

УДК 532.59:539.3:534.12

## ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ С ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

А. Е. Букатов, А. А. Букатов

Морской гидрофизический институт НАН Украины, 99011 Севастополь, Украина  
E-mail: newisland@list.ru

Методом многих масштабов получены уравнения для трех нелинейных приближений волнового возмущения в однородной идеальной несжимаемой жидкости, покрытой тонкой упругой пластиной, учитывающие нелинейность ускорения вертикальных смещений пластины при ее изгибе. На основе этих уравнений построены асимптотические разложения до величин третьего порядка малости для потенциала скорости движения жидких частиц и возмущения поверхности пластина — жидкость (изгиба пластины), формируемых бегущей периодической волной конечной амплитуды. Проведен анализ зависимости волновых характеристик от модуля упругости и толщины пластины, длины и наклона волны начальной основной гармоники.

**Ключевые слова:** поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, колебания плавающей пластины.

**Введение.** В линейной постановке исследование волновых возмущений в жидкости с плавающей упругой пластиной проведено в работах [1–7]. Волны конечной амплитуды в однородной жидкости с упругой ледяной пластиной без учета нелинейности ускорения ее вертикальных смещений рассмотрены в [8, 9]. В работе [10] проведен анализ зависимости характеристик прогрессивных поверхностных волн конечной амплитуды от толщины и нелинейности ускорения вертикальных колебаний абсолютно гибкой пластины (битого льда). В настоящей работе с использованием метода многомасштабных асимптотических разложений исследуется влияние плавающей упругой пластины на распространение периодических волн конечной амплитуды с учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений пластины, обусловленных ее изгибом.

**Постановка задачи.** Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн постоянной глубины  $H$ , плавает тонкая упругая пластина. В предположении, что движение жидкости является потенциальным, а колебания пластины безотрывными, рассмотрим влияние упругости и толщины пластины на распространение изгибно-гравитационных волн конечной амплитуды. В безразмерных переменных  $x = kx_1$ ,  $z = kz_1$ ,  $t = \sqrt{kg}t_1$  ( $k$  — волновое число) задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1)$$

для потенциала скорости  $\varphi(x, z, t)$  с граничными условиями на поверхности пластина — жидкость ( $z = \zeta$ )

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \varkappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \zeta - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (2)$$

и на дне бассейна ( $z = -H$ )

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

а также с начальными условиями

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \varkappa = h \frac{\rho_1}{\rho},$$

$E, h, \rho_1, \nu$  — модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона пластины соответственно;  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения. Потенциал скорости  $\varphi(x, z, t)$  и возмущение поверхности пластина — жидкость  $\zeta(x, t)$  связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

В динамическом условии (2) выражение, содержащее множитель  $\varkappa$ , описывает инерцию вертикальных смещений пластины, при этом первое слагаемое обусловлено нелинейностью ускорения ее вертикальных смещений при изгибе.

**Уравнения для нелинейных приближений.** В предположении справедливости разложений

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon \zeta_0, & \varphi &= \varepsilon \varphi_0, & f &= \varepsilon f_0, \\ \zeta_0 &= \zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \varepsilon^2 \zeta_3 + O(\varepsilon^3), & \varphi_0 &= \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_3 + O(\varepsilon^3), \\ f_0 &= f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

методом многих масштабов [11] задача (1)–(5) сводится к определению нелинейных приближений порядка  $\varepsilon^n$  из уравнений

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq 0; \quad (6)$$

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta_n}{\partial x^4} - \varkappa k \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z \partial T_0} + \zeta_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} = F_n^*, \quad z = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n, \quad z = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H; \quad (9)$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0, \quad (10)$$

где  $f_n(x)$  — приближение порядка  $\varepsilon^n$  для начального смещения пластина — жидкость;

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t,$$

$$F_n^* = F_n + F_n^0, \quad F_1 = F_1^0 = L_1 = G_1 = 0, \quad n = 1, 2, 3,$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \varkappa k N,$$

$$N = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z}, \quad L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1},$$

$$F_3 = \zeta_1 N_1 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + N_2 + \varkappa k N_3,$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \\
 N_2 &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \zeta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\
 N_3 &= \zeta_1 N_4 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \zeta_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2}, \\
 N_4 &= \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_1}, \quad G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}, \\
 L_3 &= \zeta_1 N_5 - \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2, \\
 N_5 &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, \quad F_2^0 = -\kappa k \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\
 F_3^0 &= -\kappa k \left[ \zeta_1 N_6 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) \right], \\
 N_6 &= \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что наличие слагаемых  $F_2^0, F_3^0$  в правых частях динамических условий (7) для второго ( $n = 2$ ) и третьего ( $n = 3$ ) приближений обусловлено учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений пластины.

**Выражения для потенциала скорости и возмущения поверхности пластина — жидкость.** Уравнения (6)–(10) получены для общего случая неустановившихся возмущений конечной амплитуды. В случае бегущих периодических волн решение соотношений (6)–(10) будем искать, задавая  $f_n(x)$  в соответствующем виде. Для этого первое приближение ( $n = 1$ ) возмущения поверхности пластина — жидкость  $\zeta_1$  представим в форме волны

$$\zeta_1 = \cos \theta, \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2), \quad (11)$$

направление движения которой противоположно направлению оси  $x$ . Тогда из кинематического условия (8) находим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \tau \sin \theta, \quad z = 0. \quad (12)$$

Удовлетворяя граничному условию (9) на дне бассейна, потенциал скорости  $\varphi_1$  представим в виде

$$\varphi_1 = b_0 \operatorname{ch}(z + H) \sin \theta. \quad (13)$$

Подставляя соотношение (13) в (12), получаем  $b_0 = \tau (\operatorname{sh} H)^{-1}$ . Следовательно,

$$\varphi_1 = b_1 \sin \theta, \quad b_1 = \tau (\operatorname{sh} H)^{-1} \operatorname{ch}(z + H). \quad (14)$$

С учетом (11), (14) из динамического условия (7) находим дисперсионное соотношение

$$\tau^2 = (1 + D_1 k^4) (1 + \kappa k \operatorname{th} kH)^{-1} \operatorname{th} kH.$$

Подставляя (11), (14) в правые части выражений (7), (8), при условии отсутствия основной гармоники получаем

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta, \quad \varphi_2 = b_2 \sin 2\theta, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= 3\tau^2\eta_2/(4\mu_2 \operatorname{th} H), & b_2 &= \tau\nu_2 \operatorname{ch} 2(z+H)/(4\mu_2 \operatorname{ch} 2H \operatorname{th} H), \\ \eta_2 &= (\operatorname{th} H - \operatorname{cth} H - 2\kappa k) \operatorname{th} 2H, & \nu_2 &= \tau^2(5 \operatorname{th} H - \operatorname{cth} H + 2\kappa k) - 2(1 + 16D_1k^4), \\ \mu_2 &= (1 + 16D_1k^4) \operatorname{th} 2H - 2\tau^2(1 + 2\kappa k \operatorname{th} 2H). \end{aligned}$$

Подставляя решение (11), (14) для первого приближения и решение (15) для второго приближения в правые части динамического (7) и кинематического (8) условий задачи для третьего ( $n = 3$ ) приближения и исключая из них слагаемые, порождающие секулярность, находим

$$\begin{aligned} \zeta_3 &= a_3 \cos 3\theta, & \varphi_3 &= b_3 \sin 3\theta, \\ a_3 &= \tau^2\eta_3/\mu_3, & b_3 &= \tau\nu_3 \operatorname{ch} 3(z+H)/(3\mu_3 \operatorname{ch} 3H), \\ \eta_3 &= (l_1 - 3\kappa kl_2) \operatorname{th} 3H - l_2, & \nu_3 &= 3\tau^2l_1 - l_2(1 + 81D_1k^4), \\ l_1 &= \kappa kl_{11} + l_{12}, & l_2 &= (1/2)a_2(3 \operatorname{cth} H + 6 \operatorname{cth} 2H) - (3/2) \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H + 5/8, \\ l_{11} &= a_2(5 \operatorname{cth} 2H - (1/2) \operatorname{cth} H) + (1/2)(\operatorname{cth} H - 5 \operatorname{cth} 2H) \operatorname{cth} H - 1/8, \\ l_{12} &= a_2(11/2 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H) + ((1/2) \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 15/8) \operatorname{cth} H, \\ \mu_3 &= (1 + 81D_1k^4) \operatorname{th} 3H - 3\tau^2(1 + 3\kappa k \operatorname{th} 3H), \\ \beta &= \tau\sigma_0 T_2, & \sigma_0 &= (1/2)[l_3 - l_4(\kappa k + \operatorname{cth} H)^{-1}], \\ l_3 &= (1/2)a_2(\operatorname{cth} H + 2 \operatorname{cth} 2H) - (1/2) \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 3/8, \\ l_4 &= \kappa kl_{41} - l_{42}, & l_{41} &= a_2(\operatorname{cth} 2H - (5/2) \operatorname{cth} H) + (1/2)(\operatorname{cth} H - \operatorname{cth} 2H) \operatorname{cth} H - 3/8, \\ l_{42} &= a_2(1/2 + \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H) - (1/2)(\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 5/4) \operatorname{cth} H. \end{aligned}$$

В результате возмущение поверхности пластина — жидкость  $\zeta$  и потенциал скорости движения жидкости  $\varphi$  до величин третьего порядка малости определяются из выражений

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos n\theta, & \varphi &= \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n b_n \sin n\theta, \\ \theta &= x + \sigma t, & \sigma &= \tau(1 + \varepsilon^2\sigma_0), & a_1 &= 1. \end{aligned}$$

В размерных переменных ( $\zeta = \zeta/k$ ,  $\varphi = \varphi\sqrt{kg}/k^2$ ,  $\varepsilon = ak$  ( $a$  — амплитуда начальной гармоники)) имеем

$$\begin{aligned} \zeta &= a \cos \theta + a^2ka_2 \cos 2\theta + a^3k^2a_3 \cos 3\theta, \\ \varphi &= a\sqrt{g/k}b_1 \sin \theta + a^2\sqrt{kg}b_2 \sin 2\theta + a^3k\sqrt{kg}b_3 \sin 3\theta, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= kx + \sigma_1(1 + \sigma^0)t, & \sigma^0 &= a^2k^2\sigma_0, & \sigma_1 &= \tau\sqrt{kg}, \\ \tau^2 &= (1 + D_1k^4)(1 + \kappa k \operatorname{th} kH)^{-1} \operatorname{th} kH. \end{aligned}$$

Фазовую скорость волновых возмущений определим из формулы

$$v = \tau\sqrt{g/k}(1 + \sigma^0).$$

В приближении коротких волн ( $kH \gg 1$ ) решение упрощается, так как коэффициенты в (16) имеют вид

$$a_2 = \frac{3\kappa k}{2\Delta_2}(1 + D_1k^4), \quad b_2 = -\frac{1}{2\Delta_2} e^{2kz} \sqrt{\frac{1 + D_1k^4}{1 + \kappa k}} [1 - (14 + 15\kappa k)D_1k^4],$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= [1 + 2\kappa k + 24(\kappa k)^2 - AD_1k^4 - A_1(D_1k^4)^2]/(4\Delta_2\Delta_3), \\
 b_3 &= e^{3\kappa z} \sqrt{(1 + D_1k^4)/(1 + \kappa k)} [13 + 7\kappa k + 12(\kappa k)^2 - BD_1k^4 + 2B_1(D_1k^4)^2]/(24\Delta_2\Delta_3), \\
 A &= 13 - 4\kappa k - 63(\kappa k)^2, & A_1 &= 14 - 2\kappa k - 39(\kappa k)^2, \\
 B &= 499 - 529(\kappa k) - 1014(\kappa k)^2, & B_1 &= 1899 + 4461\kappa k + 2601(\kappa k)^2, \\
 \Delta_2 &= 1 + 3\kappa k - 2(7 + 6\kappa k)D_1k^4, & \Delta_3 &= 1 + 4\kappa k - 3(13 + 12\kappa k)D_1k^4, \\
 \sigma_0 &= -\{3 - 7\kappa k - 12(\kappa k)^2 - 2[21 + 41\kappa k + 21(\kappa k)^2]D_1k^4\}/[8(1 + \kappa k)\Delta_2].
 \end{aligned}$$

**Анализ результатов.** Решение (16) справедливо вне малых областей резонансных значений волнового числа  $k = k_1, k = k_2$ , являющихся положительными действительными корнями уравнений  $\mu_2 = 0$  и  $\mu_3 = 0$  соответственно. Данные уравнения сохраняют вид и в случае пренебрежения нелинейностью ускорения вертикальных смещений пластины. При  $kH \gg 1$  значения  $k_1, k_2$  удовлетворяют уравнениям  $\Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$ . Отсюда находим оценки  $k_1 < \sqrt[4]{1/(4D_1)}, k_2 < \sqrt[4]{1/(9D_1)}, k_2 < k_1$ .

На рис. 1 показаны зависимости резонансных значений волнового числа от толщины ледяной пластины при  $H = 100$  м (рис. 1,а) и от глубины слоя жидкости при  $h = 0,5$  м (рис. 1,б), полученные при  $\rho_1/\rho = 0,87, \nu = 0,34$ . На рис. 1 видно, что при фиксированной глубине слоя жидкости с уменьшением цилиндрической жесткости пластины значения  $k_1, k_2$  увеличиваются, стремясь к бесконечности в жидкости с открытой поверхностью ( $h = 0$ ) и в жидкости, покрытой абсолютно гибкой ( $h \neq 0, E = 0$ ) пластиной (битым льдом). Влияние глубины слоя жидкости выражается в увеличении значений  $k_1, k_2$ . Однако при уменьшении жесткости пластины глубина  $H$ , при которой это влияние существенно, также уменьшается.

Для оценки влияния толщины и модуля упругости плавающей ледяной пластины на амплитудно-фазовые характеристики волнового возмущения проведены численные расчеты при тех же значениях параметров  $E, \nu, \rho_1/\rho$ , что и для рис. 1.

Анализ результатов расчетов показывает, что характер воздействия цилиндрической жесткости ледяной пластины на структуру возмущений определяется глубиной слоя жидкости  $H$ , длиной  $\lambda = 2\pi/k$  и наклоном  $\varepsilon = ak$  волны начальной основной гармоники

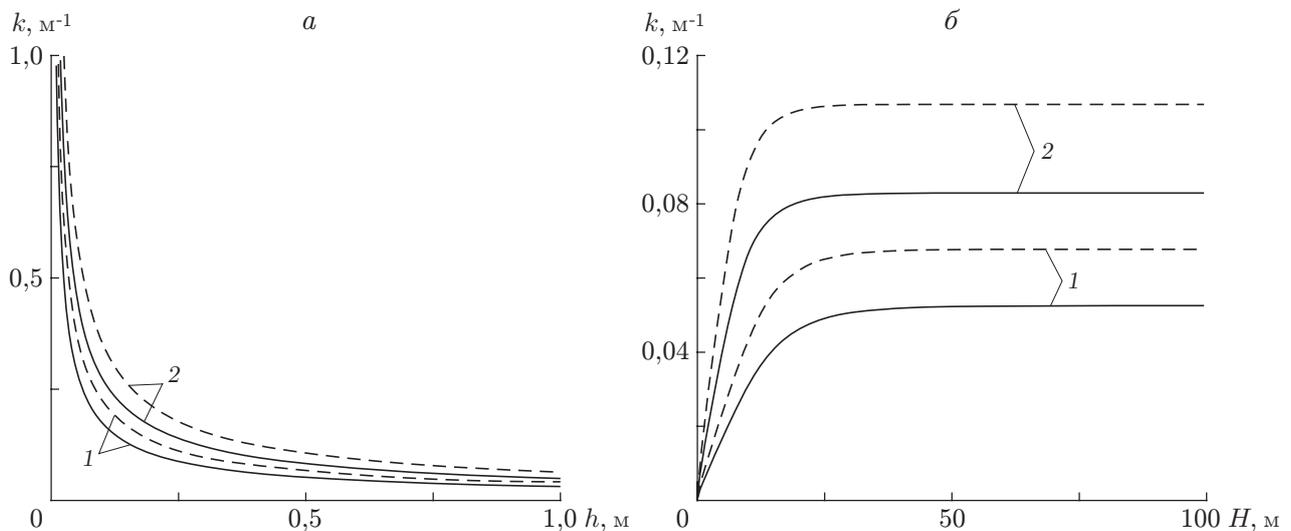


Рис. 1. Зависимости резонансных значений волнового числа от толщины пластины (а) и глубины бассейна (б) при  $\rho_1/\rho = 0,87, \nu = 0,34$ : сплошные линии —  $k_2$ , штриховые —  $k_1$ ; 1 —  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, 2 —  $E = 5 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>

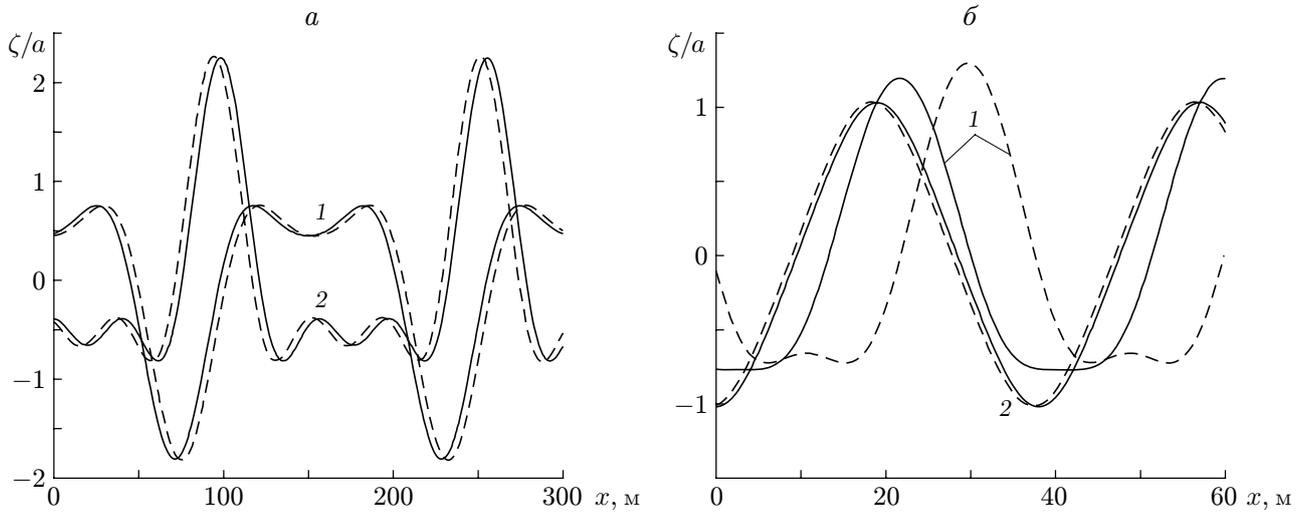


Рис. 2. Профили возмущения поверхности пластина — жидкость вдоль оси  $x$ :  
 $a$  —  $H = 10$  м,  $h = 0,7$  м,  $k = 0,04$  м $^{-1}$ ,  $t = 150$  с,  $\varepsilon = 0,08$ ,  $b$  —  $H = 100$  м,  $h = 0,15$  м,  $k = 0,165$  м $^{-1}$ ,  $t = 70$  с,  $\varepsilon = 0,33$ ; сплошные линии — без учета нелинейности вертикальных смещений пластины, штриховые — с учетом нелинейности вертикальных смещений пластины; 1 —  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м $^2$ , 2 —  $E = 0$

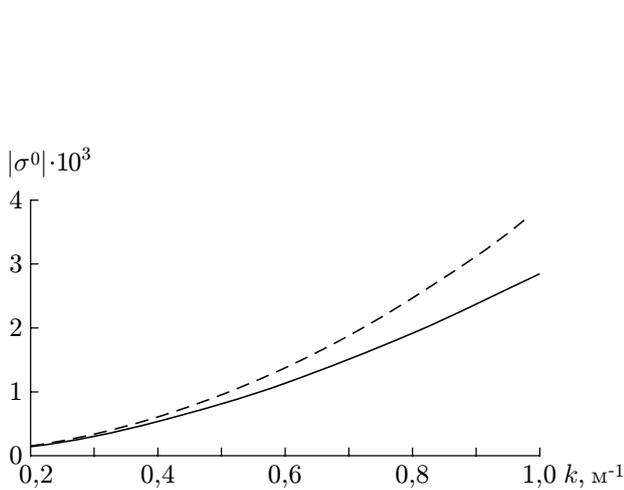


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость величины сдвига фазы колебаний от волнового числа при  $h = 0,5$  м:

сплошная линия — без учета нелинейности вертикальных смещений пластины, штриховая — с учетом нелинейности вертикальных смещений пластины

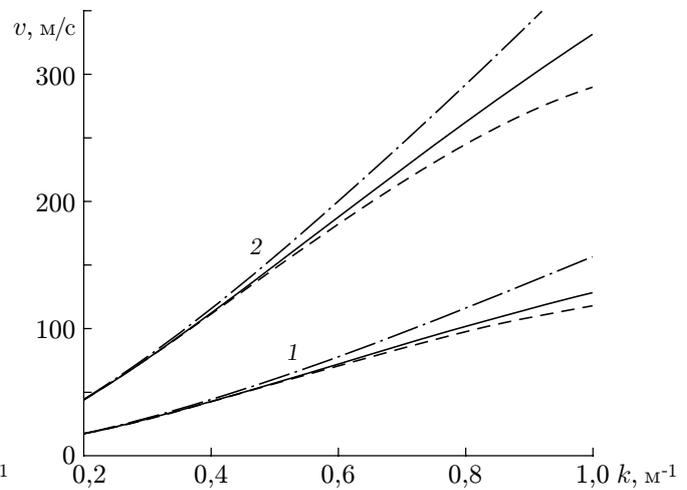


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость фазовой скорости от волнового числа при различной толщине пластины:

сплошные линии — без учета нелинейности вертикальных смещений пластины, штриховые — с учетом нелинейности вертикальных смещений пластины; штрихпунктирные линии — основная линейная гармоника; 1 —  $h = 0,5$  м, 2 —  $h = 1,0$  м

(рис. 2). Видно, что упругость пластины может оказывать влияние не только на амплитуду колебаний, уменьшая ее, но и на форму волнового профиля. При этом в коротковолновом диапазоне (см. рис. 2, б) при увеличении упругости пластины влияние высших гармоник также увеличивается. Кроме того, учет нелинейности ускорения вертикальных смещений приводит к сдвигу фазы колебаний в направлении движения волны, в случае если пластина абсолютно гибкая ( $E = 0$ ), и отставанию фазы колебаний в случае упругой пластины. Количественную оценку изменения фазы колебаний за счет учета нелинейности ускорения позволяют получить рис. 3, 4, где показаны распределения величины сдвига  $|\sigma^0|$  фазы колебаний и фазовой скорости  $v$  соответственно ( $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>). Следует отметить, что кривые на рис. 3, 4 приведены только для участка изгибной ветви дисперсионной зависимости фазовой скорости. Влияние нелинейности ускорения в области гравитационной ветви, где сила тяжести больше силы упругости, качественно такое же, как и в случае абсолютно гибкой пластины (битый лед), рассмотренном в работе [10]. На изгибно-гравитационном участке дисперсионной кривой фазовая скорость может как увеличиваться, так и уменьшаться за счет нелинейности вертикальных ускорений.

**Заключение.** На основе уравнений динамики нелинейных волн в однородной идеальной несжимаемой жидкости с плавающей тонкой упругой пластиной методом многомасштабных асимптотических разложений выведены дифференциальные уравнения в частных производных для определения трех нелинейных приближений решения задачи о пространственно-временной эволюции произвольного начального возмущения поверхности пластины — жидкость (изгиба пластины) конечной амплитуды. В случае бегущих периодических волн для потенциала скорости движения жидких частиц и отклонения поверхности пластины — жидкость от невозмущенного состояния построены решения этих уравнений в виде асимптотических рядов до величин третьего порядка малости. Проведен анализ зависимости амплитудно-фазовых характеристик волновых возмущений от модуля упругости и толщины пластины, длины и наклона волны начальной основной линейной гармоники. Показано, что упругость пластины обуславливает не только уменьшение амплитуды волны изгиба, но и изменение формы профиля волны вдоль направления ее перемещения. В коротковолновом диапазоне влияние упругости приводит к увеличению вклада высших гармоник. При учете нелинейности ускорения вертикальных смещений упругой пластины наблюдается отставание фазы колебания, в то время как в случае абсолютно гибкой пластины имеет место обратное явление.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Нестационарная задача о колебаниях бесконечной пластинки, плавающей на поверхности идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 163–167.
2. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
3. Wadhams P. Attenuation of swell by sea ice // J. Geophys. Res. 1973. V. 78, N 18. P. 3552–3563.
4. Букатов А. Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикл. механика. 1981. Т. 17, № 1. С. 93–98.
5. Squire V. A. A theoretical, laboratory and field study of ice coupled waves // J. Geophys. Res. 1984. V. 89, N C5. P. 1079–1089.
6. Schulkes R. M. S. M., Sneyd A. D. Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 25–46.
7. Daffy D. G. The response of floating ice to a moving, vibrating load // Cold Red. Sci. Tech. 1991. V. 20. P. 51–64.

8. **Гольдштейн Р. В., Марченко А. В.** О длинных волнах в системе ледяной покров — жидкость при наличии ледового сжатия // Электрофизические и физико-механические свойства льда: Сб. науч. тр. Л.: Гидрометеоздат, 1989. С. 188–205.
9. **Гладун О. М., Федосенко В. С.** Нелинейные установившиеся колебания упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 3. С. 146–154.
10. **Букатов А. Е., Букатов А. А.** Нелинейные поверхностные волны в бассейне с плавающим битым льдом // Мор. гидрофиз. журн. 2002. № 5. С. 34–46.
11. **Найфе А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

*Поступила в редакцию 7/VIII 2008 г.,  
в окончательном варианте — 31/X 2008 г.*

---