ПМТФ, № 4, 1962

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН

В. П. Коробейников, Е. В. Рязанов

(*Москва*)

В опытах с Т-образными и Н-образными ударными трубками [1-4] и в опытах с быстрыми электрическими разрядами вдоль прямолинейных проводников (см., например, [5]) образуются плоские и цилиндрические ударные волны. Законы распространения этих ударных волн близки к законам распространения сильных плоских или цилиндрических взрывных волн, образующихся при точечном взрыве [6,7]. Для теоретического описания аналогичных опытов с приложенным начальным магнитным полем и для опытов по взаимодействию с магнитным полем взрывных волн от плоских и цилиндрических зарядов обычных взрывчатых веществ может оказаться полезным исследование задачи о сильном плоском или цилиндрическом точечном взрыве в газе с учетом влияния приложенных магнитных полей. Задача о цилиндрическом и плоском взрыве может быть использована также при изучении вопросов обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа [8] при наличии магнитного поля.

1. Будем считать проводимость газа σ конечной и предполагать, что имеет место зависимость

$$\sigma = \sigma_1 \rho^n p^m \tag{1.1}$$

где σ_1, n, m — постоянные, p — давление, ρ — плотность газа.

Пусть магнитные числа Рейнольдса малы

$$R_m = \frac{ul}{\nu_m} < 1 \qquad \left(\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right)$$

Здесь u — характерная скорость, ν_m — магнитная вязкость, l — характерный размер, за который следует взять или высоту ударной трубки или радиус ударной волны. При малых R_m можно пренебречь [9] обратным влиянием течения газа на величину электрического и магнитного полей.

При больших числах Рейнольдса следует учитывать влияние течения газа на изменение магнитного поля. Будем считать газ совершенным с постоянным отношением удельных теплоемкостей. Как и в задаче Л. И. Седова [6], считаем, что возникновение взрывной волны обусловлено мгновенным выделением энергии вдоль прямой линии (оси симметрии) или вдоль плоскости (плоскости симметрии). Обозначим через ε_0 энергию взрыва, рассчитанную на единицу длины в цилиндрическом случае и на единицу площади — в плоском. Предположим, что вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ перпендикулярен вектору скорости течения $\mathbf{v}$. В цилиндрическом случае $\mathbf{H}$ может иметь как осевую (H_z), так и азимутальную (H_φ) компоненту. В плоском случае магнитное поле считаем направленным по оси z перпендикулярно направлению движения газа. Вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ перпендикулярен $\mathbf{H}$.

Решение рассматриваемой задачи сводится к интегрированию системы уравнений магнитной гидродинамики

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{f}, \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \frac{dp}{dt} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} = (\gamma - 1)\frac{j^2}{\sigma}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H}, \qquad \mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{1.3}$$

При этом следует учесть, что вектор **v** направлен перпендикулярно **E** и **H** и все искомые функции зависят лишь от времени и одной координаты r — расстояния от оси симметрии или от плоскости взрыва. Из системы (1.2) — (1.3) для данного случая имеем уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{r^{\nu-1}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^{\nu-1}v\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{\gamma p}{\gamma-1}\right)\right\}=r^{\nu-1}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \qquad (1.4)$$

где $\nu = 1$ в плоском случае, $\nu = 2$ — в цилиндрическом случае. При взрыве по газу начнет распространяться ударная волна. Условия на ударной волне имеют вид (1.5)

$$[\rho\,(v-D)]=0,\quad [\rho v\,(v-D)+p]=0,\quad \left[(v-D)\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)+pv\right]=0$$

$$[\mathbf{H}]=0,\qquad [\mathbf{E}_\tau]=0 \qquad (1.6)$$

где квадратными скобками обозначены разности значений величин на сторонах поверхности разрыва, D — скорость ударной волны, $\mathbf{E}_\tau$ — касательная составляющая электрического поля. Если считать ударную волну сильной, то можно пренебречь величиной начального давления газа по сравнению с давлением за фронтом ударной волны.

2. Рассмотрим задачу о сильном цилиндрическом и плоском взрыве в газе в предположении, что R_m малы, начальная плотность газа ρ_1 постоянна, начальное электрическое поле отсутствует, а начальное магнитное поле зависит от координаты следующим образом:

$$H^2=\varkappa_1 r^{\omega}\qquad (\varkappa_1=\mathrm{const}) \qquad (2.1)$$

$$\omega=0,\ \text{если}\ H=H_z;\quad \omega=-2,\ \text{если}\ \nu=2,\ H=H_\varphi$$

Выражения для j^2 и f_r — проекции силы **f** на направление r, будут

$$j^2=\frac{\sigma^2}{c^2}\{H_z^2+(\nu-1)H_\varphi^2\}v^2,\qquad f_r=-\frac{\sigma}{c^2}\{H_z^2+(\nu-1)H_\varphi^2\}v \qquad (2.2)$$

В этом случае система уравнений движения газа, полученная из (1.2), будет содержать размерную постоянную

$$\varkappa=\varkappa_1\sigma_1 c^{-2},\qquad [\varkappa]=\mathrm{M}^{1-m-n}\mathrm{L}^{m+3n-3-\omega}\mathrm{T}^{2m-1}$$

Решение задачи будет зависеть от следующих определяющих размерных параметров: r, t, ε_0, ρ_1, $\varkappa$. Из теории размерностей [7] следует, что задача о взрыве будет автомодельна, если выполнено условие:

$$\nu\,(2m-1)-2\,(\omega+1)=0$$

Введем безразмерные переменные V, R, P и λ по формулам

$$v=\frac{r}{t}V(\lambda),\qquad \rho=\rho_1 R(\lambda),\qquad p=\rho_1\frac{r^2}{t^2}P(\lambda),\qquad \lambda=\frac{r}{r_2} \qquad (2.3)$$

где r_2 — радиус ударной волны. В силу автомодельности для r_2 имеем [7]

$$r_2=\left(\frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{\nu+2}}t^{\frac{2}{\nu+2}},\qquad \varepsilon_0=\alpha\varepsilon \qquad (2.4)$$

где ε — некоторая постоянная, имеющая размерность ε_0, α — величина, способ вычисления которой будет объяснен ниже.

Учитывая (1.1), (2.1) — (2.4), из системы (1.2) получим следующие дифференциальные уравнения для автомодельных функций V, R и P:

$$\lambda\{(V-\delta)RV'+P'\}=R\,(V-V^2)-2P-k\lambda^a VR^nP^m$$

$$\lambda\{(V-\delta)R'+RV'\}=-\nu RV \qquad (2.5)$$

$$\lambda\{(V-\delta)P'+\gamma PV'\}=2P-(2+\nu\gamma)PV+(\gamma-1)k\lambda^aV^2R^nP^m$$

Здесь

$$\delta=\frac{2}{\nu+2},\qquad a=(\nu+2)(m-0.5),\qquad k=\varkappa\rho_1^{m+n-1}\left(\frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)^{m-0.5}$$

В рассматриваемом случае ($\mathbf{E} = 0$) из уравнения (1.4) следует, что система (2.5) имеет интеграл энергии

$$\lambda^{\nu+2}\left\{(V-\delta)\left(\frac{RV^2}{2}+\frac{P}{\gamma-1}\right)-PV\right\}=c_1 \qquad (c_1 = \mathrm{const}) \qquad (2.6)$$

Обозначим индексом 2 величины за фронтом ударной волны. Так как $D = dr_2 / dt$, а газ перед ударной волной покоится, то, переходя к безразмерным переменным, из (1.5) найдем

$$R_2(V_2-\delta)+\delta=0, \qquad R_2V_2(V_2-\delta)+P_2=0$$

$$(V_2-\delta)\left(\frac{R_2V_2^2}{2}+\frac{P_2}{\gamma-1}\right)+P_2V_2=0 \qquad (2.7)$$

Следовательно, искомые функции $V(\lambda)$, $R(\lambda)$ и $P(\lambda)$ должны удовлетворять на ударной волне (при $\lambda = 1$) условиям (2.7). Кроме того, должно выполняться условие постоянства полной энергии в области, занятой движущимся газом, т. е.

$$2\{(\nu-1)\pi-(\nu-2)\}\int_0^{r_2}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)r^{\nu-1}dr=\varepsilon_0$$

Переходя к безразмерным переменным, найдем формулу

$$\alpha(\nu,\gamma,m,n,k)=2\{(\nu-1)\pi-(\nu-2)\}\int_0^1\left(\frac{RV^2}{2}+\frac{P}{\gamma-1}\right)\lambda^{\nu+1}d\lambda \qquad (2.8)$$

Из последнего уравнения (2.7) следует, что постоянная c_1 в интеграле энергии (2.6) равна нулю. Введем новые переменные

$$y=\lambda^{\beta}R, \qquad z=\lambda^{\beta}P, \qquad \beta=\frac{(\nu+2)(m-0.5)}{m+n-1} \qquad (m+n-1\neq 0)$$

Система (2.5) в новых переменных примет вид

$$\lambda\{(V-\delta)yV'+z'\}=y(V-V^2)+(\beta-2)z-kVy^nz^m$$

$$\lambda\{(V-\delta)y'+yV'\}=\{(\beta-\nu)V-\beta\delta\}y \qquad (2.9)$$

$$\lambda\{(V-\delta)z'+\gamma zV'\}=(\beta-2-\nu\gamma)Vz+(2-\beta\delta)z+(\gamma-1)kV^2y^nz^m$$

Интеграл энергии (2.6) может быть записан так

$$z=y\frac{(\gamma-1)(\delta-V)V^2}{2(\gamma V-\delta)} \qquad (2.10)$$

Используя (2.10), решение системы (2.9) всегда можно свести к интегрированию уравнения первого порядка. Так, исключая z' из первого и третьего уравнений (2.9) и вводя новую переменную $\mu = \ln\lambda$, найдем

$$\frac{d\mu}{dV}=\chi(y,V)=\frac{\gamma z-(\delta-V)^2y}{(2-2\delta-\nu\gamma V)z+(1-V)(\delta-V)Vy+k(\gamma V-\delta)Vy^nz^m} \qquad (2.11)$$

Из второго уравнения (2.9) с учетом (2.11) получим

$$\frac{dy}{dV}=\frac{y}{\delta-V}\{1+((\nu-\beta)V+\beta\delta)\chi(y,V)\} \qquad (2.12)$$

При этом функция $z(y, V)$ определяется уравнением (2.10). Если уравнение (2.12) проинтегрировано, т. е. найдена зависимость $y(V)$, то из (2.10) можно определить $z(V)$, а из (2.11) при помощи квадратуры получить $\mu(V)$; следовательно, может быть найдено полное решение задачи.

Выше предполагалось, что $m+n-1\neq 0$. Можно показать, что и в случае $m+n-1=0$ решение системы (2.5) может быть сведено к интегрированию одного дифференциального уравнения первого порядка вида $d\lambda / dV = F(\lambda, V)$ и одной квадратуре.

Из (2.2) следует, что электромагнитная сила $\mathbf{f}$ и скорость $\mathbf{v}$ имеют противоположные направления. Это приводит к замедлению скорости потока по сравнению со скоростью газа при взрыве, когда магнитного поля нет. В потоке происходит также джоулева диссипация, в результате которой к частицам подводится тепло.

По газу течет ток, плотность которого задается первым соотношением (2.2). Если от системы отводить ток, то ее можно рассматривать как нестационарный магнитогидродинамический генератор. Отметим, что некоторые системы, использующие энергию взрывчатых веществ для генерирования электрического тока, рассмотрены в книге [10].

3. В случае больших чисел R_m для решения задачи о сильном взрыве следует учитывать изменение магнитного поля и рассматривать полную систему уравнений (1.2) — (1.3) магнитной гидродинамики.

Рассмотрим случай цилиндрической симметрии при условии, что $H_z = 0$, $m = 0$, $n = 0$, т. е. задачу о сильном цилиндрическом точечном взрыве, когда проводимость газа постоянна в области непрерывности гидродинамических параметров, а начальное магнитное поле переменно, причем $H^2 = H_\varphi{}^2 = \varkappa_1 r^{-2}$. В этом случае из (1.2) — (1.3) можно получить следующую систему уравнений:

$$\rho\frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial h_\varphi}{\partial r} + \frac{2h_\varphi}{r} = 0, \qquad \frac{dh_\varphi}{dt} + 2h_\varphi\frac{\partial v}{\partial r} - 2\nu_m h_\varphi^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi^{1/2})\right\} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right) = 0, \qquad \frac{dp}{dt} + \gamma p\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right) - \frac{2(\gamma-1)\nu_m}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi^{1/2})\right\}^2 = 0 \tag{3.1}$$

Здесь

$$h_\varphi = \frac{H_\varphi{}^2}{8\pi}, \qquad j_z = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi), \qquad E_z = \frac{j_z}{\sigma} - \frac{v}{c}H_\varphi$$

Если ввести безразмерные переменные H°, E° и I по формулам

$$h_\varphi = \rho_1\frac{r^2}{t^2}H^\circ, \qquad E_z = \frac{\sqrt{8\pi\varepsilon}}{ct}E^\circ, \qquad j_z = \frac{c}{t}\sqrt{\frac{\rho_1}{2\pi}}\,I$$

и воспользоваться формулами (2.3), то систему (3.1) можно записать так:

$$\lambda\left\{\left(V-\frac{1}{2}\right)RV' + P' + H^{\circ\prime}\right\} + RV(V-1) + 2(P+H^\circ) = 0$$

$$\lambda\left\{\left(V-\frac{1}{2}\right)R' + RV'\right\} + 2RV = 0$$

$$\lambda\left\{\left(V-\frac{1}{2}\right)P' + \gamma PV'\right\} - 2P + 2(\gamma+1)PV - \tag{3.2}$$

$$- \frac{2(\gamma-1)}{\lambda^4}A\left\{\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2\sqrt{H^\circ})\right\}^2 = 0$$

$$\lambda\left\{\left(V-\frac{1}{2}\right)H^{\circ\prime} + 2H^\circ V'\right\} - 2H^\circ + 4H^\circ V - \frac{2}{\lambda}\sqrt{H^\circ}A\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2\sqrt{H^\circ})\right\} = 0$$

Для E° и I имеем (3.3)

$$E^\circ = \frac{A}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2\sqrt{H^\circ}) - \lambda^2 V\sqrt{H^\circ}, \qquad I = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2\sqrt{H^\circ}) \qquad \left(A = \nu_m\left(\frac{\rho_1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right)$$

Здесь A — безразмерный постоянный параметр. Отметим, что система автомодельных уравнений, эквивалентная (3.2), была указана в книге [1] (стр. 236). Система (3.2) имеет следующий интеграл: (3.4)

$$\frac{RV^2}{2} + \frac{P}{\gamma-1} + H^\circ - 2V\left(\frac{RV^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}P + 2H^\circ\right) + \frac{4A}{\lambda^3}\sqrt{H^\circ}\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2\sqrt{H^\circ}) = c_2$$

Постоянная c_2 находится из граничных условий. Используя этот интеграл, можно понизить порядок системы (3.2).

Будем рассматривать случаи, когда движение газа сопровождается возникновением ударной волны. Из (1.5), (1.6) найдем граничные условия на фронте ударной волны (при $\lambda = 1$) для безразмерных функций V, R, P и H°

$$[R(V-\delta)] = 0, \qquad [RV(V-\delta)+P] = 0$$

$$\left[(V-\delta)\left(\frac{RV^2}{2}+\frac{P}{\gamma-1}\right)+PV\right] = 0 \tag{3.5}$$

$$[A(4H^\circ + H^{\circ\prime}) - 2VH^\circ] = 0, \qquad [H^\circ] = 0$$

Кроме того, должны выполняться условия на бесконечности

$$V_\infty = 0, \qquad R_\infty = 1, \qquad P_\infty = 0, \qquad H_\infty{}^\circ = 0 \quad \text{при } \lambda = \infty$$

и условие равенства нулю скорости на оси симметрии. Обозначим индексом 1 величины перед фронтом ударной волны (область *1*), а индексом 2 — за волной (область *2*). Радиус ударной волны определяется формулой (2.4). Из интегрального закона сохранения энергии найдем формулу для α, аналогичную формуле (2.8)

$$\alpha = 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{RV^2}{2} + \frac{P}{\gamma-1} + H^\circ - H^\circ{}_1(\lambda)\right)\lambda^3 d\lambda \tag{3.6}$$

Для полного решения задачи следует проинтегрировать систему (3.2) в областях *1* и *2* с учетом интеграла энергии (3.4). При этом нужно удовлетворить граничным условиям (3.5), условиям на бесконечности, условию в центре симметрии и вычислить постоянную α по формуле (3.6). Плотность тока и электрическое поле находятся по формулам (3.3).

Если $\sigma = 0$, то решение задачи известно из [6,7]. При малых магнитных числах Рейнольдса решение рассмотрено во втором пункте настоящей работы. При очень больших числах Рейнольдса ($R_m \gg 1$) задачу можно рассматривать в предположении бесконечной проводимости. В этом случае ее решение дано в [12,13].

Поступила 31 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolb A. C. Production of high-energy plasmas by magnetically driven shock waves. The Physical Review, 1957, vol. 107, № 2, p. 345—350.
2. Kolb A. C. Magnetically confined plasmas. The Physical Review, 1958, vol. 112 № 2, p. 291—296.
3. Кэш С. Опыты, выполненные в отделе ракетных систем компании Локхид. Сб. магнитная гидродинамика (материалы симпозиума), Атомиздат. 1958.
4. Kash S. W., Gauger I., Starr W., Vali V. Velocity measurements in magnetically driven shock tubes. The plasma in a magnetic field, Ed. by R. K. M. Landshoff, Stanford, 1958.
5. Лебедев С. В. Взрыв металла под действием электрического тока. ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 2, стр. 199—207.
6. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1, стр. 17—20.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
8. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
9. Брагинский С. И. К магнитной гидродинамике слабопроводящих жидкостей. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 5, стр. 1417—1430.
10. Linhart I. G. Plasma physics (second edition). Amsterdam, 1961.
11. Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П. Введение в космическую газодинамику. М., Физматгиз, 1958.
12. Коробейников В. П. Одномерные автомодельные движения проводящего газа в магнитном поле. Докл. АН СССР, 1958, т. 121, № 4, стр. 613—615.
13. Коробейников В. П. Об одномерных движениях газа в магнитном поле, сопровождающихся ударными волнами. ПМТФ, 1960, № 2, стр. 47—53.