

УДК 538.65: 539.38

## ДЕФОРМАЦИЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ОБРАЗЦА ФЕРРОГЕЛЯ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. Л. Райхер, О. В. Столбов

Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, 614013 Пермь

E-mail: sov@kig.pstu.ac.ru

В приближении малых деформаций рассмотрено удлинение образца из ферроэластичного материала (исходная форма — сфера или эллипсоид вращения) под действием внешнего магнитного поля. Для сферы известна классическая оценка, полученная в предположении, что, удлиняясь в направлении поля, она превращается в сфероид, причем поля напряжений и деформаций остаются однородными. В настоящем расчете принято, что тело является эллипсоидом (в частном случае — сферой) только в отсутствие внешнего поля; форма образца в присутствии поля заранее не задается, а находится из условий баланса поверхностных сил (упругих и магнитных). Для сферического случая задача решена точно: показано, что контур деформированного тела описывается алгебраическим уравнением третьей степени. Случай, когда начальной конфигурацией является эллипсоид вращения, исследован численно. Показано, что во всех вариантах уточненное решение приводит к заметному росту удлинения образца по сравнению с классической оценкой.

**Ключевые слова:** малые деформации, феррогель, магнитоупругость, магнитодеформационный эффект.

**Введение.** Название “ферроэласт”, или “магнитный эластомер”, обозначает композиционную систему, представляющую собой упругую (вязкоупругую) полимерную матрицу, наполненную высокодисперсным ферромагнетиком. В последнее время большой интерес вызывают мягкие ферроэласты (феррогели) [1–6], модули упругости которых  $\lesssim 10^4$  Па. Они рассматриваются как перспективные материалы, способные играть роль искусственных мускулов, работать в качестве активных элементов микроманипуляторов, адаптивных покрытий и т. п. В основе всех приложений феррогелей лежит магнитодеформационный эффект (МДЭ). Он заключается в том, что образец, помещенный в магнитное поле, изменяет исходную форму, причем деформация может достигать многих десятков процентов [7, 8].

Простейший вариант решения задачи о МДЭ можно получить в готовом виде, если взять из монографии [9] решение задачи о деформации сферического образца радиуса  $R$  под действием внешнего электрического поля  $E_0$  и затем переписать его, используя аналогию между магнитостатическим и электростатическим потенциалами. В результате имеем

$$\frac{a_l - b_l}{R} = \frac{\varepsilon_0}{10G} \left( \frac{\varkappa E_0}{1 + \varkappa/3} \right)^2 = \frac{P^2}{10G\varepsilon_0}, \quad (1)$$

где  $a_l$ ,  $b_l$  — полуоси сечения эллипсоида, получаемого в результате деформации;  $P$  — значение поляризации внутри шара;  $G$  — модуль сдвига;  $\varkappa$  — диэлектрическая восприим-

чивость материала;  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная. Как видно из формулы (1), эффект “диэлектрической стрикции” четен по полю.

В дальнейшем будем использовать для характеристики удлинения параметр  $\varepsilon$ , равный относительному изменению расстояния между геометрическими полюсами образца в направлении приложенного поля. В этом представлении стрикционный эффект (1) выражается соотношением

$$\varepsilon = a_l/R - 1 = P^2/(15G\varepsilon_0), \quad (2)$$

где учтено, что при малых деформациях несжимаемой сферы  $(a_l - b_l)/R \simeq 3(a_l - R)/(2R)$ . Переход от соотношений (1) или (2) к магнитному случаю, который будем называть магнитодеформационным эффектом, очевиден: достаточно заменить векторы напряженности электрического поля и поляризации на соответствующие характеристики магнитного поля, а диэлектрическую восприимчивость  $\varepsilon$  — на магнитную  $\chi$ . В дальнейшем мы считаем этот переход выполненным и в своих рассуждениях будем использовать соотношение (2), должным образом переобозначенное, в качестве классической оценки магнитодеформационного эффекта в однородном поле.

**Общая постановка задачи о магнитодеформационном эффекте.** Допущение, что магнитоэластичный сфероид всегда остается таковым (фигура второго порядка по классификации, принятой в аналитической геометрии), на котором основано классическое решение, чрезвычайно удобно в математическом отношении. Однако вопрос о физической допустимости этого постулата в [9] оставлен без обсуждения. Между тем при решении задачи в полной постановке форма, которую тело принимает при намагничивании, должна находиться без дополнительных условий. Отсюда следует, что постулат эллипсоидальности, скорее всего, несовместим с точным решением. Чтобы выяснить этот вопрос, запишем полную систему уравнений МДЭ, связав в ней две задачи: магнитостатическую и упругую. Начнем с магнитостатической части. При отсутствии токов вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  можно представить в виде градиента скалярной функции  $\psi$  посредством  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \nabla\psi$ , где  $\mathbf{H}_0$  — приложенное внешнее поле. Из условия соленоидальности  $\nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$  имеем

$$\Delta\psi = \nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{M}$  — вектор намагниченности.

Связь магнитных векторов на поверхности образца следует из условий непрерывности нормальной компоненты индукции и тангенциальной компоненты напряженности магнитного поля:

$$\left. \frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial n} \right|_{\Gamma} - \left. \frac{\partial\psi^{(e)}}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma}, \quad \psi^{(i)}|_{\Gamma} = \psi^{(e)}|_{\Gamma}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали;  $\Gamma$  — граница образца. Здесь и далее верхними индексами  $(i)$  и  $(e)$  обозначаются значения величин внутри образца и во внешней области соответственно.

Условие баланса упругих сил внутри образца выражается уравнением

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений Коши;  $\mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}$  — пондеромоторная сила, возникающая из-за неоднородности магнитного поля внутри образца. В равновесии на границе образца должно выполняться условие

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Gamma} = (1/2)\mu_0 M_n^2 \mathbf{n}|_{\Gamma}, \quad (6)$$

выражающее баланс внешнего и внутреннего давлений; здесь  $M_n = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$  — нормальная компонента вектора намагниченности.

Соотношения (3)–(6) вместе с уравнениями состояний  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}, e)$  и  $T = T(\mathbf{H}, e)$ , где  $e$  — тензор деформаций, образуют замкнутую систему уравнений статической задачи магнитоупругости, решение которой должно полностью определять форму, принимаемую образцом ферроэласта в данном внешнем поле, и описывать распределение магнитного поля и напряженно-деформированное состояние внутри ферроэластичного тела.

#### Магнитодеформационный эффект при малых деформациях эллипсоида.

Пусть образец ферроэласта в исходном состоянии (внешнее поле отсутствует) имеет форму эллипсоида вращения. Поместим начало системы отсчета в центр образца. Направим внешнее однородное поле  $\mathbf{H}_0$  вдоль главной оси симметрии образца, которую выберем за ось  $Oz$  цилиндрической системы координат; базисные векторы последней обозначим через  $\epsilon_\rho$ ,  $\epsilon_\theta$  и  $\epsilon_z$ . В качестве безразмерной характеристики эллипсоида будем использовать отношение  $a/b$  длин его полуосей, где  $a$  — главная полуось.

Рассмотрим начальную стадию магнитодеформационного эффекта, т. е. положим деформации малыми. В этом случае магнитоэластическая сила не зависит от удлинения и ее можно находить, полагая форму образца невозмущенной. Благодаря этому задачи расчета внутреннего магнитного поля и полей механических напряжений и деформаций разделяются и могут быть решены последовательно.

Задача магнитоэластики для эллипсоида имеет известное аналитическое решение, согласно которому поле внутри образца однородно, направлено вдоль оси  $Oz$  и равно

$$\mathbf{H} = H_0 - M(H)N(x). \quad (7)$$

Здесь  $N$  — размагничивающий фактор вдоль оси  $Oz$ ;  $x$  — эксцентриситет меридионального сечения тела. Для удлиненного сфероида ( $a > b$ ) имеем

$$N(x) = (1 - x^2)(\operatorname{arctg} x - x)x^{-3}, \quad x = \sqrt{1 - b^2/a^2};$$

для сплюснутого сфероида ( $a < b$ ) размагничивающий фактор записывается в виде

$$N(x) = (1 + x^2)(x - \operatorname{arctg} x)x^{-3}, \quad x = \sqrt{b^2/a^2 - 1}.$$

Примем для намагниченности ферроэласта закон Ланжевена

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = M_0 L(\mu_0 m H / kT) \mathbf{h}, \quad L(\xi) \equiv \operatorname{cth} \xi - 1/\xi, \quad (8)$$

полагая, таким образом, что магнитная фаза материала состоит из суперпарамагнитных одно- или субдоменных частиц. В уравнении (8) магнитный момент отдельной частицы  $m = Iv$  определяется произведением ее объема  $v$  на намагниченность  $I$  ферромагнитного материала;  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Намагниченность насыщения ферроэласта записываем в виде  $M_0 = nm$ , где  $n$  — числовая концентрация магнитных частиц. Физический смысл аргумента функции Ланжевена — это отношение ориентационной энергии магнитного момента частицы в приложенном поле  $\mathbf{H} = H\mathbf{h}$ , где  $\mathbf{h}$  — единичный вектор, к тепловой энергии  $kT$  ( $k$  — постоянная Больцмана).

Перейдем к безразмерным переменным, вводя поля  $\xi = \mu_0 m H / (kT)$  и  $\xi_0 = \mu_0 m H_0 / (kT)$ . В новых обозначениях уравнение (7), которое определяет внутреннее поле в эллипсоиде, с учетом (8) принимает вид

$$\xi = \xi_0 - 3\chi_0 N(x)L(\xi), \quad (9)$$

где  $\chi_0 = \mu_0 m M_0 / (3kT)$  — начальная магнитная восприимчивость. Заметим, что уравнение (9) является нелинейным относительно  $\xi$  и не имеет аналитического решения.

Для описания упругого поведения материала используем теорию малых деформаций, т. е. в качестве уравнения состояния примем закон Гука, а связь тензора деформаций  $e$  с вектором перемещений  $\mathbf{u}$  определим линейными соотношениями

$$\mathbf{T} = \lambda I_1(e)\mathbf{g} + 2G\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2, \quad (10)$$

где  $I_1(e)$  — первый инвариант тензора деформаций;  $g$  — единичный тензор;  $\lambda$  и  $G$  — константы Ламе.

При однородном внешнем поле магнитное поле внутри эллипсоида также однородно, вследствие чего массовые силы отсутствуют. В этих предположениях уравнение (5) переходит в  $\nabla \cdot T = 0$ . Условие (6) на границе образца  $\Gamma$  (с учетом  $M_n^2 = M^2 n_z^2$ ) и граничные условия на осях  $\rho$  и  $z$ , сформулированные с учетом симметрии задачи, принимают вид

$$\mathbf{n} \cdot T|_{\Gamma} = (1/2)\mu_0 M^2 n_z^2 \mathbf{n}|_{\Gamma}, \quad u_{\rho}|_{\rho=0} = u_z|_{z=0} = 0, \quad T_{\rho z}|_{z=0} = T_{\rho z}|_{\rho=0} = 0. \quad (11)$$

Выберем модуль сдвига  $G$  в качестве единого масштаба измерения намагниченности, тензора напряжений и коэффициента  $\lambda$ , т. е. положим  $\tilde{M} = \sqrt{G/\mu_0} M$ ,  $\tilde{T} = T/G$  и  $\beta = \lambda/G$ . Последний из введенных безразмерных параметров характеризует сжимаемость материала: предел  $\beta \rightarrow \infty$  соответствует несжимаемому ферроэласту. Ниже при вычислениях знак тильды опускаем, поэтому обратный переход к размерным переменным будем каждый раз отмечать специально.

Распространяя определение (2) на случай образца, исходной конфигурацией которого является эллипсоид вращения, далее в качестве характеристики удлинения будем использовать величину

$$\varepsilon = u_z(\rho = 0, z = a)/a, \quad (12)$$

равную относительному изменению расстояния между полюсами образца в направлении оси  $Oz$  (направление поля); здесь  $a$  — полуось, вдоль которой направлено приложенное поле.

**Магнитодеформационный эффект при однородной деформации сферы.** Используем общие уравнения, приведенные выше, для описания деформации шара из ферроэласта; радиус шара считаем единичным. Размагничивающий фактор шара равен  $1/3$ , так что согласно (9) магнитное поле внутри образца определяется уравнением  $\xi = \xi_0 - \chi_0 L(\xi)$ . Рассмотрим теперь упругую задачу, предполагая в ней линейное распределение перемещений в виде

$$u_{\rho} = A\rho, \quad u_z = Bz. \quad (13)$$

В цилиндрической системе координат компоненты вектора перемещений и тензора деформаций связаны соотношением

$$e_{\rho z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho}}{\partial z} \right), \quad e_{\rho\rho} = \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_{\rho}}{\rho}. \quad (14)$$

Подстановка сюда линейных соотношений (13) показывает, что отличны от нуля только диагональные компоненты тензора деформаций, при этом внутри образца они однородны:  $e_{\rho\rho} = e_{\theta\theta} = A$ ,  $e_{zz} = B$ . С учетом этого из определяющего соотношения (10) находим

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \beta I_1(e) + 2e_{zz}, & T_{\rho z} &= 2e_{\rho z}, & T_{\rho\rho} &= \beta I_1(e) + 2e_{\rho\rho}, \\ T_{\theta\theta} &= \beta I_1(e) + 2e_{\theta\theta}, & I_1(e) &= e_{\rho\rho} + e_{zz} + e_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда видно, что тензор напряжений  $T$  также имеет диагональный вид и однороден внутри образца. Тогда удлинение  $\varepsilon$  в соответствии с (12) принимает вид

$$\varepsilon = u_z(\rho = 0, z = 1), \quad (16)$$

а в случае однородной деформации переходит в  $\varepsilon = Bz|_{z=1} = e_{zz}$ .

Для рассматриваемой магнитоупругой задачи запишем принцип виртуальной работы:

$$\frac{1}{2} M^2 \int_{\Gamma} n_z^2 \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} dS = \int_{V^{(i)}} T \cdot \delta e dV. \quad (17)$$

При однородных полях напряжений и деформаций интегрирование по объему шара единичного радиуса сводится к умножению на  $4\pi/3$ ; поверхностный же интеграл в левой части уравнения (17) легко вычисляется в сферической системе координат. После подстановки в уравнение (17) закона Гука (10) и поля деформаций в виде (13), полагая вариации  $\delta A$  и  $\delta B$  независимыми и приравнявая коэффициенты при них к нулю, находим равновесный тензор деформаций

$$e_{\rho\rho} = e_{\theta\theta} = -\frac{1}{10} M^2 \frac{\beta - 1}{3\beta + 2}, \quad e_{zz} = \frac{1}{10} M^2 \frac{2\beta + 3}{3\beta + 2}.$$

При  $\beta \rightarrow \infty$ , т. е. в случае несжимаемого материала, отсюда следует, что параметр удлинения (в размерном виде) равен

$$\varepsilon = e_{zz} = \mu_0 M^2 / (15G). \quad (18)$$

Сравнение этого результата с формулой (2) доказывает тождественность проведенного рассмотрения и классической оценки.

#### Магнитодеформационный эффект при однородной деформации эллипсоида.

Легко построить обобщение классической задачи [9] на случай, когда образец в начальном состоянии ( $H_0 = 0$ ) имеет форму произвольного эллипсоида вращения. Сохраняя гипотезу однородного деформирования (13), используем уравнение (17), выбирая за единицу измерения длины полуось  $b$  сфероида. Интеграл по поверхности образца берется в эллиптической системе координат, а интеграл по объему сводится к умножению подынтегрального выражения на объем тела  $4\pi ab^2/3$ . Требуя обращения в нуль коэффициентов при вариациях  $\delta A$  и  $\delta B$ , для вытянутого сфероида ( $a > b$ ) получаем систему двух линейных уравнений, откуда находим компоненты равновесного тензора деформаций и параметр удлинения в виде

$$e_{\rho\rho} = e_{\theta\theta} = -M^2 \frac{(x^2 - 1)\{3[\beta(x^2 - 3) + 2(x^2 - 1)] \operatorname{arcth} x + 3x(3\beta + 2) - 4x^3\}}{8(3\beta + 2)x^5},$$

$$\varepsilon = e_{zz} = M^2 \frac{(x^2 - 1)\{3[\beta(x^2 - 3) - 2] \operatorname{arcth} x + 3x(3\beta + 2) + 2x^3\}}{4(3\beta + 2)x^5}, \quad (19)$$

где  $x = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  — эксцентриситет меридионального сечения. Для несжимаемого материала ( $\beta \rightarrow \infty$ ) из соотношений (19) имеем

$$\varepsilon = e_{zz} = -2e_{\rho\rho} = -2e_{\theta\theta} = M^2 \frac{(x^2 - 1)[(x^2 - 3) \operatorname{arcth} x + 3x]}{4x^5}, \quad (20)$$

что в пределе  $x \rightarrow 0$ , т. е. для образца в форме шара, переходит в результат (18); при сравнении следует учитывать, что формула (20) записана в безразмерных единицах.

Требуя обращения вариаций в нуль, для сплюснутого сфероида ( $a < b$ ) находим

$$e_{\rho\rho} = e_{\theta\theta} = -M^2 \frac{(1 + x^2)\{3[\beta(x^2 + 3) + 2(x^2 + 1)] \operatorname{arcth} x - 3x(3\beta + 2) - 4x^3\}}{8(2 + 3\beta)x^5},$$

$$\varepsilon = e_{zz} = M^2 \frac{(1 + x^2)\{3[\beta(x^2 + 3) + 2] \operatorname{arcth} x - 3x(3\beta + 2) + 2x^3\}}{4(3\beta + 2)x^5}, \quad (21)$$

где  $x = \sqrt{b^2/a^2 - 1}$ . Для несжимаемого материала ( $\beta \rightarrow \infty$ ) из последнего выражения имеем

$$\varepsilon = e_{zz} = -2e_{\rho\rho} = -2e_{\theta\theta} = M^2 \frac{(x^2 + 1)[(x^2 + 3) \operatorname{arcth} x - 3x]}{4x^5}. \quad (22)$$

В предельных случаях иглообразного ( $b/a \rightarrow 0$ ) и дискообразного ( $a/b \rightarrow 0$ ) тел, используя подходящие разложения в формулах (22) и (20), находим

$$\varepsilon = \frac{1}{4} M^2 \begin{cases} (b^2/a^2) \ln [4a^2/(e^3 b^2)] + O(b^4/a^4) & \text{при } b/a \rightarrow 0, \\ a/(2b) + O(a^2/b^2) & \text{при } a/b \rightarrow 0. \end{cases} \quad (23)$$

Видно, что в обоих случаях независимо от конкретного закона намагничивания магнитодеформационный эффект в эллипсоиде исчезающе мал.

**Точное решение линейной задачи магнитодеформационного эффекта для сферы.** Обратимся к общей ситуации, которая отличается от классической тем, что требование однородности напряжений и деформаций не выдвигается. Иными словами, конфигурация тела, возникшая в результате МДЭ, не постулируется, а находится из решения упругой задачи. Представим перемещение  $\mathbf{u}(\rho, z)$  в произвольной точке образца в виде ряда по степеням координат  $\rho$  и  $z$  и наложим на искомое решение следующие условия симметрии:  $u_\rho$  зависит только от нечетных степеней  $\rho$  и четных степеней  $z$ , а  $u_z$  зависит только от нечетных степеней  $z$  и четных степеней  $\rho$ . Учитывая граничные условия (11), которым должны удовлетворять перемещения, запишем

$$u_\rho = A_1 \rho + A_2 \rho^3 + A_3 \rho z^2, \quad u_z = B_1 z + B_2 z^3 + B_3 z \rho^2. \quad (24)$$

Конечная длина выбранных степенных рядов оправдывается полученным ниже точным решением.

В рассматриваемом случае уравнение равновесия  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$  имеет две нетривиальные компоненты

$$\frac{\partial T_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial T_{\rho z}}{\partial z} + \frac{T_{\rho\rho} - T_{\theta\theta}}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial T_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{\rho z}}{\rho} = 0; \quad (25)$$

при этом граничные условия (11) принимают вид

$$T_{\rho\rho} \rho + T_{\rho z} z = M^2 z^2 \rho / 2, \quad T_{\rho z} \rho + T_{zz} z = M^2 \rho^2 z / 2. \quad (26)$$

Здесь учтено, что компоненты  $\rho$  и  $z$  на поверхности единичной сферы представляют собой соответствующие проекции вектора наружной нормали.

Подставим разложения (24) в соотношения связи между тензорами напряжений и деформаций (14) и (15), а затем полученные результаты — в уравнения (25) и (26). Уравнения равновесия должны выполняться для любых  $\rho$  и  $z$ , а граничные условия — для любых значений широтного угла  $\alpha$  (для точек на границе образца  $\rho = \sin \alpha$ ,  $z = \cos \alpha$ ). Совмещение этих условий приводит к системе шести линейных уравнений с невырожденным определителем. Решая эту систему стандартным способом, находим коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  разложений (24). Используя полученные выражения, для компонент вектора перемещений получаем

$$u_\rho(\rho, z) = \frac{M^2 \rho}{2(19\beta + 14)} \left( -\frac{2(4\beta + 3)\beta}{3\beta + 2} + \beta \rho^2 + (3\beta + 7)z^2 \right);$$

$$u_z(\rho, z) = \frac{M^2 z}{2(19\beta + 14)} \left( \frac{16\beta^2 + 31\beta + 14}{3\beta + 2} - 2\beta z^2 - (4\beta + 7)\rho^2 \right),$$

откуда с помощью определения (16) находим параметр удлинения

$$\varepsilon = \frac{u_z(0, R)}{R} = M^2 \frac{10\beta^2 + 27\beta + 14}{2(19\beta + 14)(3\beta + 2)}.$$

Для несжимаемого материала ( $\beta \rightarrow \infty$ ) поле перемещений имеет вид

$$u_z = -M^2 z(3z^2 + 6\rho^2 - 8)/57, \quad u_\rho = M^2 \rho(3\rho^2 + 9z^2 - 8)/114,$$

а удлинение равно

$$\varepsilon = 5\mu_0 M^2 / (57G). \quad (27)$$

Последняя формула записана в размерных величинах.

Зная вектор  $\mathbf{u}$ , можно полностью найти поля напряжений и деформаций внутри образца:

$$\begin{aligned} e_{\rho\rho} &= (1/2)M^2(-8 + 9\rho^2 + 9z^2)/57, & e_{zz} &= -M^2(-8 + 9z^2 + 6\rho^2)/57, \\ e_{\theta\theta} &= (1/2)M^2(-8 + 3\rho^2 + 9z^2)/57, & e_{\rho z} &= -(1/2)M^2 z\rho/19; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} T_{\rho\rho} &= (1/2)M^2(1 - \rho^2 + 20z^2)/19, & T_{zz} &= (1/2)M^2(17 - 15\rho^2 + 2z^2)/19, \\ T_{\theta\theta} &= (1/2)M^2(1 - 5\rho^2 + 20z^2)/19, & T_{\rho z} &= -M^2 z\rho/19. \end{aligned} \quad (29)$$

Формулы (28) и (29) представляют компоненты напряжений и деформаций. Напомним, что при рассмотрении бесконечно малых внешних возмущений, как это сделано в данной работе, поля деформаций и напряжений строятся в недеформированном образце. Как видно, наибольшие значения диагональных компонент тензора напряжений достигаются на полюсах сферы. На экваторе образца компонента  $T_{\theta\theta}$  отрицательная, в полярных зонах образуется тонкий поверхностный слой, где материал испытывает продольное сжатие ( $e_{zz} < 0$ ). Наибольшие деформации растяжения приходятся на центральную часть образца, а максимальные сдвиговые — на поверхностные “пояса”, расположенные при  $\alpha = 45^\circ$  и  $135^\circ$ . В целом же точный расчет показывает, что магнитодеформационный эффект даже в сфере из однородного ферроэласта и даже в сколь угодно малом однородном магнитном поле порождает неоднородное поле деформаций. Это отрицает постулаты однородности напряжений и деформаций и неизменной эллипсоидальности формы, на которых базируется классическое решение [9]. Иными словами, как показано выше, тело, в которое превращается сфера при магнитном деформировании, не является эллипсоидом вращения.

Количественную оценку различий между точным расчетом МДЭ и приближением, использующим сфероид в качестве вариационного решения, можно получить, сравнивая коэффициенты в соотношениях (18) и (27). Видно, что ошибка, которая возникает при выборе сфероида в качестве вариационного решения, превышает 30 %. Иначе говоря, если использовать сферический образец феррогеля для измерения модуля упругости с помощью МДЭ (скажем, определяя величину  $\mu_0 M^2 / \varepsilon$ ), то интерпретация данных в рамках классической оценки приведет к значению  $G$ , заниженному относительно истинного примерно на треть.

На рис. 1 представлены зависимости от широтного угла  $\alpha$  разностей точного решения и классической оценки (сфероид) для компонент вектора смещений на границе образца. По предположению, центр тела всегда остается неподвижным. Видно, что тело, в которое переходит сфера в результате МДЭ, оказывается по сравнению с эллипсоидом вращения равного объема длиннее в продольном направлении и, соответственно, уже — в поперечном. Качественно этот вывод следует уже из соотношения между коэффициентами в формулах (27) и (18). Заметим, однако, что представление МДЭ через намагниченность, не позволяет увидеть прямую связь магнитной деформации сферы с причинами, ее вызывающими. Это обусловлено сложной зависимостью между полем, приложенным к намагничиваемому образцу, и внутренним полем в нем. Действительно, соотношение (7) и вытекающее из него (9) представляют собой трансцендентные уравнения для нахождения внутреннего поля, по которому затем определяется намагниченность, например согласно уравнению (8). Результаты такого преобразования иллюстрирует рис. 2, где представлены построенные с помощью точных значений зависимости МДЭ от начальной восприимчивости ферроэласта  $\chi_0$  и безразмерной напряженности  $\xi_0$  приложенного магнитного

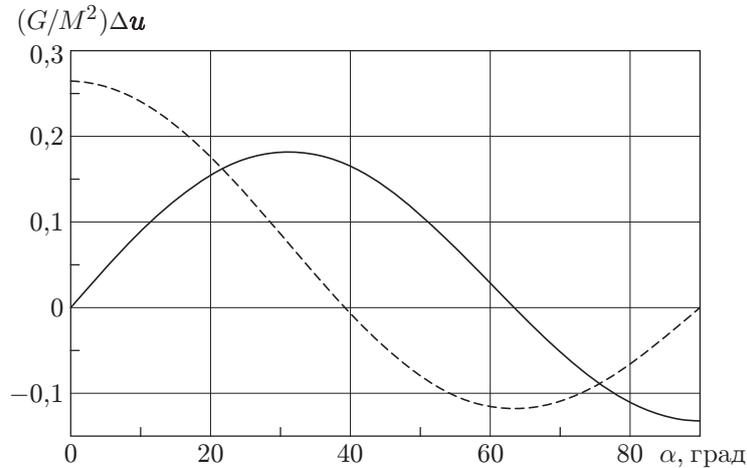


Рис. 1. Разности смещений на границе сферического образца между точным решением и классической оценкой (сфероид) в зависимости от угла  $\alpha$ : сплошная линия —  $\rho$ -компоненты, штриховая линия —  $z$ -компоненты

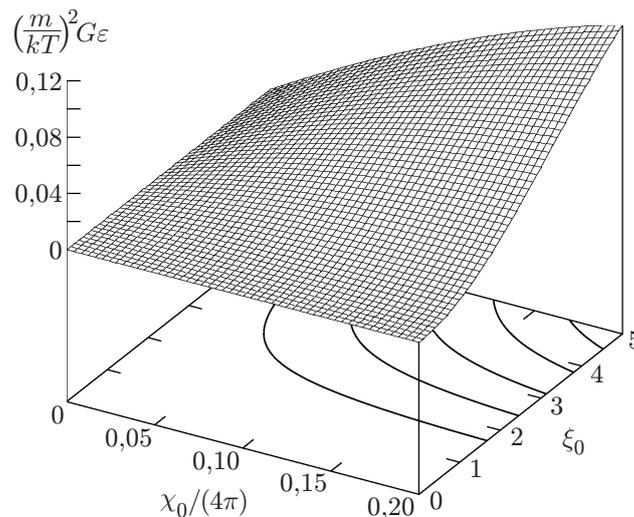


Рис. 2. Параметр удлинения сферы как функция начальной восприимчивости ферроэласта и безразмерной напряженности приложенного поля

поля. Первая из указанных величин является непосредственно измеряемой характеристикой материала, а вторая — параметр, непосредственно контролируемый в эксперименте. Обратим внимание на выбор масштаба для измерения  $\varepsilon$ , он обусловлен необходимостью представить в соотношении типа (27) правую часть только как функцию  $\chi_0$  и  $\xi_0$ . Поскольку с ростом любой из этих величин выигрыш в магнитостатической энергии при удлинении образца увеличивается, монотонное возрастание  $\varepsilon$  на рис. 2 вполне понятно.

**Численное решение линейной задачи магнитодеформационного эффекта для эллипсоида.** Расширим постановку задачи и рассмотрим ситуацию, когда в исходном состоянии образец имеет форму произвольного эллипсоида вращения. При этом магнитное поле по-прежнему накладывается вдоль главной оси симметрии. Поскольку точное решение упругой задачи удастся найти только для сферического образца, для сфероидальной начальной конфигурации был использован метод конечных элементов. За основу берется полная система линейно независимых функций  $\phi_j$ , которая строится следующим

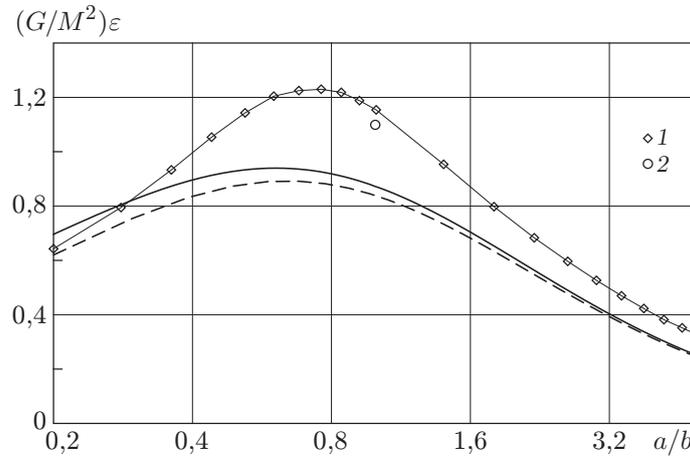


Рис. 3. Зависимость удлинения сфероида от начального значения  $a/b$  (параметр сжимаемости  $\beta = 20$ ):  
 сплошная линия — расчет по формулам (19) и (21) классического решения; штриховая линия — то же для несжимаемого материала ( $\beta = \infty$ ); 1 — численный расчет; 2 — точное решение для сферы из несжимаемого материала

образом. Аксиальное сечение эллипсоида вращения разбивается на треугольники, и каждая вершина треугольника принимается за узел. Все узлы нумеруются от 0 до  $m - 1$ . Каждая функция  $\phi_j$  считается кусочно-линейной, причем она равна единице в  $j$ -м узле и нулю во всех остальных узлах.

На основе скалярных функций  $\phi_j$  строится система векторных функций  $\{\Phi_j\}$ , обладающая теми же свойствами, что и  $\{\phi_j\}$ . Пользуясь тем, что рассматриваемая задача обладает осевой симметрией, запишем указанную систему в цилиндрических координатах

$$\Phi_{2j} = \phi_j \epsilon_\rho, \quad \Phi_{2j+1} = \phi_j \epsilon_z, \quad j = 0, \dots, m - 1.$$

Разложим поле перемещений внутри образца по выбранной системе функций

$$\mathbf{u} = \sum_{j=0}^{2m-1} u_j \Phi_j$$

и подставим это разложение в вариационное уравнение (17), снова считая, что уравнение упругого состояния дается законом Гука (10). Приравнивание к нулю коэффициентов при  $\delta u_j$  дает систему  $2m$  линейных алгебраических уравнений для амплитуд  $u_k$

$$\sum_{k=0}^{2m-1} u_k \int_V (\nabla \cdot \Phi_k \nabla \cdot \Phi_j + \beta (\nabla \Phi_k + \nabla \Phi_k^T) \cdot \nabla \Phi_j) dV = \frac{1}{2} \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \Phi_j M_n^2 dS. \quad (30)$$

Решение системы (30) выполнялось стандартными методами для различных значений материальных параметров ферроэласта и аспектного отношения  $a/b$  начальной конфигурации. По найденному полю перемещений находились тензоры напряжений и деформации и затем — мера удлинения  $\epsilon$  по формуле (12). Величина  $\epsilon$ , полученная численным расчетом МДЭ, представлена на рис. 3 штриховой линией как функция отношения  $a/b$  исходного сфероида; сферическому образцу здесь соответствует точка  $a/b = 1$ . Сплошной линией представлена зависимость, полученная с помощью формул (19) и (21). Ее естественно называть обобщенным классическим решением, поскольку она получена распространением

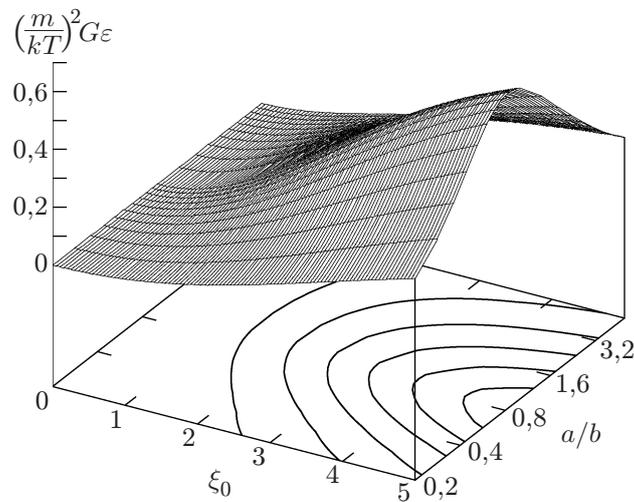


Рис. 4. Удлинение сфероида как функция начального значения  $a/b$  и приложенного поля  $\xi_0$ : начальная восприимчивость  $\chi_0 = 0,1/(4\pi)$ ; масштаб по оси  $a/b$  логарифмический

задачи о МДЭ из [9] (гипотеза однородности напряжений и деформаций) на случай, когда начальной формой тела является не шар, а сфероид. Как видно, между представленными кривыми имеется полное качественное сходство. С количественной стороны максимум на кривой  $\varepsilon(a/b)$ , соответствующей точному решению, выражен несколько отчетливее. Общим для обоих подходов является вывод о снижении МДЭ (уменьшении  $\varepsilon$ ) у сильно сплюснутых ( $a/b \rightarrow 0$ ) и сильно вытянутых ( $a/b \gg 1$ ) образцов. Последнее является ожидаемым эффектом: для классической постановки задачи эта тенденция установлена соотношениями (23). Иными словами, магнитное растяжение стержнеобразных и плоских чечевицеобразных сфероидов из ферроэласта чрезвычайно затруднено. Как видно из рис. 3, условия растяжения оптимальны, т. е. магнитодеформационная восприимчивость максимальна у слегка сплюснутых тел:  $a/b \simeq 0,8$ .

На рис. 3 поведение числового коэффициента в формулах, обобщающих соответственно (18) и (27), представлено при  $M = \text{const}$ . Тем самым иллюстрируется геометрическая зависимость упругого эффекта при заданном внутреннем магнитном состоянии образца. Чтобы связать удлинение  $\varepsilon$  непосредственно с приложенным полем и магнитными характеристиками ферроэласта, необходимо, как это было сделано ранее при построении рис. 2, найти решение  $\xi(\xi_0, \chi_0)$  уравнения (9) и использовать его в уравнении магнитного состояния (8). Результаты такого преобразования приведены на рис. 4 и 5. Рис. 4 показывает, как изменяется геометрический эффект в МДЭ с изменением приложенного поля. Максимумы на кривых  $\varepsilon(a/b)$  при  $\xi_0 = \text{const}$  имеют, конечно, ту же природу, что и зависимости, представленные на рис. 3. Поскольку функция Ланжевена насыщается в сильных полях, очевидно, что тем же свойством обладают и зависимости  $\varepsilon(\xi_0)$  при фиксированном начальном значении отношения  $a/b$ . Другое следствие насыщения намагниченности — появление предельного значения координаты точки максимального удлинения на оси  $a/b$ . В справедливости этого утверждения можно убедиться, рассматривая взаимное расположение линий уровня, изображенных на плоскости  $\varepsilon = 0$  (рис. 4).

Рис. 5 иллюстрирует связь геометрического эффекта удлинения с основным материальным параметром ферроэласта — его начальной магнитной восприимчивостью  $\chi_0 = n\mu_0 m^2 / (3kT)$ . Отличительная особенность, которую легче всего обнаружить, изучая расположение линий уровня, — это немонотонность поведения функции  $\varepsilon(\chi_0)$  при

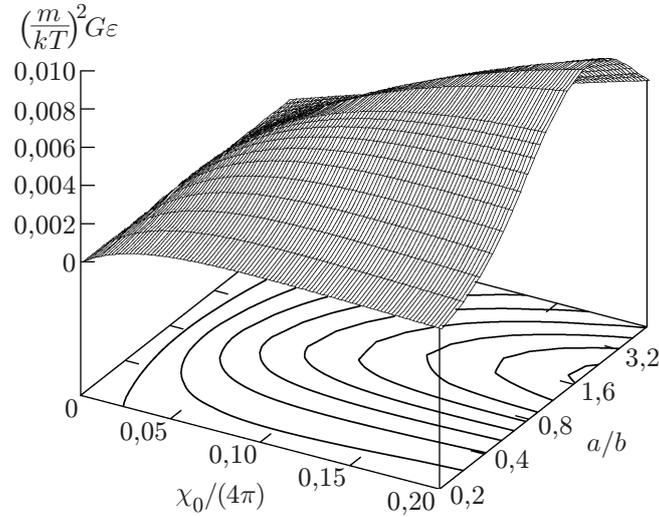


Рис. 5. Удлинение сфероида как функция начального значения  $a/b$  и начальной восприимчивости  $\chi_0/(4\pi)$ :  
приложенное поле  $\xi_0 = 1$ ; масштаб по оси  $a/b$  логарифмический

$a/b = \text{const}$ . Для того чтобы понять происхождение указанной линии максимумов, заметим следующее. В полностью немагнитном эластомере (концентрация магнитной фазы  $n = 0$ ) МДЭ, конечно, отсутствует. Однако он появляется в материале, обладающем уже сколь угодно слабой магнитной восприимчивостью. Действительно, для параметра удлинения в масштабе, выбранном на рис. 5, имеем  $\mu_0(m/kT)^2 G \varepsilon \propto \chi_0^2 L^2(\xi)$ , что при малых  $\chi_0$ , когда вклад восприимчивости во внутреннее поле несуществен, означает квадратичный рост. Тот же эффект должен проявляться и для достаточно вытянутых образцов, поскольку в уравнение (9) восприимчивость входит в произведении с продольным размагничивающим фактором. При не слишком малых восприимчивостях и не слишком вытянутых образцах, когда произведение  $3\chi_0 N$  становится сопоставимым с единицей, необходимо учитывать, что аргументом функции Ланжевена (8) является внутреннее поле  $\xi$ , определяемое из уравнения (9). Для случая, представленного на рис. 5, это уравнение следует решать при  $\xi_0 = \text{const}$ . В этих условиях при  $\xi_0 \gtrsim 1$  внутреннее поле  $\xi$  оказывается убывающей функцией магнитной восприимчивости вещества, что ведет к снижению достигаемой намагниченности материала и, таким образом, к уменьшению МДЭ. Иначе говоря, повышенная магнитная восприимчивость приводит к экранированию внутренней области образца от намагничивающего действия поля, приложенного извне.

**Заключение.** В работе предложена система уравнений равновесия ферроэластичного материала в присутствии внешнего магнитного поля. Сформулированы граничные условия для основных переменных задачи и записаны простейшие определяющие соотношения. Модельная среда представляет собой упругий, по Гуку, континуум, намагничивающийся по закону Ланжевена. Показано, что в качественном отношении магнитодеформационный эффект, возникающий в таком материале под действием однородного магнитного поля, совпадает с эффектом диэлектрической стрикции, описанным в [9].

Также показано, что стандартное допущение, что шар или эллипсоид вращения, подвергнутые МДЭ, всегда сохраняют сфероидальную форму, эквивалентно предположениям о том, что поля деформации и магнитное поле в образце всегда остаются однородными. Прямым расчетом, свободным от этого ограничения, найдено аналитическое решение задачи о МДЭ в сферическом образце и построено численное решение для произвольного

эллипсоида вращения. Как оказалось, разница между результатами точного расчета и классического подхода достигает 30 %. Найденны условия, при которых МДЭ максимален для эллипсоида вращения заданного объема. Обнаружено, что в некотором диапазоне приложенных полей повышенное содержание магнитной фазы в материале (увеличение начальной восприимчивости) ведет не к повышению, а к уменьшению магнитодеформационного эффекта.

В заключение оценим порядок величины МДЭ в мягком магнитном веществе. В типичном случае [1, 6] его магнитную фазу составляют частицы феррита, магнетита или гамма-окиси железа диаметром  $d \approx 10$  нм и намагниченностью насыщения  $I_S \approx 300$  кА/м. Модуль упругости матрицы (поливинилспиртовый или полиакриламидный гель) составляет  $G \approx 10^3$  Па. Концентрация феррочастиц  $\phi$  согласно, например, работе [6] достигает нескольких объемных процентов. Полагая  $\phi = 5$  %, находим числовую концентрацию  $n \approx \phi/d^3 \approx 10^{23}$  м<sup>-3</sup>. Оценивая значение магнитного момента отдельной частицы (в выбранном диапазоне размеров она находится в однодоменном состоянии), получаем  $\mu_0 m \approx \mu_0 I_S d^3 \approx 2 \cdot 10^{-25}$  Тл · м<sup>3</sup>. Отсюда для начальной восприимчивости при комнатной температуре получаем  $\chi_0 = \mu_0 n m^2 / (3kT) \approx 0,3$ . В принятых оценках для намагниченности насыщения феррогеля имеем  $M_0 = n m \approx 10$  кА/м. Используя затем формулу (27) для оценки параметра магнитодеформационного удлинения, находим, что по порядку величины он равен  $\varepsilon \approx \mu_0 M_0^2 / (3G) \approx 0,1$ . Несмотря на возможную неточность использованных данных, последнее значение показывает, что магнитодеформационный эффект в десятки процентов является вполне достижимой величиной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Zrinyi M., Barsi L., Büki A.** Deformation of ferrogels induced by nonuniform magnetic fields // J. Chem. Phys. 1996. V. 104, N 21. P. 8750–8756.
2. **Kato N., Takizawa Y., Takahashi F.** Magnetically driven chemomechanical device with poly(N-isopropylacrylamide) hydrogel containing  $\gamma$ -Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> // J. Intellig. Mater. Syst. Struct. 1997. V. 8, N 7. P. 588–596.
3. **Zrinyi M., Barsi L., Szabo D., Kilian H.-G.** Direct observation of abrupt shape transition in ferrogels induced by nonuniform magnetic field // J. Chem. Phys. 1997. V. 106, N 13. P. 5685–5692.
4. **Zrinyi M., Barsi L., Büki A.** Ferrogel: A new magneto-controlled elastic medium // Polymer Gels and Networks. 1997. V. 5. P. 415–427.
5. **Никитин Л. В., Миронова Л. С., Степанов Г. В., Самусь А. Н.** Влияние магнитного поля на упругие и вязкие свойства магнитоэластиков // Высокомолекуляр. соединения. 2001. Т. 43, вып. 4. С. 698–706.
6. **Galicja J. A., Sandre O., Cousin F., et al.** Designing magnetic composite materials using aqueous magnetic fluids // J. Phys.: Condens. Matter. 2003. V. 15, N 15. P. 1379–1402.
7. **Корнев К. Г., Никитин Л. В., Миронова Л. С.** Изменение формы сферического образца ферроэласта в однородном магнитном поле // XVI Междунар. школа-семинар “Новые магнитные материалы для микроэлектроники”: Тез. докл. М., 1998. Ч. 2. С. 387–388.
8. **Райхер Ю. Л., Столбов О. В.** Магнитодеформационный эффект в ферроэласте // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, вып. 4. С. 47–53.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 15/1 2004 г.