

**О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЛОСКИХ СЛОЕВ
ПРИ ОПИСАНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СЕРОГО ГАЗА**

В. П. Замураев

(Новосибирск)

При исследовании течения высокотемпературного газа учет его излучения приводит к появлению в уравнении энергии члена, представляющего собой интеграл по полю температур. Это существенно затрудняет решение конкретных задач. Поэтому в разных работах вводятся различные упрощения, облегчающие получение решения. Но в связи с этим возникает вопрос о соответствующей погрешности. В работе [1] дается оценка такой погрешности для пограничного слоя в прозрачном газе.

Ниже проводится оценка погрешности учета излучения в приближении плоских слоев для пограничного слоя около плоской пластинки длины l , обтекаемой в продольном направлении излучающе-поглощающим серым газом с температурой, постоянной вне пограничного слоя, при произвольном, но постоянном коэффициенте поглощения. Задача двумерная. Предполагается наличие локального термодинамического равновесия. Рассеянием излучения пренебрегается. Стенка светит как черное тело. Температура стенки постоянна.

При сделанных предположениях член в уравнении энергии, связанный с излучением, выражается через плотность излучения ϕ следующим образом:

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = \kappa(c\phi - 4\sigma T^4) \quad (1)$$

Здесь вектор \mathbf{q} — поток излучения, T — температура газа, σ — постоянная Стефана — Больцмана, c — скорость света, κ — коэффициент поглощения.

Это соотношение вытекает из уравнения переноса излучения.

Плотность излучения ϕ при рассматриваемых условиях определяется выражением

$$c\phi = \kappa \frac{\sigma}{\pi} \iint_{(x,y)} T^4(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa r} \frac{d\xi}{r^2} + \frac{\sigma}{\pi} T_0^4 \iint_{\Sigma} e^{-\kappa r} \frac{d\sigma}{r^2} \quad (2)$$

$$(r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2})$$

Система координат здесь выбрана таким образом, что ось x направлена вдоль пластины, ось y — поперек, ось z — перпендикулярно плоскости течения. Двойное интегрирование в первом слагаемом проводится по видимой части плоскости, проходящей через рассматриваемую точку с координатами x, y, z параллельно плоскости x, y ; во втором слагаемом — по поверхности Σ пластины, $d\sigma$ — элементарная площадка на поверхности пластины; T_0 — температура пластинки.

Выражение (2) для ϕ может быть преобразовано к виду

$$c\phi = \kappa \frac{2\sigma}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_*} T^4 I_1(\kappa\rho) \rho d\rho d\theta + \frac{2\sigma}{\pi} T_0^4 \int_{\pi+\theta_2}^{2\pi-\theta_1} I_2(\kappa\rho_*) d\theta \quad (3)$$

Здесь

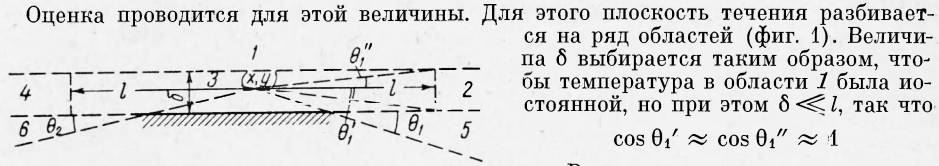
$$\xi - x = \rho \cos \theta, \quad \eta - y = \rho \sin \theta$$

$$I_n(t) = \int_1^{\infty} e^{-t\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha^n \sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad (n = 1, 2), \quad \rho_* = \begin{cases} -y \csc \theta & \text{при } \pi + \theta_2 < \theta < 2\pi - \theta_1 \\ \infty & \text{при } -\theta_1 < \theta < \pi + \theta_2 \end{cases}$$

Если температура в (2) или (3) — функция только η , причем при $\eta > 0$ такая же, как при $\xi = x$, а при $\eta \leq 0$ — const, равная температуре стенки, то плотность излучения, а следовательно, и $\operatorname{div} \mathbf{q}$ выражаются через E_n -функции ($n = 1, 2, 3$). Это и есть рассматриваемое здесь приближение плоских слоев.

Разность между точным и приближенным выражениями для плотности излучения будет

$$\Delta c\phi = \kappa \frac{2\sigma}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_*} [T^4(\xi, \eta) - T^4(x, \eta)] I_1(\kappa\rho) \rho d\rho d\theta \quad (4)$$



Фиг. 1

Оценка проводится для этой величины. Для этого плоскость течения разбивается на ряд областей (фиг. 1). Величина δ выбирается таким образом, чтобы температура в области 1 была постоянной, но при этом $\delta \ll l$, так что

$$\cos \theta_1' \approx \cos \theta_1'' \approx 1$$

Рассматриваемая точка лежит в области 3 достаточно далеко от краев пластинки.

Подынтегральная функция в (4), согласно выбору δ , в области 1 равна нулю. Оценка интеграла по области 2 дает

$$|\Delta c\varphi_2| \leq \sigma (T_2^4 - T_1^4) \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}} \left[\int_0^{\theta_1''} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-t} dt + \int_0^{\theta_1'} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-t} dt \right] \leq$$

$$\leq \sigma (T_2^4 - T_1^4) \frac{\delta}{l} e^{-\kappa l} [1 - E_2(\kappa l)] \quad \left(\theta_0 = \kappa \frac{\delta - y}{\sin \theta}, \theta_1 = \kappa \frac{l}{\cos \theta}, \theta_2 = \kappa \frac{y}{\sin \theta} \right)$$

Здесь T_2 — максимальное значение температуры, T_1 — минимальное. Оценка для области 4 получается такой же.

Для получения оценки по области 3 используются два члена ряда

$$T^4(\xi, \eta) - T^4(x, \eta) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial^n T^4}{\partial \xi^n} \Big|_{\xi=x} \frac{(\xi - x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial^n T^4}{\partial x^n} \frac{\rho^n}{n!} \cos^n \theta$$

так как его первый член (как и все остальные нечетные члены) дает нуль

$$|\Delta c\varphi_3| \leq 2\kappa\sigma \left\langle \left| \frac{\partial^2 T^4}{\partial x^2} \right| \right\rangle \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}} \left[\int_0^{\theta_0} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{l \sec \theta} \rho^2 e^{-\kappa \rho} d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_0^{1/2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\delta \cos \theta} \rho^2 e^{-\kappa \rho} d\rho \right] \approx 2\sigma \left\langle \left| \frac{\partial^2 T^4}{\partial x^2} \right| \right\rangle \kappa \left[\frac{\delta}{l} \int_0^l \rho^2 e^{-\kappa \rho} d\rho + \int_0^\delta \beta^2 d\beta \int_1^{l/\delta} t e^{-\kappa \beta t} dt \right] \approx$$

$$\approx 2\sigma \left\langle \left| \frac{\partial^2 T^4}{\partial x^2} \right| \right\rangle \frac{1}{\kappa^2} \frac{\delta}{l} \left\{ -\kappa l (\kappa l + 1) e^{-\kappa l} + \frac{l}{\delta} [2 - (\kappa \delta + 2) e^{-\kappa \delta}] \right\}$$

Здесь принималось $\text{tg } \theta_0 = \delta/l$, $\cos \theta_0 \approx 1$; угловые скобки означают среднее значение. Вторая производная $\partial^2 T^4 / \partial x^2$ по порядку величины равна $(T_2^4 - T_1^4) / l^2$, и это используется в окончательных результатах.

При оценке правой части соотношения (4) по области 5 используется предположение, что рассматриваемая точка находится достаточно далеко от краев пластинки, в результате чего получается неравенство

$$|\Delta c\varphi_5| \leq \frac{2}{\pi} \sigma (T_2^4 - T_1^4) \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}} \int_0^{\theta_1} \exp \frac{(-\kappa y) d\theta}{\sin \theta} \leq \frac{2}{\pi} \sigma (T_2^4 - T_1^4) \frac{\delta}{l} E_2(\kappa l)$$

Такая же оценка получается для области 6. Суммирование всех этих оценок дает

$$|\Delta c\varphi| \leq 2\sigma (T_2^4 - T_1^4) \frac{\delta}{l} \left\{ e^{-\kappa l} [1 - E_2(\kappa l)] - \frac{\kappa l + 1}{\kappa l} e^{-\kappa l} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 - (\kappa \delta + 2) e^{-\kappa \delta}}{\kappa^2 l \delta} + \frac{2}{\pi} E_2(\kappa l) \right\}$$

Погрешность в $\text{div } \mathbf{q}$ связана с погрешностью в плотности излучения φ соотношением

$$|\Delta \text{div } \mathbf{q}| = \kappa |\Delta c\varphi|$$

являющимся следствием уравнения (1).

Если теперь потребовать, чтобы погрешность в $\text{div } q$, вследствие использования приближения плоских слоев, не превосходила по порядку величины погрешности, допускаемой в уравнении энергии в теории пограничного слоя, то условие применимости приближения плоских слоев для рассматриваемого случая будет

$$\begin{aligned} \kappa l \left\{ e^{-\kappa l} [1 - E_2(\kappa l)] + \frac{2}{\pi} E_2(\kappa l) \right\} - (\kappa l + 1) e^{-\kappa l} + \frac{2 - (\kappa \delta + 2) e^{-\kappa l}}{\kappa \delta} &\leq \\ &\leq \frac{\rho_* u_* c_{p*} (T_2 - T_1) \delta}{2\sigma (T_2^4 - T_1^4)} \frac{\delta}{l} \end{aligned} \quad (5)$$

Величины, отмеченные звездочкой, — характерные значения параметров.

На фиг. 2 приведена кривая, полученная при знаке равенства в (5), для $\delta/l = 0.01$.

По оси абсцисс отложено $\mu = \lg \kappa l$; по оси ординат

$$\varepsilon = \lg \frac{\rho_* u_* c_{p*} (T_2 - T_1)}{2\sigma (T_2^4 - T_1^4)}$$

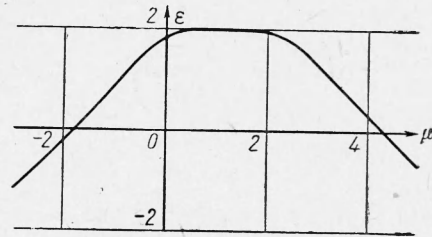
Выше этой кривой находится область применимости приближения плоских слоев.

Кривая имеет асимптоту

$$\varepsilon = -\mu + \lg [2(l/\delta)^2] \quad \text{при } \mu \rightarrow +\infty$$

асимптоту

$$\varepsilon = \mu + \lg (2l/\pi\delta) \quad \text{при } \mu \rightarrow -\infty$$



Фиг. 2

Как видно, существует значение ε , при больших значениях которого в пограничном слое для излучения справедливо приближение плоских слоев для любых значений κl . При $\delta/l > 0.01$ кривая будет лежать ниже, и область максимума будет уже.

Следует отметить, что в реальных задачах область излучающе-поглощающего газа конечна, и полученная здесь оценка в прозрачном случае может оказаться неприемлемой.

В заключение благодарю А. Т. Онуфриева и Ю. Д. Шмыглевского за полезное обсуждение работы.

Поступила 28 VIII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлова Л. М., Шмыглевский Ю. Д. О пограничном слое в излучающем газе. ПМТФ, 1964, № 1.

О КРИТЕРИЯХ ВЫПУЧИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. И. Ванько

(Новосибирск)

При изучении выпучивания стержней при ползучести за критерий «потери устойчивости» обычно принимается какая-то характерная особенность кривой прогиб — время. Например, обращение прогиба в бесконечность при конечном времени [1], точка минимума [2], точка перегиба [3, 4], обращение скорости прогиба в бесконечность [5, 6].

В настоящей работе на примере упруго-пластического стержня (модель Шэнли фиг. 1) выясняется качественный характер процессов выпучивания в зависимости от уровня нагрузки.

1. Рассматриваем упруго-пластический материал с линейным упрочнением (фиг. 2).

Все линейные величины будем относить к $1/2h$; индексы 1, 2 обозначают величины, относящиеся к первому или ко второму стерженькам соответственно; точка сверху обозначает дифференцирование по времени t ; за положительные приняты сжимающие напряжения, нагрузки и деформации сжатия; E — модуль Юнга; E_t — касательный модуль, принятый постоянным; $\sigma = P/F$, где F — суммарная площадь сечения стерженьков; все напряжения отнесены к Эйлерову напряжению $\sigma_s = Eh/4L$.

Для простоты примем степенной закон ползучести с нечетным показателем. Тогда скорости деформаций ε_1 и ε_2 в стерженьках выразятся зависимостями

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} + k_i \frac{\sigma_i}{\mu} + \left(\frac{\sigma_i}{\lambda} \right)^n \quad (i=1, 2), \quad \left(\mu = \frac{EE_t}{E - E_t} \right) \quad (1.1)$$