ПМТФ, № 4, 1969

# ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНОТОЧНОГО РАЗРЯДА В ПЛАЗМЕ НИЗКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

*А. А. Рухадзе, С. А. Тригер*

*(Москва)*

В работе рассматриваются равновесие и устойчивость оптически непрозрачного сильноточного разряда в условиях сильной лучистой теплопроводности, обеспечивающей однородность температуры в равновесном состоянии и ее быстрое выравнивание при колебаниях. Получены дисперсионные уравнения и вычислены инкременты развития неустойчивостей для случаев простого цилиндрического разряда ($Z$-пинч) и разряда с обратным осевым током. Рассмотрение проводится для предельного случая плазмы низкой проводимости, что отвечает параметрам разрядов, которые предполагается использовать в качестве плазменных источников света [1]. Показано, что поддержание разряда достаточно длительное время в состоянии, близком к равновесному, когда еще не успевают развиться крупномасштабные неустойчивости, способные существенно изменить равновесное состояние, возможно лишь в разряде с обратным током. Наличие неустойчивостей типа изгибов и перетяжек в плазме низкой проводимости наряду с известным фактом существования таких неустойчивостей в плазме высокой проводимости [2,3] позволяет думать, что такого рода неустойчивости присущи плазме произвольной проводимости.

В связи со значительным интересом к проблеме использования сильноточных импульсных разрядов в качестве мощных источников света в работах [1,4] было предпринято теоретическое рассмотрение равновесия и устойчивости разрядов в оптически плотной и оптически прозрачной плазме с целью выяснения их свойств при температуре излучающей поверхности $T \sim (3-10)$ *eV* и плотности частиц $N \sim 10^{19}$ *см*$^{-3}$. Как известно из работ по управляемому термоядерному синтезу, самосжатый разряд гидродинамически неустойчив: в нем развиваются неустойчивости типа локального перегрева, изгибов и перетяжек, что приводит к срыву тока и развалу плазмы за очень короткие времена, составляющие, как правило, несколько микросекунд (см. [3] и цитированную там литературу). Поэтому одной из основных проблем при использовании сильноточных разрядов в плазме в качестве источников света является проблема устойчивости разряда.

Однако, как отмечалось в [1], применение теории, изложенной в [2], к обсуждаемому случаю незаконно, так как там речь идет о высокотемпературной, практически бесконечно проводящей плазме, являющейся прозрачной для излучения. Для целей, указанных выше, представляет интерес как непрозрачная, так и прозрачная плазма в условиях достаточно низких температур ($T \sim (3-10) eV$), когда существенную роль могут играть эффекты конечной проводимости (диффузия электромагнитных полей в плазму, отсутствие скинирования тока и т.п.), которыми можно пренебречь в случае высокотемпературной термоядерной плазмы.

**1. Постановка задачи.** Равновесие и устойчивость плоского и цилиндрического разрядов в непрозрачной плазме были исследованы на основе уравнений одножидкостной магнитной гидродиамики в работе [1].

Исследование равновесного состояния разряда показало, что характерный масштаб изменения температуры $x_T$ ($r_T$ — для цилиндрического разряда) существенно отличается от характерного масштаба изменения давления и плотности $x_p$ ($r_p$). Выполнение неравенства $x_T \gg x_p$ ($r_T \gg r_p$) обеспечивает однородность температуры по сечению разряда, а следовательно, и высокую температуру излучающей поверхности плазмы. Анализ колебаний с длинами волн $\lambda_x \ll x_p$ показал, что в приближении геометрической оптики разряд устойчив. Для анализа длин волн колебаний, сравнимых с характерными размерами системы, оказывается возможным использовать приближение, в котором флуктуации температуры практически мгновенно рассасываются большой лучистой теплопроводностью. Условием справедливости такого приближения будет неравенство $\varkappa_T^2 c^2 \gg x_p^3 \sigma_0 v_s$.

В работе [1] рассматривалась устойчивость как равновесного, так и неравновесного разрядов в случаях высокой $c^2 < \sigma_0 v_s x_p$ и низкой $c^2 > > \sigma_0 v_s x_p$ проводимости в предположении постоянства температуры разряда и отсутствия ее флуктуаций. Отметим, что рассмотрение устойчивости неравновесного разряда особенно существенно в плазме высокой проводимости, поскольку установление равновесия по полю, сводящееся к его выравниванию по сечению разряда, определяется скиновым временем $\tau_* \approx 4\pi\sigma_0 x_p^2 c^{-2}$. Очевидно, что говорить об устойчивости установившегося равновесия можно только в случае, если скиновое время $\tau_*$ меньше времени, характеризующего длительность процесса формирования разряда $\tau \approx x_p/v_s$, т. е. при условии

$$c^2 \gg 4\pi\sigma_0 v_s x_p \tag{1.1}$$

В плазме высокой проведимости это неравенство не выполняется. Устойчивость плазмы низкой проводимости, в которой имеет место обратное (1.1) неравенство, может рассматриваться в предположении о существовании равновесия.

В работе [1] устойчивость равновесного цилиндрического разряда низкой проводимости исследовалась лишь для моды $m = 0$ в длинноволновом пределе. В данной работе проводится полное рассмотрение устойчивости цилиндрического разряда и равновесия и устойчивости разряда с обратным током в плазме низкой проводимости. В указанных выше предположениях о высокой лучистой теплопроводности все процессы, протекающие в такой плазме, можно считать изотермическими. Система уравнений магнитной гидродинамики при этом записывается в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \qquad p = \frac{(1+z)\varkappa}{M}\rho T \equiv v_s^2\rho \\
\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{B}, \mathbf{B}] \\
\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \Delta\mathbf{B} = 0
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Как будет видно далее, граничные условия к системе (1.2) получаются непосредственно из уравнений (1.2) путем использования явного вида равновесных решений как для простого цилиндрического разряда, так и разряда с обратным током.

2. **Простой цилиндрический разряд (z-пинч.).** Как известно, равновесное состояние цилиндрического разряда поддерживается током, собственное магнитное поле которого в каждой точке уравновешивает кинетическое давление плазмы. В равновесном стационарном состоянии разрядное поле $E_0$ постоянно по сечению разряда, а гидродинамическая скорость $\mathbf{v}_0 = 0$. Выражения для равновесных значений гидродинамических величин имеют следующий вид [1]:

$$\begin{gathered}
p_0 = p_0(0)\left(1 - \frac{r^2}{r_p^2}\right), \qquad \rho_0 = \rho_0(0)\left(1 - \frac{r^2}{r_p^2}\right) \\
B_0 = \sqrt{4\pi p_0(0)}\,\frac{r}{r_p}, \qquad r_p^2 = \frac{p_0^2(0)\,c^2}{\pi j_0^2}
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Рассмотрим устойчивость этого равновесного состояния. Линеаризуя систему (1.2) по малым отклонениям гидродинамических величин от равновесных значений, зависящим от времени и координат, в виде $\varphi(r)\exp(-i\omega t + im\varphi + ik_z z)$, получим следующую систему уравнений для возмущений:

$$-i\omega\frac{p_1}{v_s^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\rho_0 v_r+\frac{im}{r}\rho_0 v_\varphi+ik_z\rho_0 v_z=0 \tag{2.2}$$

$$i\omega\rho_0 v_r=\frac{\partial}{\partial r}\left(p_1+\frac{B_0B_\varphi}{4\pi}\right)+\frac{B_0B_\varphi}{2\pi r}-\frac{im}{4\pi r}B_0B_r \tag{2.3}$$

$$i\omega\rho_0 v_\varphi=\frac{im}{r}p_1-\frac{B_0B_r}{2\pi r} \tag{2.4}$$

$$i\omega\rho_0 v_z=ik_z\left(p_1+\frac{B_0B_\varphi}{4\pi}\right)-\frac{im}{4\pi r}B_0B_z \tag{2.5}$$

$$\Delta B_r-\frac{B_r}{r^2}-\frac{2im}{r^2}B_\varphi=0,\qquad \Delta B_\varphi-\frac{B_\varphi}{r^2}+\frac{2im}{r^2}B_r=0$$
$$\Delta B_z=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0 \tag{2.6}$$

Исследуем отдельно устойчивость мод с $m=0$ и $m\neq 0$. При $m=0$ уравнения для $B_r$ и $v_\varphi$ отделяются. Ограниченное в нуле решение для $B_\varphi$ имеет вид

$$B_\varphi=C_1I_1(\beta r),\qquad \beta\equiv|k_z| \tag{2.7}$$

Подставляя выражения для $v_r$ и $v_z$ из (2.3) и (2.4) в (2.2) и используя явный вид $B_\varphi$ (2.7), получаем для $p_1$ неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, из которого находится ограниченное в нуле решение

$$p_1=C_2I_0(\alpha r)+\Gamma\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}I_0(\beta r)$$
$$\alpha\equiv\left|\sqrt{k_z^2-\frac{\omega^2}{v_s^2}}\right|=\left|\sqrt{k_z^2+\frac{\gamma^2}{v_s^2}}\right|\qquad\left(\Gamma\equiv\frac{C_1B_0\beta}{\pi r\alpha^2}\right) \tag{2.8}$$

Здесь вместо частоты $\omega$ введено $\gamma=i\omega$. Для неустойчивых решений $\gamma>0$.

Граничные условия к задаче следуют из обращения плотности $\rho_0$ в нуль на границе плазмы. Ввиду ограниченности возмущения скорости плазмы на границе правые части уравнений (2.3) и (2.5) при $r=r_p$ должны обращаться в нуль, что и дает два граничных условия

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(p_1+\frac{B_0B_\varphi}{4\pi}\right)+\frac{B_0B_\varphi}{2\pi r}\right]_{r=r_p}=0,\qquad\left[p_1+\frac{B_0B_\varphi}{4\pi}\right]_{r=r_p}=0 \tag{2.9}$$

Легко показать, что второе из условий (2.9) имеет наглядный физический смысл сохранения полного тока в разряде при возмущениях.

Подставляя в (2.9) решения (2.7) и (2.8), получаем систему однородных алгебраических уравнений для коэффициентов $C_1$ и $C_2$, из условия разрешимости которой получаем для моды с $m=0$ следующее дисперсионное уравнение:

$$(\alpha^2+\beta^2)I_1(\beta r_p)\,I_0(\alpha r_p)-2\alpha\beta I_0(\beta r_p)I_1(\alpha r_p)+{}^1/_2r_p(\beta^2-$$
$$-\alpha^2)\,[\alpha I_1(\alpha r_p)I_1(\beta r_p)-\beta I_0(\alpha r_p)I_0(\beta r_p)]=0 \tag{2.10}$$

Это уравнение имеет решение в двух случаях. Для длинных волн $\beta r_p\ll 1$, $\alpha r_p\ll 1$, причем $\alpha\gg\beta$ уравнение (2.10) приводит к спектру

$$\alpha^2=\pm 2\sqrt{3}\,\frac{\beta}{r_p}\quad\text{или}\quad\gamma^2=\pm 2\sqrt{3}\,\frac{|k_z|\,v_s^2}{r_p} \tag{2.11}$$

Этот спектр совпадает с неустойчивым решением, найденным Б. А. Трубниковым [2] для изотермической плазмы бесконечной проводимости, но в предположении распределенного тока. Как видно из (2.11), в плазме низкой проводимости эта неустойчивость сохраняется.

В области коротких длин волн $\beta r_p \gg 1$, $\alpha r_p \gg 1$ уравнение (2.11) имеет неустойчивый корень

$$\alpha = \beta + \frac{1}{r_p} \quad \text{или} \quad \gamma^2 \approx \frac{2\,|k_z|\,v_s^2}{r_p} \tag{2.12}$$

Максимальный инкремент коротковолновых колебаний ограничен условием применимости приближения лучистой теплопроводности $l < \lambda_z$, поэтому $\gamma_{\max} < 2v_s^2 / l r_p$, где $l$ — расселандов пробег квантов.

Все высшие моды длинноволновых неустойчивостей, а также коротковолновые моды типа $v^2 \sim k_z^2 v_s^2$, существующие в плазме высокой проводимости, оказываются стабилизированными в плазме низкой проводимости. Необходимо отметить, что характер пространственного поведения решений (2.7), (2.8) для возмущений отличается от случая высокой проводимости. Они монотонно спадают от границы в глубь плазмы, тогда как в случае высокой проводимости имело место осцилляторное изменение решений в объеме плазмы. Следствием этого является эффективное увеличение времени развития коротковолновых неустойчивостей в глубине плазмы. Что касается быстро развивающихся поверхностных мелкомасштабных возмущений, то они не представляются опасными. По изложенным причинам можно считать, что цилиндрический разряд низкой проводимости более устойчив по отношению к аксиально-симметричным неустойчивостям, чем разряд высокой проводимости.

Перейдем теперь к исследованию мод с $m \neq 0$, представляющих собой изгибные и винтовые возмущения самосжатого разряда. Решая систему уравнений (2.2) — (2.6), получим

$$\begin{gathered} B_z = C_1 I_m(\beta r), \qquad B_r = \frac{C_2}{\beta r} I_m(\beta r) - iC_1 \operatorname{sign} k_z \frac{\partial I_m(\beta r)}{\partial \beta r} \\ p_1 = C_3 I_m(\alpha r) + \Gamma \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} I_m(\beta r), \qquad \Gamma \equiv \frac{i\beta B_0}{\pi m \alpha^2 r} C_2 \end{gathered} \tag{2.13}$$

Найденные решения системы (2.2) — (2.6) выделены из общих требованием конечности возмущений при $r = 0$. Граничные условия, как и для случая $m = 0$, получаются непосредственно из уравнений (2.3) — (2.5) и имеют вид

$$\begin{gathered} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(p_1 + \frac{B_0 B_\varphi}{4\pi}\right) + \frac{B_0 B_\varphi}{2\pi r} - \frac{im}{4\pi r} B_0 B_r\right]_{r=r_p} = 0 \\ \left[\frac{im}{r} p_1 - \frac{B_0 B_r}{2\pi r}\right]_{r=r_p} = 0, \quad \left[p_1 + \frac{B_0 B_\varphi}{4\pi} - \frac{m}{4\pi r k_z} B_0 B_z\right]_{r=r_p} = 0 \end{gathered} \tag{2.14}$$

Условие разрешимости уравнений (2.14) относительно коэффициентов $C_1$, $C_2$, $C_3$ приводит к следующему дисперсионному уравнению для определения спектров колебаний плазмы:

$$\begin{gathered} \alpha I_{m+1}(\alpha r_p) \left[\frac{\beta^2}{r_p^2} I_m(\beta r_p) \frac{\partial I_m(\beta r_p)}{\partial r_p} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4 r_p} \left(\frac{\partial I_m(\beta r_p)}{\partial r_p}\right)^2\right] + \\ + I_m(\alpha r_p) \left\{ I_m(\beta r_p) \frac{\partial I_m(\beta r_p)}{\partial r_p} \left[\frac{m\beta^2}{r_p^3} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\beta^2}{4 r_p} - \frac{m^2(\alpha^2 - \beta^2)}{4 r_p^3}\right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial I_m(\beta r_p)}{\partial r_p}\right)^2 \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2) m - 2(\alpha^2 + \beta^2)}{4 r_p}\right] + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) m^2}{2 r_p^4} I_m^2(\beta r_p) \right\} = 0 \end{gathered} \tag{2.15}$$

В области наиболее опасных длинноволновых колебаний $\beta r_p \ll 1$, $\alpha r_p \ll 1$, разлагая члены уравнения (2.15) в ряд по степеням $\beta r_p$ и $\alpha r_p$ вплоть до членов четвертого порядка, находим неустойчивые корни

$$\alpha^2 = \beta^2 \frac{m+2}{m} \quad \text{или} \quad \gamma^2 = \frac{2}{m} k_z^2 v_s^2 \tag{2.16}$$

Заметим, что это решение не годится для моды $m = 0$, проанализированной выше. В коротковолновом пределе $|k_z| r_p \gg 1$ спектр неустойчивых колебаний имеет вид

$$\alpha^2 = \beta^2 + \frac{2\beta}{r_p} \quad \text{или} \quad \gamma^2 = \frac{2|k_z| v_s^2}{r_p} \tag{2.17}$$

Этот спектр совпадает с соответствующим спектром для моды с $m = 0$ (см. 2.12), т. е. коротковолновые неустойчивости имеют одинаковый инкремент для всех азимутальных мод. Из (2.16) и (2.17) следует, что в плазме низкой проводимости возможно возбуждение колебаний со всевозможными $m$, в то время как в плазме высокой проводимости в отсутствие внешнего магнитного поля моды с $m \geqslant 2$ в длинноволновом пределе не возбуждаются, будучи стабилизированы собственным магнитным полем тока [5]. В этом случае по отношению к возмущениям с $m \neq 0$ разряд в плазме низкой проводимости менее устойчив, чем разряд в идеально проводящей плазме.

**3. Разряд с обратным током.** Перейдем к рассмотрению разряда с обратным током в оптически плотной плазме в условиях лучистой теплопроводности. Такая система состоит из коаксиального цилиндрического слоя с током и массивного металлического проводника, расположенного вдоль оси системы, по которому течет ток обратного направления.

Как будет показано ниже, такой разряд обладает значительно большей устойчивостью, чем простой цилиндрический разряд ($z$-пинч). Этот факт был известен уже из первых немногочисленных исследований разрядов с обратным током в высокотемпературной, идеально проводящей плазме [6]. Кроме того, возможность создания у таких систем очень большой излучающей поверхности делает их более перспективными для использования в качестве мощных источников света, чем $z$-пинчи.

Система уравнений, описывающая равновесие разряда с обратным током, имеет тот же вид, что и для $z$-пинча [1]. При решении этой системы следует, однако, учитывать азимутальное поле обратного тока.

Считая температуру плазмы постоянной вследствие большой лучистой теплопроводности, находим следующее распределение равновесных величин в разряде с обратным током:

$$\begin{gathered} B_0 = \frac{2\pi}{c} \sigma_0 E_0 r \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right) \\ p_0 = p_m + \frac{\pi R_0^2 \sigma_0^2 E_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} + \ln \frac{r^2}{R_0^2}\right) \\ \rho_0 = \rho_m + \frac{\pi R_0^2 \sigma_0^2 E_0^2}{c^2 v_s^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} + \ln \frac{r^2}{R_0^2}\right) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $p_m$ и $\rho_m$ — максимальные значения давления и плотности плазмы, которые достигаются в точке $r = R_0$. Разряд, как следует из (3.1); сосредоточен в области $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, где $r_1$ и $r_2$—корни уравнения $p_0(r) = 0$. Величины $R_0$ и $r_1$ связаны между собой соотношением

$$R_0^2 = r_1^2 + \frac{I_0}{\pi j_0} \tag{3.2}$$

где $j_0$ — плотность разрядного тока, а $I_0$ — полный осевой ток. В предельном случае $R_0 \to 0$ (т. е. $I_0 \to 0$, при этом и $r_1 \to 0$) формулы (3.1) переходят в (2.1) для простого $z$-пинча.

При больших $I_0$ равновесный радиус $R_0 \gg r_2 - r_1$. В этом случае удобно ввести переменную $x = r - R_0$ ($|x| \ll R_0$). Разлагая (3.1) в ряд по степеням $x/R_0$, получаем

$$B_0 = \frac{4\pi}{c}\sigma_0 E_0 x = \sqrt{8\pi p_m}\frac{x}{x_p} \tag{3.3}$$

$$p_0 = p_m\left(1 - \frac{x^2}{x_p^2}\right), \quad \rho_0 = \rho_m\left(1 - \frac{x^2}{x_p^2}\right), \quad x_p^2 = \frac{p_m c^2}{2\pi\sigma_0^2 E_0^2}$$

Эти формулы в точности совпадают с распределением равновесных величин в плоском поверхностном разряде [1]. Эквивалентность обратного пинча при больших осевых токах плоскому разряду имеет место при условии

$$\frac{R_0}{x_p} = \frac{I_0 j_0}{p_m c^2} = \frac{I_0 \sigma_0 E_0}{p_m c^2} \gg 1 \tag{3.4}$$

При этом равновесный радиус $R_0$ равен

$$R_0 = \frac{I_0}{\sqrt{2\pi p_m}\,c} \tag{3.5}$$

и выполняется соотношение

$$I_n = 4\pi R_0 x_p j_0 = 2I_0$$

Выразим теперь величины $T_m$ и $\rho_m$ (или $N_m$) через полное число частиц, захваченных в разряде, и полный ток разряда. Для полного числа частиц на 1 *см* длины плазменного слоя имеем:

$$N_n = 4\pi R_0 \int_0^{x_p} dx N_m\left(1 - \frac{x^2}{x_p^2}\right) = \frac{8\pi}{3} R_0 x_p N_m \tag{3.6}$$

Температуру плазмы определим, исходя из баланса энергии между излучением с поверхности плазмы и омическим нагревом

$$\hat{\sigma} T_m^4 = \sigma_0 x_p E_0^2 \tag{3.7}$$

Используя (3.6) и (3.7), можно показать, что разрядный ток в обратном пинче не ограничен сверху, как это имеет место в случае $z$-пинча в высокотемпературной идеально проводящей плазме [7]. Температура плазмы связана с полным числом захваченных частиц и полным разрядным током соотношением

$$T_m = \frac{I_n^3}{12 I_0}\,\frac{1}{(1+z)\varkappa c^2 N_n}\,\frac{x_p}{R_0} \tag{3.8}$$

Так же как в простом $z$-пинче, в оптически плотной плазме в обратном пинче увеличение разрядного тока приводит к росту температуры плазмы и тем самым мощности излучения.

Наконец, заметим, что условие слабой неоднородности температуры $x_T^2 \gg x_p^2$ и условие применимости лучистой теплопроводности $x_p > l_0$ в рассматриваемом случае $R_0 \gg x_p$ совпадают с соответствующими условиями для плоского пинча [1].

Анализ устойчивости разряда с обратным током основывается на той же системе уравнений (2.2) — (2.6), что и для цилиндрического разряда, с той лишь разницей, что граничные условия (2.9), (2.14) ставятся теперь на обеих границах разряда, в точках $r_1$ и $r_2$ (или $x = \pm x_p$ для случая $R_0 \gg x_p$). Решение поставленной задачи сопряжено с громоздкими математическими выкладками. Окончательные результаты удается получить только для мод с $m = 0$. В этом случае дисперсионное уравнение может быть записано в виде равенства нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \chi_1 & \xi_1 \\ u_2 & v_2 & \chi_2 & \xi_2 \\ p_1 & t_1 & k_1 & s_1 \\ p_2 & t_2 & k_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.9)$$

где $\varphi_1 \equiv \varphi(r_1)$, $\varphi_2 \equiv \varphi(r_2)$, а сами функции, входящие в детерминант, таковы:

$$\begin{aligned} u &= \alpha I_1(\alpha r), & \chi &= \frac{j_0}{c}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} I_1(\beta r) + \frac{\beta B_0}{4\pi} I_0(\beta r) \\ v &= -\alpha K_1(\alpha r), & \xi &= \frac{j_0}{c}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} K_1(\beta r) - \frac{\beta B_0}{4\pi} K_0(\beta r) \\ p &= I_0(\alpha r), & k &= \frac{2j_0\beta}{c(\alpha^2-\beta^2)} I_0(\beta r) + \frac{B_0}{4\pi} I_1(\beta r) \\ t &= K_0(\alpha r), & s &= -\frac{2j_0\beta}{c(\alpha^2-\beta^2)} K_0(\beta r) + \frac{B_0}{4\pi} K_1(\beta r) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Здесь $I_\nu$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $K_\nu$ — функции Макдональда, $\alpha$ и $\beta$ введены по формуле (2.8).

Для случая наиболее коротковолновых колебаний, когда $\beta(r_2 - r_1) \gg 1$, дисперсионное уравнение (3.9) сводится к виду

$$\begin{gathered}(\alpha^2+\beta^2) I_0(\alpha r_2) I_1(\beta r_2) - 2\alpha\beta I_1(\alpha r_2) I_0(\beta r_2) + \left(1 - \frac{R_0^2}{r_2^2}\right) \times \\ \times (\beta^2-\alpha^2)\frac{r_2}{2}\{\alpha I_1(\alpha r_2) I_1(\beta r_2) - \beta I_0(\alpha r_2) I_0(\beta r_2)\} = 0 \end{gathered} \qquad (3.11)$$

В искомой области, считая $r_2$ близким к $R_0$, $r_2 - R_0 = x_p \ll R_0$, находим неустойчивый корень

$$\alpha = \beta + \frac{1}{R_0} \quad \text{или} \quad \gamma^2 \approx \frac{2|k_z| v_s^2}{R_0} \qquad (3.12)$$

Максимальный инкремент коротковолновых колебаний

$$\gamma_{\max} \approx 2v_s^2 / R_0 l$$

где $l$ — росселандов пробег квантов. В области $\beta R_0 \gg 1$, $\beta x_p \ll 1$ (считая $R_0 \gg x_p$) уравнение (3.9) решений не имеет. Наконец, для длинноволновых колебаний, когда $\beta R_0 \ll 1$, из (3.9) находим

$$\gamma^2 = \frac{2|k_z| v_s^2}{R_0} < \frac{v_s^2}{R_0^2} \qquad (3.13)$$

Таким образом, наибольшим инкрементом обладают коротковолновые неустойчивости с длиной волны меньшей толщины слоя разряда. Однако, как отмечалось выше, при рассмотрении $z$-пинча такие неустойчивости не представляют большой опасности для разряда в целом. Опасные же длинноволновые неустойчивости с $|k|_z R_0 \ll 1$ развиваются значительно медленнее, чем в цилиндрическом пинче (при достаточно большом $R_0$).

Анализ мод с $m \neq 0$ весьма сложен. В коротковолновом пределе, когда $|k_z|\, x_p \gg 1$, тем не менее удается показать, что инкремент не зависит от азимутального числа $m$ и имеет тот же вид, что и в $z$-пинче с заменой $r \to R_0$, т. е.

$$\gamma^2 = \frac{2\,|k_z|\,v_s^2}{R_0} \tag{3.14}$$

Согласно изложенной теории в плазме низкой проводимости возможно осуществить равновесный разряд при условии, что время развития неустойчивостей оказывается больше времени проникновения разрядного поля в плазму, т. е.

$$\gamma 4\pi\sigma_0 a_1^2 < c^2 \tag{3.15}$$

Для цилиндрического разряда $a_1 = r_p$, $\gamma \sim v_s/r_p$, для обратного пинча $a_1 \approx x_p$, $\gamma \sim v_s/R_0$.

Длительность существования равновесного состояния определяется временами развития неустойчивостей. В простом $z$-пинче при температурах $T \approx (3—10)$ $eV$ и радиусе $r_p \approx 2—3$ *см* время развития неустойчивостей $\tau_1 \approx 10^{-5}$ *сек* $= 10$ *мксек*. Большие значения $r_p$ недостижимы ввиду нарушения условия (3.15). Что касается обратного пинча, то он может поддерживаться достаточно длительное время $\tau_2 \sim R_0/v_s \approx 50 - 100$ *мксек* благодаря большому значению $R_0$. В сочетании со значительной излучающей поверхностью это позволяет рассматривать разряд с обратным током как возможный плазменный источник света.

Поступила 16 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Рухадзе А. А., Тригер С. А. О равновесии и устойчивости сильноточного разряда в плотной плазме в условиях лучистой теплопроводности. ПМТФ, 1968, № 3.
2. Трубников Б. А. О неустойчивости цилиндра плазмы. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». М., Изд-во АН СССР, 1958, т. 1.
3. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. В сб.: «Вопр. теории плазмы», М., Атомиздат, 1963, т. 2.
4. Розанов В. Б., Рухадзе А. А., Тригер С. А. Теория равновесия и устойчивости сильноточного разряда в плотной, оптически прозрачной плазме. ПМТФ, 1968, № 5.
5. Волков Т. Ф. Об устойчивости цилиндра плазмы во внешнем магнитном поле. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». М., Изд. АН СССР, 1958, т. 2.
6. Андерсон, Бейкер, Айз, мл., Канкель. Устройство для получения самосжатого разряда в форме слоев. Тр. II Междунар. конференц. по мирн. использ. атомн. энергии, Женева, 1958, Докл. иностр. ученых, М., Атомиздат, 1959, т. 1.
7. Брагинский С. И. Стягивание плазмы под действием собственного магнитного поля. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», М., Изд-во АН СССР, 1958, т. 1.