значение v , нужно проинтегрировать функцию $F_v(T)$, где применение аналитической процедуры невозможно из-за сложности этой функции. Функция $F_v(T)$ имеет член, известный как весовая функция, который приводит к сингулярности полученной формулы в точке $T = T_*$. В дальнейшем мы осуществим разложение функции с целью удаления сингулярности и после этого вычислим интеграл. Функция под знаком квадратного корня в соотношении (2) имеет корень $T = T_*$. Следовательно, это выражение делится на $(T_* - T)$. Умножим и разделим это соотношение на $\sqrt{T_* - T}$. Осуществим замену переменной $T = T_* - (T_* - T_S)x$ для того, чтобы преобразовать интервал $[T_S, T_*]$ в $[0, 1]$. Значение v_S можно получить вычислением следующего интеграла в интервале $[0, 1]$:

$$v_S = \int_0^1 w(x)f(x)dx, \quad (3)$$

где $w(x) = \sqrt{x}$ и

$$f(x) = \frac{(T_* - T_S)^{3/2} C_p(T)}{2H(T)a(T)} \sqrt{\frac{2H(T) - a^2(T)}{T_* - T}}. \quad (4)$$

На рис. 1 и 2 показаны, соответственно, $w(x)f(x)$ и $f(x)$ при $M_S = 6$. На рис. 1 видно, что функция $w(x)f(x)$ имеет бесконечную производную при $x = 0$. Рис. 2 отображает, что функция $f(x)$ регулярна в интервале $[0, 1]$ при любых T_0 и M_S .

Квадратурная формула Гаусса—Лежандра (ГЛ) является пригодной формулой численной квадратуры, когда подынтегральная функция имеет весовую функцию $w(x)$ вида \sqrt{x} . Квадратурная формула имеет следующий общий вид [3]:

$$v_S = \int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx = \sum_{j=1}^{j=N} b_j f(\eta_j). \quad (5)$$

Весовая функция не входит в вычисление суммы в правой части соотношения (5). Узлы интегрирования η_j и коэффициенты b_j при $N = 12$ приведены в табл. 1. Они даются, начиная с положительных корней многочлена Лежандра нечетного порядка 25 по формулам [3, 4, 5]

$$\eta_j = \zeta_j^2, \quad b_j = 2\sigma_j \zeta_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

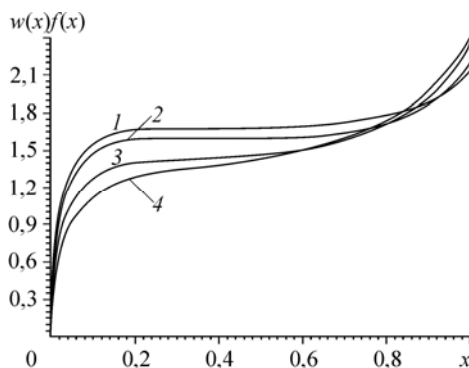


Рис. 1. График $w(x)f(x)$ при $M_S = 6,00$.

ВТ: $T_0 = 3000$ (1), 2000 (2), 1000 (3), 298,15 (4) К.

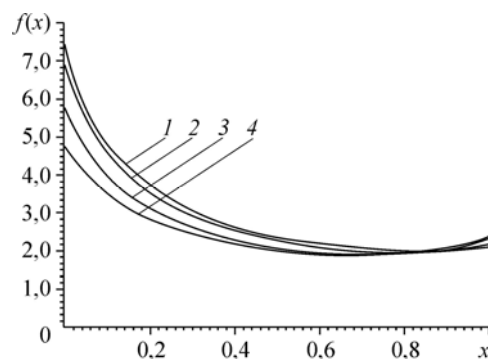


Рис. 2. График $f(x)$ при $M_S = 6,00$.

ВТ: $T_0 = 3000$ (1), 2000 (2), 1000 (3), 298,15 (4) К.

Таблица 1
X-координаты и ассоциированные коэффициенты квадратурной
формулы ГЛ с весовой функцией при $N = 12$

j	η_j	b_j
1	0,0150957326903243	0,0036906784746633
2	0,0594710569757861	0,0142083210796484
3	0,1304454344836689	0,0299654709534825
4	0,2237315839551131	0,0485585350762163
5	0,3336944609748679	0,0670965784946015
6	0,4536916527396207	0,0825975254591715
7	0,5764746285191373	0,0923981606785536
8	0,6946266154271490	0,0945224752917305
9	0,8010106761709498	0,0879584949065280
10	0,8892010419046903	0,0728062821925218
11	0,9538724158796266	0,0502785894275588
12	0,9911336801673817	0,0225855546319901

В общем случае имеется интерес в определении значения числа Маха в точках сверхзвукового потока. Получение значения ПМ-функции входит в вычислительную процедуру. Необходимо определить при заданном $v_S > 0$ соответствующее значение $T_S < T_*$ как решение (3). Эта задача называется обратной задачей.

Решение обратной задачи (3) находится с помощью алгоритма половинного деления [3] при $T_S < T_*$ (каждому значению T_0 соответствует свое значение T_* [2]). Значение T_S можно найти с точностью ε , если количество K интервалов половинного деления удовлетворяет следующему условию [6]:

$$K = 1,4426 \text{ Log } (T_0 / \varepsilon) + 1. \quad (7)$$

Для того, чтобы спроектировать двумерное сопло минимальной длины, обеспечивающее равномерный и параллельный поток в выходном сечении, необходимо задать угол наклона θ^* в горле (см. рис. 3) по формуле [7, 8, 9]:

$$\theta^* = v_E / 2. \quad (8)$$

Соотношение между θ^* и v_E должно определяться численно для осесимметричной геометрии сопла минимальной длины [10]. Соотношение (8) неверно в этом случае.

Мы знаем, что в зоне ядра имеется бесконечное число характеристик, выходящих из точки A и отражающихся на оси симметрии. Если в расчете хотят получить высокую точность, выбирают большое конечное число характеристик, что приводит к большим расходам машинного времени. Для минимизации времени

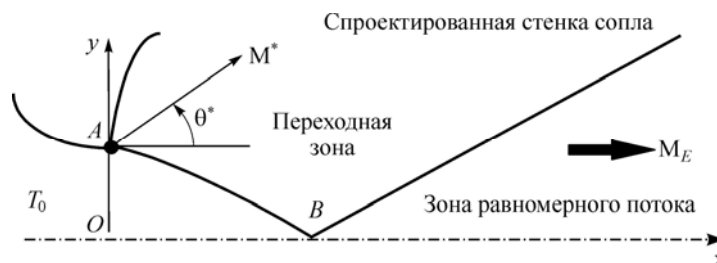


Рис. 3. Центр расширения для MLN-конфигурации.

A — центр расширения, AO — горло, AOB — зона ядра. $\theta = 0$; $M = 1$.

Таблица 2

Влияние на сходимость порядка квадратуры Гаусса–Лежандра

N	ν	N	ν	N	ν	N	ν
1	84,641265	4	97,471231	7	97,560368	10	97,561105
2	95,153892	5	97,542212	8	97,560962	11	97,561109
3	96,957355	6	97,557364	9	97,561082	12	97,561110

счета необходимо выбрать надежную процедуру для вычисления интеграла (5), где ν_S заменено на приращенное значение θ в точке A . Таким образом, эта точка является точкой разрыва параметров, где $0 \leq \theta \leq \theta^*$ и $1 \leq M \leq M^*$.

В табл. 2 представлено влияние порядка разработанного квадратурного правила Гаусса–Лежандра на сходимость задачи. Пример выбран для $T_0 = 3500$ К и $M_S = 6$. Этот пример требует повышенного порядка квадратуры по сравнению с другими значениями (T_0 , M_S) для достижения одной и той же желаемой точности. Данные результаты применения квадратурной формулы всегда ниже, чем точное решение, то есть имеет место монотонная сходимость решения. Мы можем заключить, что только 12 точек представленного квадратурного правила обеспечивают точность расчета 10^{-6} .

Тогда при произвольных (T_0 , M_S) можно использовать квадратурное правило максимального порядка $N = 12$, чтобы иметь более высокую точность с $\varepsilon = 10^{-6}$. Для того же примера квадратурные правила трапеций и Симпсона с постоянным шагом требуют минимального количества точек, указанных в табл. 3. В случаях квадратурных формул трапеций и Симпсона приходится контролировать число десятичных точек для достижения желаемой точности, поскольку формулы ошибок для этих квадратурных правил не дают никакой информации о минимальном количестве точек, необходимых для получения желаемой точности.

Можно обеспечить ту же точность ε , используя квадратурные правила трапеций и Симпсона при меньшем количестве точек, чем указано в табл. 3, если использовать сгущение узлов [11] в окрестности точки $T = T_*$ интервала интегрирования $[T_S, T_*]$. Для этого случая значения, получаемые по правилу Симпсона, приведены в табл. 3. Например, при $\varepsilon = 10^{-6}$ требуется только 3436 точек.

Значения, представленные в табл. 4, показывают, что в нашем расчете поля течения ($T_0 < 3500$ К, $M_S < 6,00$) максимальный порядок ГЛ-квадратуры не может превышать 12 для получения точности, лучшей, чем 10^{-6} .

Таблица 3

Эффективность квадратур при заданной точности

ε	Правило трапеций [6]	Правило Симпсона [3]	Правило Симпсона [1]	Квадратура ГЛ
10^{-2}	129	70	12	5
10^{-3}	1869	1002	38	7
10^{-4}	8686	4648	158	9
10^{-5}	40495	21644	716	10
10^{-6}	195551	104174	3436	12

Таблица 4

Минимальный порядок квадратуры ГЛ, дающий $\varepsilon = 10^{-6}$

T_0 , К	Число Маха					
	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1000	4	5	8	9	10	11
2000	4	6	8	9	10	10
3000	4	6	9	10	11	12

Таким образом, осуществлено обобщение формул Гаусса–Лежандра на случай регулярной функции, имеющей особенность первой производной, для вычисления функции Прандтля–Майера при высокой температуре применительно к сверхзвуковым внешним и внутренним течениям. Эта квадратурная формула позволяет осуществлять вычисление намного быстрее по сравнению с другими известными квадратурными формулами. Выигрыш во времени счета может достигать 350 % по сравнению, например, с квадратурной формулой Симпсона.

Список литературы

1. **Zebbiche T.** Stagnation temperature effect on the Prandtl Meyer function // AIAA J. 2007. Vol. 45, No. 4. P. 952–954.
2. **Zebbiche T., Youbi Z.** Supersonic flow parameters at high temperature. application for air in nozzles // Aeronaut. J. 2007. Vol. 111, No. 1115. P. 31–40.
3. **Raltson A., Rabinowitz A.** A first course in numerical analysis. McGraw Hill Book Company, 1985.
4. **Stroud A.H., Secrest D.H.** Gaussian quadrature formulas. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1966.
5. **Raltson A.** A family of quadrature formulas which achieve high accuracy in composite rules // J. Assoc. Comput. Mach. 1959. Vol. 6. P. 384–394.
6. **Demidovitch B., Maron I.** Eléments de calcul numerique. Moscou: Mir, 1987. 688 p.
7. **Zebbiche T., Youbi Z.** Supersonic two-dimensional minimum length nozzle design at high temperature. application for air // AIAA Paper. 2006. No. 2006-4599.
8. **Zebbiche T., Youbi Z.** Supersonic plug nozzle design at high temperature. application for air // AIAA Paper. 2006. No. 2006-0592.
9. **Anderson J.D., Jr.** Modern compressible flow: with historical perspective. New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1982. 650 p.
10. **Zebbiche T.** Stagnation temperature effect on the supersonic axisymmetric minimum length nozzle design with application for air // Advances in Space Research. 2011. Vol. 48. P. 1656–1675.
11. **Fletcher C. A. J.** Computational techniques for fluid dynamics: specific techniques for different flow categories, Vol. II. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

*Статья поступила в редакцию 16 июня 2011 г.,
после доработки — 20 февраля 2012 г.*