нения $\Delta u(r) = u^2(r)$, $u(1) = 0$. Воспользуемся для этого некоторыми рассуждениями из [10].

Предположим противное. Тогда существуют, по крайней мере, два нетривиальных решения $u_1(r)$ и $u_2(r)$, $u_1(r) \not\equiv u_2(r)$ из класса C^2. Из общей теории квазилинейных эллиптических уравнений следует аналитичность функций $u_1(r)$ и $u_2(r)$ при $r < 1$. Обозначим $u_1(0) = c_1$ и $u_2(0) = c_2$ и положим для определенности $c_2 \geqslant c_1$. Заметим, что $c_1 < 0$ и $c_2 < 0$.

Тогда u_1 и u_2 — аналитические решения задачи Коши

$$u'' + (1/r)u' = u^2, \quad 0 < r < 1, \quad u(0) = c, \ u'(0) = 0 \tag{6.2}$$

с $c = c_1$ и $c = c_2$ соответственно.
Если $c_1 = c_2$, то в силу единственности решения задачи (6.2) в классе аналитических функций получаем $u_1(r) \equiv u_2(r)$ при $r \leqslant 1$.

В случае $c_2 > c_1$ рассмотрим функцию $v(r) = k^2 u_1(kr)$ с $k = \sqrt{c_2/c_1} < 1$. Тогда эта функция является решением задачи (6.2) с $c = c_2$, и в силу единственности решения ее в классе аналитических функций имеем $u_2(r) = k^2 u_1(kr)$ при $r < 1$. Полагая в этом тождестве предельное $r = 1$, находим $u_2(1) = k^2 u_1(k) < 0$, что противоречит граничному условию для решения u_2.

Таким образом, установлена единственность нетривиального решения краевой задачи (6.1) в круге $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Исследование газовых течений с прямой звуковой линией: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Л., 1948.
2. **Похожаев С. И.** Аналог метода Шмидта для нелинейного уравнения // ДАН СССР.— 1960.— Т. 136, № 3.
3. **Похожаев С. И.** О задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = u^2$ // ДАН СССР.— 1960.— Т. 136, № 4.
4. **Похожаев С. И.** О краевой задаче для уравнения $\Delta u = u^2$ // ДАН СССР.— 1961.— Т. 138, № 2.
5. **Похожаев С. И.** Об одном подходе к нелинейным уравнениям // ДАН СССР.— 1979.— Т. 247, № 6.
6. **Похожаев С. И.** Об одном конструктивном методе вариационного исчисления // ДАН СССР.— 1988.— Т. 298, № 6.
7. **Dancer E. N.** On non-radially symmetric bifurcation // J. London Math. Soc.— 1979.— V. 20, N 2.
8. **Cidas B., Ni Wei-Ming, Nirenberg L.** Symmetry and related properties via the maximum principle // Comm. Math. Phys.— 1979.— V. 68, N 3.
9. **Фарлоу С.** Уравнение с частными производными.— М.: Мир, 1985.
10. **Похожаев С. И.** Исследование краевой задачи для уравнения $\Delta u = u^2$: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1961.

Поступила 3/VIII 1988 г.

УДК 517.95

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНОСТЬ И УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. М. Шугрин

(*Новосибирск*)

В большом цикле работ, выполненных Л. В. Овсянниковым, его учениками и последователями, были проанализированы групповые свойства многих уравнений математической физики и показана полезность знания групповых свойств уравнений для их классификации и для нахождения частных решений (см., например, [1—3]). Возможна и обратная постановка задачи — по заданной группе, иногда с дополнительным предположением о законе преобразования искомых величин, отыскать класс дифференциальных уравнений, инвариантных относительно этой группы [4, 5]. Подобная постановка проблемы по сути возникла примерно одновременно с теорией относительности, когда физики и математики стали искать уравнения, описывающие динамику некоторого круга явлений, опираясь на знание законов инвариантности. С этой позиции наиболее фундаментальным объектом оказывается группа, а динамическое уравнение — своего рода «дифференциальным представлением» этой группы

И, подобно тому как существует содержательная теория линейных представлений групп, имеет право на существование теория «дифференциальных представлений». В этой связи надо обратить внимание на важность рациональных структурных ограничений класса искомых уравнений. Фундаментальные уравнения механики и теоретической физики обладают определенной структурой. Они обычно квазилинейны, и допускают полный набор законов сохранения (см. п. 1), и, следовательно, имеют симметрическую структуру [6—12]. Второе простое, но полезное наблюдение состоит в том, что искомые величины, как правило, имеют определенный тензорный тип (скаляры, векторы и т. д.) по отношению к подходящим преобразованиям. Это же справедливо и для основных законов сохранения (массы, импульса и др.). Только в квантовой механике появляются величины иного рода — спинорные. Тем самым априори классифицируются как искомые величины, так и основные законы сохранения соответственно простейшим тензорным типам (более обще — в соответствии с неприводимыми представлениями фундаментальных групп). Далее, исходя из этой классификации отыскиваются инвариантные уравнения. Отсюда, по крайней мере в принципе, должна получаться полная классификация элементарных типов дифференциальных уравнений механики и теоретической физики, т. е. полное структурное перечисление возможных их форм (с точностью до эмпирически определяемых констант и уравнений состояния). Для описания «составных» типов («смесей» и пр.), по-видимому, понадобятся дополнительные структурные ограничения. С логической точки зрения подобная классификация должна лежать в основе общей теории математической физики.

В данной работе проиллюстрированы некоторые характерные аспекты проблемы на примере уравнений газовой динамики — галилеевых и лоренцевых.

1. Законы сохранения. Пусть $x \equiv (x^0, \ldots, x^n) \in \Omega$, Ω — область в R^{n+1}, $w(x) \in R^m$, $\varphi^k(w(x)) \in R^s$ $(k = 0, \ldots, n)$, $f(w(x)) \in R^s$.

В связи с основными целями работы рассматриваются законы сохранения только первого порядка относительно производных и с входящими в них функциями, зависящими явно только от w.

Законом сохранения называется соотношение вида

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^k} = f, \tag{1.1}$$

выполняющееся всюду в Ω. Закон сохранения *точен*, если $f = 0$.

Обычно функции $w(x)$ удовлетворяют некоторому условию (принадлежат классу K), например некоторому уравнению. В таком случае требуется, чтобы (1.1) было верно для любого $w \in K$, например для любого гладкого решения. Обозначим через $(a|b)$ эвклидово скалярное произведение векторов a и b.

Система законов сохранения (1.1) называется *полной*, если

а) число уравнений равно размерности w, т. е. $s = m$;

б) существует гладкая функция $u(w) \equiv (u_{(1)}, \ldots, u_{(m)})$ такая, что после скалярного умножения (1.1) на u получается еще один закон сохранения

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^k} = h, \tag{1.2}$$

где $\psi^k = \psi^k(w) \in R$; $h = h(w) \in R$;

$$d\psi^k \equiv (u|d\varphi^k), \quad h = (u|f); \tag{1.3}$$

в) отображение $w \to u(w)$ локально взаимно однозначно.

Законы сохранения (1.1) называются *базисными*, (1.2) — *замыкающим*, а функции $u_{(\nu)}$ — *интегрирующими множителями*.

В силу «в» можно считать, что $w = w(u)$, а φ^k, ψ, f, h рассматривать как функции интегрирующего множителя u (локально). Далее все будет делаться локально, где такое обращение возможно. Для простоты примем, что $f = 0$.

2. Галилеевы системы (см. также [11, 13, 14]). Всюду в этом пункте по повторяющимся латинским индексам идет суммирование от 1 до 3. Пусть имеется физическая система S, для которой справедлив принцип инвариантности относительно группы Галилея Γ, включающей ортогональные преобразования координат (x^1, x^2, x^3), образующие группу $SO(3)$, и преобразования Галилея

$$x^0 \to x^0, \; x^k \to x^k + U^k x^0 \;\; (k = 1, 2, 3;\; U^k = \text{const}) \tag{2.1}$$

(x^0 — временная координата). Предположим, что состояние S можно охарактеризовать совокупностью величин $v(x) \equiv (v^1, v^2, v^3)$ и $q(x) \equiv (q_{(1)}, \ldots$ $\ldots, q_{(\nu)})$, так что $w = (v, q)$, $m = 3 + \nu$. Будем считать, что v имеет смысл скорости, т. е. по отношению к преобразованиям группы $SO(3)$ v^k преобразуются как вектор, а по отношению к (2.1) — по правилу $v^k \to v^k + U^k$. Величины $q_{(\alpha)}$ по отношению ко всем преобразованиям из Γ пусть преобразуются как скаляры: $q_{(\alpha)} \to q_{(\alpha)}$. Если ввести галилеев 4-вектор скорости $V \equiv (V^0, V^1, V^2, V^3)$, полагая $V^0 = 1$, $V^k = v^k$ $(k = 1, 2, 3)$, то оказывается, что по отношению ко всем преобразованиям из Γ V преобразуется как контравариантный вектор. Таким образом, по предположению, состояние S вполне характеризуется одним векторным полем $V(x)$ специального вида ($V^0 = 1$) и скалярными полями ($q_{(\alpha)}$).

Примем, что изменение состояния S описывается системой

(2.2) $$\frac{\partial w}{\partial x^0} + A^k(w)\frac{\partial w}{\partial x^k} = 0,$$

где A^k— матрицы. Для того чтобы (2.2) было инвариантно по отношению к указанным преобразованиям группы Γ, необходимо и достаточно, чтобы (2.2) записывалось как

(2.3а) $$\frac{\partial v}{\partial x^0} + v^k\frac{\partial v}{\partial x^k} + \lambda \operatorname{rot} v + \sum_{\alpha} \eta^{(\alpha)} \operatorname{grad} q_{(\alpha)} = 0;$$

(2.3б) $$\frac{\partial q}{\partial x^0} + v^k\frac{\partial q}{\partial x^k} + \sigma \operatorname{div} v = 0$$

$$(\lambda = \lambda(q),\ \eta^{(\alpha)} = \eta^{(\alpha)}(q),\ \sigma = \sigma(q)).$$

Пусть для определенности $\nu \geqslant 3$. Для того чтобы (2.3) допускало законы сохранения, функции λ, $\eta^{(\alpha)}$, σ должны удовлетворять условиям, которые удобнее сформулировать в терминах других функций. Нас интересуют только уравнения, допускающие полный набор законов сохранения. Для этого необходимо, чтобы следствием (2.3) были законы сохранения:

(2.4) $$\frac{\partial \rho}{\partial x^0} + \frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k} = 0;$$

(2.5) $$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^i v^k + \delta^{ik} P) = 0 \quad (i = 1, 2, 3);$$

(2.6) $$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(E + \rho\frac{|v|^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left[v^k\left(E + P + \rho\frac{|v|^2}{2}\right)\right] = 0;$$

(2.7) $$\frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x^0} + \frac{\partial(\varphi^{(\alpha)} v^k)}{\partial x^k} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu - 1),$$

где $\rho = \rho(q)$; $P = P(q)$; $E = E(q)$; $\varphi^{(\alpha)} = \varphi^{(\alpha)}(q)$; δ^{ik} — символ Кронекера. Функции ρ, P, E, $\varphi^{(\alpha)}$ связаны соотношениями, которые можно записать с помощью дифференциальной формы, выписанной ниже. Напомним, что все построения делаются локально, так что переход от (2.3) к (2.4)—(2.7), вообще говоря, возможен только локально в подходящим образом выбранной окрестности некоторой точки q_0. Выбор этой окрестности детерминируется условиями, из которых, в частности, следует, что $\rho \neq 0$. Для того чтобы записать условие связи ρ, P, E, $\varphi^{(\alpha)}$ в удобной форме, нужно определить, какой из законов сохранения надо принять замыкающим, а какие — базисными. Более четко это сделано в п. 3 для лоренцевых уравнений, где принята несколько иная система гипотез. Пока просто разберем две основные возможности.

А. Пусть замыкающий закон сохранения совпадает с одним из уравнений (2.7). Несколько меняя обозначения и пользуясь тем, что $\rho \neq 0$, запишем (2.4)—(2.7) как *базисные законы сохранения*

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^0}+\frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k}=0; \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^i v^k+\delta^{ik}P)=0 \quad (i=1,\,2,\,3); \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|v|^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\rho v^k\left(\varepsilon+P/\rho+\frac{|v|^2}{2}\right)\right]=0; \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial(\rho c^{(\alpha)})}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k c^{(\alpha)})=0 \quad (\alpha=1,\,\ldots,\,\nu-2); \tag{2.11}$$

замыкающий закон сохранения

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial x^0}+\frac{\partial(\rho v^k s)}{\partial x^k}=0. \tag{2.12}$$

Чтобы для системы (2.8)—(2.12) выполнялось условие полноты законов сохранения, функции ρ, P, ε, $c^{(\alpha)}$ и s должны удовлетворять соотношению (опять-таки в подходящей окрестности)

$$T\,ds=d\varepsilon+P\,d(1/\rho)-\sum_{\alpha=1}^{\nu-2}\mu_{(\alpha)}dc^{(\alpha)} \tag{2.13}$$

(T и $\mu_{(\alpha)}$ — функции q). Это известное из термодинамики соотношение Гиббса. Принимая обычную термодинамическую интерпретацию, можно сказать, что s — удельная энтропия, ε — удельная внутренняя энергия, ρ — плотность массы, $c^{(\alpha)}$ — концентрация некоторой фазы, T — абсолютная температура, P — давление, $\mu_{(\alpha)}$ — химический потенциал.

Условие (2.13) следует из требования полноты законов сохранения (2.8)—(2.12). Наоборот, если имеются уравнения (2.8)—(2.11), выполняется (2.13) и $T\neq 0$, то из (2.8)—(2.11) вытекает (2.12). Для этого нужно умножить (2.8) на $(-z+|v|^2/2)/T$, (2.9) на $-v^i/T$, (2.10) на $1/T$, (2.11) на $-\mu_{(\alpha)}/T$, где $z\equiv\varepsilon+P/\rho-Ts-\sum\limits_{\alpha}\mu_{(\alpha)}c^{(\alpha)}$. После суммирования с учетом (2.13) получается (2.12) (z — удельный термодинамический потенциал Гиббса).

Б. Пусть замыкающий закон сохранения есть (2.10). Подобный случай имеет место, например, в теории длинных волн (разумеется, уравнения тогда не трехмерные, а одно- или двумерные) при описании переноса примесей (при этом появляются еще правые части, но это сейчас не важно). Запишем (2.4)—(2.7) как

базисные законы сохранения

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^0}+\frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k}=0; \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^i v^k+\delta^{ik}P)=0; \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial(\rho c^{(\alpha)})}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k c^{(\alpha)})=0 \quad (\alpha=1,\,\ldots,\,\nu-1); \tag{2.16}$$

замыкающий закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|v|^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\rho v^k\left(\varepsilon+\frac{P}{\rho}+\frac{|v|^2}{2}\right)\right]=0. \tag{2.17}$$

Функции ρ, P, $c^{(\alpha)}$ и ε должны быть связаны соотношением

$$d\varepsilon=-P\,d(1/\rho)+\sum_{\alpha=1}^{\nu-1}\mu_{(\alpha)}dc^{(\alpha)} \tag{2.18}$$

($\mu_{(\alpha)}$ — функции q). Равенство (2.18) следует из требования полноты законов сохранения (2.14)—(2.17). Наоборот, пусть имеются уравнения (2.14)—(2.16) и справедливо (2.18). Умножим (2.14) на $z - |v|^2/2$, (2.15) на v^i, (2.16) на $\mu_{(\alpha)}$, где $z \equiv \varepsilon + \frac{P}{\rho} - \sum_\alpha \mu_{(\alpha)} c^{(\alpha)}$. После суммирования с учетом (2.18) имеем (2.17).

Таким образом, сочетание требований инвариантности и полноты законов сохранения жестко определяет структуру уравнений газовой динамики. Автоматически получается и соотношение Гиббса (2.13) или его аналог (2.18).

Замечание 2.1. Описанный подход основан на разделении гипотезы инвариантности, приводящей к (2.3), и гипотезы полноты законов сохранения, обеспечивающей возможность перехода от (2.3) к уравнениям (2.4)—(2.7), дополненным соотношением Гиббса или его подходящим аналогом. Такая последовательность кажется разумной. Но при этом возникают и негативные моменты. Уравнения (2.3) и (2.4)—(2.7) равносильны, за исключением, быть может, некоторых случаев вырождения. Но все же для утверждения равносильности нужна дополнительная гипотеза. В результате область, где (2.3) приводится к (2.4)—(2.7), вообще говоря, не совпадает с областью взаимной однозначности отображения $w \to u(w)$ (она может быть меньше). Это делает точные формулировки более громоздкими и кажется не совсем естественным. Ощущение произвола может создать способ разделения уравнений (2.4)—(2.7) на базисные и на замыкающее. В п. 3 для лоренцевых уравнений принят иной подход, где законы сохранения с самого начала классифицируются по тензорным типам. Итоговая система допущений, на мой взгляд, наиболее проста и естественна. Аналогичный подход возможен, разумеется, и для галилеевых уравнений (с некоторыми изменениями, поскольку в одних случаях приходится оперировать с группой $SO(3)$, а в других — группой Г; см. замечание 2.2). Но во избежании повтора ограничимся разбором лоренцевых уравнений.

Замечание 2.2. Согласно традиции классической механики, была использована трехмерная символика. Возможна и четырехмерная запись. Полагаем $T^{ij} \equiv \rho V^i V^j + \delta^{ij}_{(3)} P$, где V^i — компоненты галилеевой 4-скорости, $i, j = 0, 1, 2, 3$,

$$\delta^{ij}_{(3)} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \quad i \neq 0, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \text{ или } i = 0, \text{ или } j = 0. \end{cases}$$

Легко проверяется, что (T^{ij}) есть контравариантный тензор по отношению ко всем преобразованиям из Г. Уравнения (2.4), (2.5) запишем как

$$\sum_{j=0}^{3} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{2.19}$$

а (2.7)— в виде

$$\sum_{j=0}^{3} \frac{\partial (V^j \varphi^{(\alpha)})}{\partial x^j} = 0. \tag{2.20}$$

Левая часть (2.19) есть контравариантный вектор по отношению ко всем преобразованиям из Г, а левая часть (2.20)— скаляр. Уравнения (2.6) в четырехмерной тензорной символике, естественно, не записываются. Это вызвано тем, что для группы Галилея нет невырожденной инвариантной метрики (для группы Лоренца есть — метрика Минковского). Поэтому нельзя перейти от контравариантного 4-вектора (V^j) к ковариантному (нельзя опустить индекс). Левая часть (2.6) есть скаляр относительно $SO(3)$. Инвариантность (2.6) по отношению к Г вытекает, например, из того, что (2.6)— следствие инвариантных уравнений (2.3). По тензорному типу классифицируются и интегрирующие множители.

3. Лоренцевы системы. Рассмотрим теперь физическую систему S, инвариантную относительно группы Лоренца L, включающей преобразования группы $SO(3)$ и преобразования Лоренца. Предположим, что состояние S можно вполне охарактеризовать четырехвекторным контравариантным полем $Q = (Q^0, Q^1, Q^2, Q^3)$ и скалярными полями $q(x) \equiv (q_{(1)}, \ldots, q_{(\nu)})$. Для определенности считаем $\nu \geqslant 2$. Величина

$$\sigma(x) \equiv Q^0 Q^0 - \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{3} Q^k Q^k \tag{3.1}$$

есть инвариант группы L (c — скорость света в вакууме). Зафиксируем точку x_0. Возможны три случая: $\sigma(x_0) > 0$, $\sigma(x_0) = 0$, $\sigma(x_0) < 0$. В данной работе разобран только первый случай. В силу гладкости $\sigma(x)$ существует окрестность $G(x_0)$ точки x_0, где $\sigma(x) > 0$. Далее считаем, что $x \in G(x_0)$. Полагаем $V^i \equiv Q^i / \sqrt{\sigma}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. В силу (3.1)

$$V^0 V^0 - \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{3} V^k V^k = 1. \tag{3.2}$$

Теперь можно считать, что состояние S определяется одним векторным полем $V(x)$, нормированным в соответствии с (3.2), и $(\nu + 1)$-ми скалярными полями $(\sigma, q) \equiv (\sigma, q_{(1)}, \ldots, q_{(\nu)})$. Вектор V назовем лоренцевой 4-скоростью. Далее по повторяющимся латинским индексам суммирование идет от 0 до 3.

Рассмотрим дивергентное дифференциальное выражение $J = \partial\Phi^j/\partial x^j$, где Φ^j зависят только от (V, σ, q). Для того чтобы J было скаляром (инвариантом) по отношению ко всем преобразованиям группы L, необходимо и достаточно, чтобы Φ^j имели вид $\Phi^j = \varphi(\sigma, q) V^j + \mathrm{const}$.

Рассмотрим дифференциальные выражения $F^i \equiv \partial T^{ij}/\partial x^j$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Здесь T^{ij} зависят только от (V, σ, q). Для того чтобы совокупность величин (F^i) преобразовывалась как контравариантный вектор по отношению ко всем преобразованиям из L, необходимо и достаточно, чтобы $T^{ij} = \psi(\sigma, q) V^i V^j + g^{ij} P(\sigma, q) + \mathrm{const}$, где g^{ij} — контравариантный тензор Минковского ($g^{00} = -1/c^2$, $g^{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $g^{ij} = 0$ $(i \neq j)$). Удобно ввести величину ρ равенством $\psi \equiv \rho + P/c^2$.

В соответствии с программой, обрисованной во введении, классифицируем теперь законы сохранения, описывающие динамику S, по элементарным тензорным типам. А именно, поскольку имеется $3 + 1 + \nu$ неизвестных, то примем, что базисные законы сохранения включают один четырехвекторный и ν скалярных, так что *базисные законы* записываются как

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left[(\rho + P/c^2) V^i V^j + g^{ij} P\right] = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3); \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(N V^j) = 0; \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(C^{(\alpha)} V^j) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu - 1) \tag{3.5}$$

($\rho = \rho(\sigma, q)$, $P = P(\sigma, q)$, $N = N(\sigma, q)$, $C^{(\alpha)} = C^{(\alpha)}(\sigma, q)$). Для простоты считаем, что законы сохранения точны. Впрочем, можно разобрать и более общий случай. *Замыкающий закон сохранения* принимаем скалярным:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(S V^{(j)}) = 0 \tag{3.6}$$

($S = S(\sigma, q)$). Итак, классификация по элементарным тензорным типам привела к вполне определенной форме уравнений, содержащих скалярные функции ρ, P, N, $C^{(\alpha)}$, S (эта классификация характеризует основную форму газовой динамики), которые нельзя задавать произвольно, они связаны условием, вытекающим из не использованного еще требования, относящегося к интегрирующим множителям. По определению, существуют

$\eta_i(V, \sigma, q)$, $\zeta(V, \sigma, q)$, $\xi_{(\alpha)}(V, \sigma, q)$ такие. что после умножения (3.3) на η_i, (3.4) на ζ, (3.5) на $\xi_{(\alpha)}$ и суммирования получается (3.6). При этом должны выполняться равенства, аналогичные (1.3).

Примем дополнительно, что (η_i) преобразуются как ковариантный вектор, ζ и $\xi_{(\alpha)}$ — как скаляры по отношению ко всем преобразованиям из L. Тем самым по элементарным тензорным типам классифицируются и интегрируются множители, что вполне в духе нашей программы. Эта гипотеза к тому же сильно сокращает вычисления. Но следует заметить, что логически она не необходима и может быть ослаблена. Из гипотезы вытекает, что интегрирующие множители должны иметь структуру $\eta_i = \tau(\sigma, q)V_i$, $\zeta = \zeta(\sigma, q)$, $\xi_{(\alpha)} = \xi_{(\alpha)}(\sigma, q)$ ($V_i \equiv g_{ij}V^j$, g_{ij} — ковариантный тензор Минковского).

Согласно определению п. 1, отображение $(V, \sigma, q) \to (\eta, \zeta, \xi)$ ($\eta \equiv (\eta_i)$, $\xi = (\xi_{(\alpha)})$) локально взаимно однозначно. Тем самым состояние S локально вполне характеризуется набором (η, ζ, ξ) или, что удобнее, набором (V, τ, ζ, ξ).

Допустим еще, что $N \neq 0$, $\tau \neq 0$. Формально эта гипотеза не необходима и делается только для того, чтобы записать итоговое выражение в традиционной физической форме. Поскольку $\tau \neq 0$, можно положить $T \equiv -1/\tau$.

Из сделанных гипотез следует, что функции ρ, P, N, $C^{(\alpha)}$, S должны удовлетворять условию

$$Td(S/N) = d(c^2\rho/N) + Pd(1/N) - \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} \mu_{(\alpha)} d(C^{(\alpha)}/N) \tag{3.7}$$

($\mu_{(\alpha)}(\tau, \zeta, \xi)$ — функции (см. также [15, 16])).

Если система законов сохранения (3.3)—(3.6) полна, причем интегрирующие множители имеют указанный выше тензорный тип ($N \neq 0$, $\tau \neq 0$), то справедливо (3.7). Наоборот, если имеются уравнения (3.3)—(3.5), причем справедливо (3.7), то выполняется (3.6). Для этого надо умножить (3.3) на $\eta_i \equiv \tau V_i$, (3.4) на $\zeta \equiv \tau z$ и (3.5) на $\xi_{(\alpha)} \equiv \tau\mu_{(\alpha)}$, где $z \equiv \left(c^2\rho + P - ST - \sum_\alpha \mu_{(\alpha)}C^{(\alpha)}\right)\Big/N$.

Итак, соображения инвариантности в соединении с требованием полноты законов сохранения опять жестко определяют структуру уравнений и приводят к дифференциальной форме Гиббса (3.7), которая обычно рассматривается как выражение второго начала термодинамики. Этот факт заслуживает внимания, поскольку неожиданно термодинамика получает здесь новое формальное выражение и оказывается внутренним свойством определенного класса дифференциальных уравнений. Однако не следует считать, что термодинамика должна быть целиком сведена к описанным выше формальным принципам и их возможным обобщениям. Дифференциальная форма Гиббса сохраняет свое значение особого фундаментального принципа, дающего возможность связать два разных теоретических плана — последовательно формальный и физически содержательный. Тем самым, с одной стороны, можно внести физический смысл в формальные конструкции и придать им физическую перспективу, с другой — формализация физических принципов создает для них перспективу новых обобщений, возможность применения их в новых ситуациях.

4. Принципы термодинамики и дифференциальные уравнения. Рассмотрим внимательнее принципы («начала») термодинамики.

1. *Первое начало термодинамики* утверждает закон сохранения энергии. Здесь это утверждение формализовано в законе сохранения энергии (массы)— импульса

$$\partial T^{ij}/\partial x^j = 0, \tag{4.1}$$

а в более общем плане оно отражено в принятии базисной системы законов сохранения, т. е. в требовании дивергентности исходной системы динамических уравнений.

2. *Второе начало* заключает в себе комплекс утверждений, одни из которых относятся к утверждению необратимости процессов и к диссипативным явлениям. Этот круг идей здесь не обсуждается. Другой круг идей связан с дифференциальной формой Гиббса и в одном из широко распространенных выражений — с постулатом о существовании интегрирующего множителя $1/T$. Интегрирующий множитель для закона сохранения (4.1) оказывается равным «температурному вектору» $(\tau V_k) = (-(1/T)V_k)$ (для лоренцевой системы, аксиоматика которой проще и последовательнее, чем для галилеевой). Столь тесное соответствие, конечно, не случайно, но свидетельствует о разумности принятых постулатов.

3. В термодинамике имеется еще *третье начало*, введенное Нерстом и Планком. Оно утверждает определенное единообразие поведения веществa при $T \to 0$, т. е., иначе говоря, факт некоторого единообразного вырождения физически возможных уравнений состояний.

4. Быть может, третье начало имеет своего рода симметричное дополнение на противоположном конце температурной шкалы — *четвертое начало*. А именно, правдоподобно, что при $T \to \infty$ возможные формы уравнений состояния опять-таки вырождаются и асимптотически имеет место равенство

$$P = c^2\rho/3 \tag{4.2}$$

(см., например, [15]). Разумеется, (4.2) имеет смысл только для лоренцевой системы. Соотношение (4.2) равносильно равенству $T^i_i = 0$, где, как обычно, $T^i_k = g_{kj}T^{ji}$. Пусть для простоты $\nu = 1$, т. е. базисная система состоит только из (3.3), (3.4). Дифференциальная форма (3.7) приобретет вид

$$Td(S/N) = d(c^2\rho/N) + Pd(1/N). \tag{4.3}$$

Из (4.2), (4.3) вытекает уравнение состояния

$$S/N = G(\eta), \quad \eta \equiv (c^2\rho)^3/N^4 = (c^2\rho/N)^3(1/N) \tag{4.4}$$

($G(\eta)$ — некоторая функция). Из (4.3), (4.4) находятся T и P, причем P совпадает, разумеется, с (4.2), а

$$T = (1/3)(c^2\rho/N)[1/(\eta\partial G/\partial\eta)]. \tag{4.5}$$

Оказывается, что если уравнение состояния удовлетворяет (4.2)—(4.5), то система (3.3), (3.4) инвариантна относительно конформных преобразований координат (все конформные преобразования описаны в [17]). Итак, если при $T \to \infty$ справедливо (4.2), то асимптотически возникает дополнительная симметрия. Уравнения электромагнитного поля, как известно, также конформно инвариантны. Складывается впечатление, что при $T \to \infty$ для всех веществ и для поля имеется универсальная симметрия — конформная инвариантность. Если такое утверждение верно, то именно оно должно считаться точным и общим выражением четвертого начала. Кроме того, это станет дополнительным подтверждением тезиса из введения о группе как наиболее фундаментальном объекте (наряду с особой дивергентной структурой динамических уравнений).

Было бы чрезвычайно интересно, если бы удалось найти сходное выражение и для третьего начала, т. е. найти универсальную (для всех веществ) инвариантность подходящей совокупности уравнений и/или дополнительный закон сохранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
3. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
4. **Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.** Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения.— М.: Физматгиз, 1958.

5. **Наймарк М. А.** Линейные представления группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
6. **Годунов С. К.** Интересный класс квазилинейных систем // ДАН.— 1961.— Т. 139, № 3.
7. **Годунов С. К.** Разностные методы решения уравнений газовой динамики.— Новосибирск: НГУ, 1962.
8. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.
9. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики.— Новосибирск: Наука, 1986.
10. **Шугрин С. М.** Об одном классе квазилинейных систем // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1969.— Вып. 2.
11. **Шугрин С. М.** Галилеевы системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1980.— Т. 16, № 12.
12. **Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.** Численные методы расчета одномерных систем.— Новосибирск: Наука, 1981.
13. **Чакыров Е. И.** Конечномерные расширения группы Галилея // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1985.— Вып. 68.
14. **Чакыров Е. И.** Дифференциальные инварианты некоторых расширений группы Галилея // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1985.— Вып. 69.
15. **Вейнберг С.** Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975.
16. **Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.** Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
17. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия.— М.: Наука, 1986.

Поступила 1/VIII 1988 г.

УДК 532.5 + 517.946

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ЛОКАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

С. Н. Антонцев, J. I. Diaz

(Новосибирск, Мадрид)

Многие актуальные математические модели механики сплошной среды приводят к изучению нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными составного типа. В таких системах различные компоненты искомого вектор-решения (например, скорость, плотность, давление, насыщенность, температура и т. д.) удовлетворяют уравнениям различных типов (параболического, гиперболического, эллиптического). Системы уравнений вырождаются в смысле типа или порядка при определенных значениях искомого решения или его производных. Сами решения обладают при этом конечным временем локализации (обращения в нуль), конечной скоростью распространения возмущений от начальных данных, пространственной локализацией с инерцией (метастабильной) и т. д. Свойство решений вырождающихся параболических уравнений (типа уравнения нелинейной теплопроводности) обладать конечной скоростью распространения возмущений впервые, по-видимому, отмечено и начало изучаться в [1—3], а для решений вырождающегося эллиптического уравнения аналогичное свойство отмечено в [4] в связи с исследованием задачи об истечении плоской звуковой струи. Затем изучению этих вопросов для одного параболического уравнения посвящено большое количество работ, достаточно полный обзор которых приведен в [5, 6]. В настоящее время для квазилинейных параболических уравнений также активно изучаются вопросы локализации решений, неограниченно растущих за конечное время [7]. Результаты работ для одного параболического уравнения получены, как правило, на основе теорем сравнения исследуемого решения со вспомогательным, например автомодельным. К системам уравнений составного типа аналогичные методы в основном не применимы. В [8—10] предложен и обоснован энергетический метод изучения характера возмущений, описываемых решениями общих уравнений эллиптического, параболического и составного типов. Идея метода состоит в получении и исследовании обыкновенных дифференциальных неравенств для энергетических функций. Метод получил обобщение и развитие в [11—18], в том числе и на уравнения высших порядков. Он оказался эффективен при изучении слабых обобщенных решений систем составного типа, возникающих в механике сплошных сред.

В [11, 19—23] энергетическим методом установлены конечное время локализации и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных в ряде математических моделей механики сплошных сред (фильтрационные течения двухфазной жидкости, совместные течения поверхностных и подземных вод, течения воды в открытых руслах, течения несжимаемых неоднородных вязкопластических сред, одномерных течений вязкого газа и др.). В [21] доказано, что осесимметрическая струя, движущаяся вдоль оси симметрии со звуковой скоростью, выравнивается (аналогично плоскому случаю [4]) на конечном расстоянии.