

УДК 532.517+519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

О. А. Шмагунов

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: shmag@itam.nsc.ru

Проведено обобщение результатов, полученных ранее с помощью метода дискретных вихрей с “вязкой” коррекцией. Определены границы области применимости этого метода. Полученные ранее результаты обтекания плоской пластины дополнены оценками сходимости решения. Выполнено моделирование истечения плоской струи вязкой несжимаемой жидкости в затопленное пространство. Проведен анализ геометрических характеристик струи — полуширины, формы профилей продольной скорости и интенсивности пульсаций. Установлено, что результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами расчетов, выполненных с помощью других методов.

Ключевые слова: метод дискретных вихрей, вязкость, турбулентность.

Введение. При расчете турбулентных течений по моделям, основанным на уравнениях Навье — Стокса, существует ряд ограничений, обусловленных тем, что эти уравнения получены в предположении гладких регулярных линий тока и сравнительно небольших градиентов завихренности. Известно, что турбулентное течение обладает противоположными свойствами. Таким образом, попытки описать турбулентность с помощью уравнений Навье — Стокса приводят к необходимости рассматривать эти уравнения на границах области их применимости [1]. Данные ограничения отсутствуют при использовании методов дискретных вихрей, с помощью которых исследуется движение отдельных вихревых элементов. Система, состоящая из четырех вихрей, уже обладает как временной, так и пространственной стохастичностью. Методы дискретных вихрей основаны на конечномерной динамической системе, описывающей движение вихревых элементов, поэтому при решении этой системы отсутствуют сложные проблемы дискретизации уравнений в частных производных. Одной из проблем, возникающих при использовании метода дискретных вихрей, является учет вязкости. Существуют различные решения этой проблемы с помощью уравнения вязкой диффузии завихренности [2]. Одним из новых подходов является метод вязких вихревых доменов [3], в котором используется лагранжев вихревой способ решения уравнений Навье — Стокса. В настоящей работе применяется подход [1, 4, 5], главная идея которого заключается в следующем. Как известно, двумерные течения идеальной жидкости обладают такими инвариантами, как полная завихренность, координаты центра завихренности, дисперсия завихренности, некоторая составляющая кинетической энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-08-00814).

© Шмагунов О. А., 2012

В процессе вязких течений первые две характеристики сохраняются, тогда как дисперсия и энергия изменяются во времени по известным законам [6]. Так же как и в случае идеальных течений, непрерывное распределение завихренности вязкого течения моделируется с помощью набора круговых вихрей. Выполнив предельный переход к точечным вихрям, получаем систему идеальных точечных вихрей, энергия которой диссипирует так же, как кинетическая энергия вязкого течения. Для того чтобы согласовать диссипацию энергии с уравнениями движения идеальных точечных вихрей, предположим, что дискретизация поля завихренности вязкого течения соответствует переходу в некоторую неинерциальную систему координат. В этой системе выполняются уравнения движения точечных вихрей. Известно, что численная дискретизация уравнений движения порождает схемную диссипацию и дисперсию. Этот процесс также можно представить как переход в другую неинерциальную систему координат. Следовательно, для того чтобы получить результаты в исходной физической системе координат, необходимо после каждого шага численного интегрирования выполнять обратное преобразование координат и времени. Эти преобразования определяются по условию соответствия диссипации энергии системы точечных вихрей некоторой заданной вязкости [7].

Таким образом, основой рассматриваемого подхода является идея о том, что действие источников погрешности на вихри качественно подобно, поэтому можно предположить, что обратное преобразование также должно быть универсальным для всей системы вихрей [8].

Данная гипотеза проверяется с помощью сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными и с результатами расчетов, полученными другими методами.

Границы области применимости метода. С помощью предлагаемого метода ранее было проведено моделирование следующих эталонных задач: эволюция системы четырех вихрей (система Новикова), моделирование вихревого пятна (вихря Рэнкина) [5], обтекание плоской пластины [9], моделирование истечения плоской струи из сопла в затопленное пространство.

Из работы [10] следует, что в случае системы Новикова введение вязкости в систему должно приводить к уменьшению фазового пространства движения. Действительно, в расчетах в отсутствие вязкости траектории движения вихрей заполняли весь круг, а при незначительной вязкости со временем образовывали кольцо, т. е. в методе качественно учитывалось влияние вязкости. Как показали дальнейшие расчеты, при большей вязкости и больших временах расчета решение является нефизическим, что обусловлено малым количеством вихрей и трудностью учета диффузии завихренности из области течения, поэтому не удалось выполнить какие-либо количественные оценки, например оценить характеристические показатели Ляпунова (величины, определяющие скорость разбегания траекторий), для определения меры стохастичности в системе.

Попытка преодолеть данную трудность предпринята в задаче моделирования вихревого пятна (вихря Рэнкина). В этом случае количество вихрей больше, и диффузия завихренности на бесконечность учитывается с помощью введения в область течения виртуального (нефизического) точечного вихря, обеспечивающего сохранение суммарной циркуляции. Это позволяет отладить работу алгоритма для больших интервалов времени, но не решает полностью проблему учета диффузии завихренности на бесконечность, поскольку введение такого вихря непосредственно в область течения нарушает его структуру. Поэтому на данном этапе исследования такой класс задач, как свободные течения, невозможно моделировать разрабатываемым методом.

Следующим классом задач, которые моделировались с помощью данного метода, являются течения в областях с твердыми границами. Для учета влияния твердых границ в отсутствие вязкости достаточно условия непротекания на границе. В случае учета вязко-

сти граничное условие заменяется условием прилипания, достаточно сложным для моделирования. Существует несколько способов, разработанных главным образом А. Дж. Чориным [11], в которых на границе области добавляются вихри с такой циркуляцией, что суммарное поле скоростей на этой границе становится равным нулю. В настоящей работе способ Чорина не применялся по двум причинам. Во-первых, в результате применения этого метода он стал бы гибридным, утратив первоначальную простоту, в то время как объектом анализа являлся именно способ учета вязкости согласно законам изменения интегральных характеристик течения: если использовать способ Чорина для моделирования условий прилипания, то было бы естественно применять его также для моделирования вязкости вообще. Во-вторых, использование уравнений пограничного слоя потребовало бы введения в модель дополнительных эмпирических соотношений. Следует отметить, что отсутствие условия прилипания на границах не позволяет применить рассматриваемый метод в случаях течений Куэтта и Пуазейля, поскольку в таких течениях завихренность формируется именно на границах. Поэтому наиболее подходящим классом задач для исследования данного подхода является обтекание тел с острыми кромками и истечение струи.

Обтекание пластины. Задача обтекания пластины подробно рассмотрена в [9]. На рис. 1 приведены зависимости числа Струхали Sh от числа Рейнольдса Re в диапазоне $50 < Re < 1000$ [12]. Результаты сравнения зависимостей позволяют сделать вывод о том, что в разрабатываемом методе достаточно точно воспроизводится период дорожки Кармана. Заметим, что алгоритм не содержит эмпирических данных, позволяющих добиться соответствия эксперименту. Полученное соответствие является результатом применения коррекции, проведенной с помощью законов изменения интегральных характеристик течения под действием вязкости. Этот результат показывает, что с помощью данного подхода можно достаточно точно моделировать интегральные характеристики отрывных течений, таких как период дорожки Кармана.

На примере расчета числа Струхали проведены оценки сходимости решения к приближенному решению, показанному на рис. 1. В табл. 1 приведены значения числа Струхали для диапазона значений числа Рейнольдса Re от 50 до 1000 и для шагов по времени dt от 0,100 до 0,025. Общее безразмерное время счета $T = 40$. Шаг по времени $dt = 0,1$ для дан-

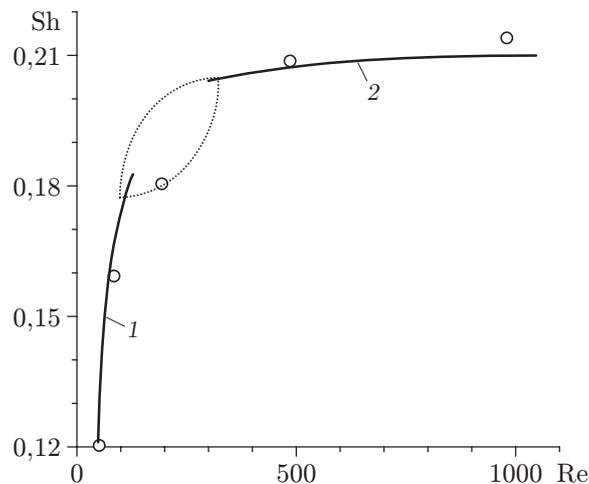


Рис. 1. Зависимость числа Струхали Sh от числа Рейнольдса Re :

1 — $Sh = 0,212(1 - 21,2/Re)$; 2 — $Sh = 0,212(1 - 12,7/Re)$; точки — результаты численного моделирования; область между кривыми 1 и 2 — область значений числа Рейнольдса, в которой не выявлена зависимость $Sh(Re)$

Таблица 1

Значения Sh при $50 \leq Re \leq 1000$ и $0,025 \leq dt \leq 0,100$

dt	Sh				
	Re = 50	Re = 100	Re = 200	Re = 500	Re = 1000
0,100	0,158	0,169	0,169	0,182	0,189
0,050	0,148	0,165	0,169	0,189	0,175
0,025	0,148	0,165	0,172	0,189	0,197
Погрешность, %	7	2	2	4	14

Таблица 2

Значения Sh при $Re = 100, 1000$ и $400 \leq N \leq 700$

N	Sh	
	Re = 100	Re = 1000
400	0,169	0,189
600	0,164	0,191
700	0,165	0,203
Погрешность, %	3	7

ной задачи являлся критическим, и его дальнейшее увеличение, как правило, приводило к получению нефизического решения. Погрешность (дисперсия) вычислялась как отношение разности полученных значений и среднего значения числа Струхаля. Расчеты показывают, что разброс значений числа Струхаля незначителен, но увеличивается на границах данного диапазона, особенно при больших числах Рейнольдса. Значение $Re = 1000$ можно считать предельным для рассматриваемого метода.

Аналогичный результат расчета получен для разных чисел Рейнольдса и различной продолжительности счета. Шаг по времени $dt = 0,1$. В табл. 2 приведены значения числа Струхаля для чисел Рейнольдса $Re = 100, 1000$ и шагов N от 400 до 700.

Моделирование плоской струи. С помощью описанного метода проведено также моделирование плоской струи вязкой несжимаемой жидкости, истекающей из сопла в затопленное пространство. Постановка этой задачи взята из работы [13]. Расчетная область представляет собой сопло, состоящее из двух параллельных друг другу стенок длиной $L_S = 4,5$, расстояние между которыми равно $2R_S = 2$. Стенки сопла моделировались двумя системами из $N = 30$ равноотстоящих друг от друга точечных вихрей $\Gamma_{1Si}, \Gamma_{2Si}$ и расположенных посередине между ними контрольных точек T_{1Si}, T_{2Si} (рис. 2).

В каждый момент времени на кромках сопла образуется два новых вихря $\Gamma_{1\sigma\nu}, \Gamma_{2\sigma\nu}$, которые начинают перемещаться в поле скоростей, наведенном системой вихрей. Необходимо определить циркуляции вихрей на стенках сопла, а также циркуляции двух новых вихрей. Согласно условию непротекания в контрольных точках получаем $2N$ уравнений:

$$\sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^N w_{kSi}(T_{lSj})\Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^{\nu} w_{k\sigma i}(T_{lSj})\Gamma_{k\sigma i} \right) = 0, \quad l = 1, 2, \quad j = \overline{1, N}.$$

Здесь $w_{kSi}(T_{lSj}), w_{k\sigma i}(T_{lSj})$ — нормальные составляющие векторов поля скоростей, индуцируемого вихрями Γ_{kSi} и $\Gamma_{k\sigma i}$ в контрольных точках T_{lSj} соответственно. Из условия сохранения суммарной циркуляции получаем следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^{\nu} \Gamma_{k\sigma i} \right) = 0.$$

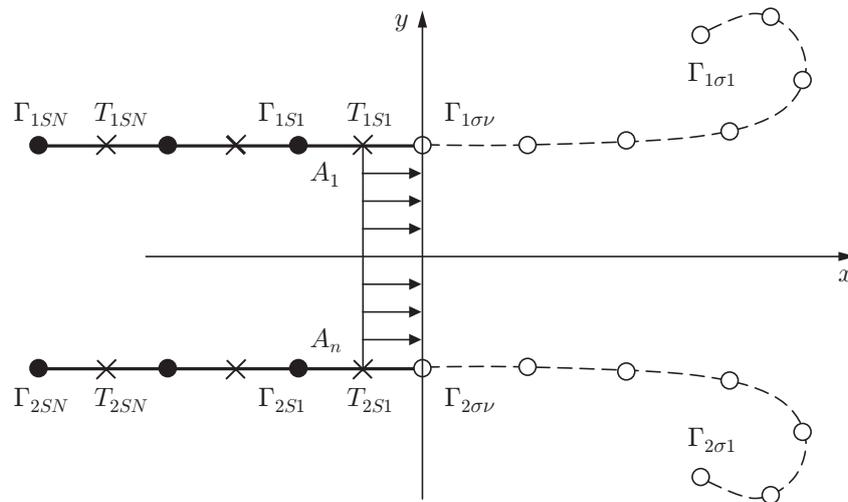


Рис. 2. Расчетная область в задаче об истечении струи

Система уравнений замыкается уравнением расхода жидкости через сопло

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^N w_{xkSi}(A_j) \Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^{\nu} w_{xk\sigma i}(A_j) \Gamma_{k\sigma i} \right) \Delta S_j = Q(t),$$

где n — количество точек в сечении сопла, интегрированием по которым рассчитывались параметры выходного потока. В расчетах принималось $n = 10$.

С помощью данной системы уравнений определяются циркуляции всех вихрей, что позволяет рассчитать скорости в точках расположения свободных вихрей и найти новые координаты этих точек интегрированием уравнений

$$\frac{dx_{k\sigma i}}{dt} = w(\Gamma_{k\sigma i}), \quad \frac{dy_{k\sigma i}}{dt} = w(\Gamma_{k\sigma i}).$$

В расчетах шаг по времени $\Delta t = 0,2$.

После каждого шага интегрирования выполняется “вязкая” коррекция координат и циркуляций свободных вихрей с предварительной поправкой инвариантов в зависимости от внешней скорости [4].

В рассматриваемой задаче, как и в задаче о вихре Рэнкина, возникает вопрос об учете диффузии завихренности из области течения на бесконечность. Решение естественным образом следует из того факта, что в результате “вязкой” коррекции циркуляции свободных вихрей уменьшаются, следовательно, уменьшается суммарная циркуляция системы вихрей. Однако, поскольку полная циркуляция является инвариантом, в систему вихрей после “вязкой” коррекции добавлялась пара вторичных вихрей противоположных знаков. Координаты и циркуляции этих вихрей определялись с помощью условия сохранения суммарной циркуляции и координат центра завихренности для групп вихрей каждого знака. Численные эксперименты показали, что эти вихри группируются в виде двух лент на значительном расстоянии от основного течения и не влияют на его структуру. Полное время счета равно $T = 160$, профили продольной скорости и интенсивность турбулентности рассчитываются при $\bar{T} = 120 \div 160$.

На рис. 3 приведена характерная картина течения. Вторичные вихри, моделирующие вязкую диссипацию завихренности из ядра потока, образуют две ленты на значительном расстоянии от основного течения и в данном масштабе не видны.

При обезразмеривании уравнений движения в качестве характерной длины выбрана полуширина сопла, а в качестве характерной скорости — скорость на срезе сопла. Расчеты



Рис. 3. Характерная картина течения (кинематическая вязкость $\nu = 0,001$, шаг по времени $dt = 0,1$, число шагов $N = 800$)

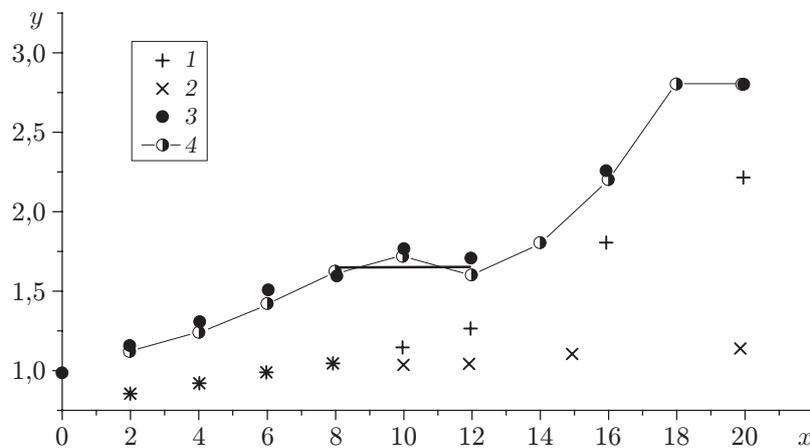


Рис. 4. Зависимость полуширины струи, нормированной на полуширину сопла, от расстояния от сопла при $\nu = 3,74 \cdot 10^{-5}$:

1 — результаты расчета без искусственного возмущения [14]; 2 — результаты расчета с искусственным возмущением; 3 — результаты эксперимента [15]; 4 — результаты расчета по предлагаемому методу; жирная линия — аппроксимация зависимости полуширины струи от расстояния от среза сопла, полученная по формуле из работы [6]

показали, что при любом значении числа Рейнольдса в диапазоне $10^2 < Re < 10^5$ струю можно разделить на три характерные области: $0 < x < 8$ — начальная (профиль струи еще не сформировался, и течение, по сути, состоит из двух слоев сдвига); $8 < x < 12$ — ламинарная; $x > 12$ — турбулентная. Результаты численных расчетов полуширины струи и профиля продольной скорости в ламинарной области хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными [6].

На рис. 4 представлены результаты расчета полуширины струи при значении кинематической вязкости $\nu = 3,7 \cdot 10^{-5}$ (тонкая линия). Граница струи в каждом поперечном сечении определялась как значение координаты y , при котором осредненная продольная скорость уменьшается в два раза по сравнению с максимальным значением, достигаемым на оси струи.

На рис. 5 приведен профиль продольной составляющей средней скорости, а также упомянутые результаты экспериментов [15] и данные расчета [14]. По оси абсцисс отложено расстояние от среза сопла, по оси ординат — расстояние от оси струи. Видно, что результаты расчета с использованием “вязкой” коррекции лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты расчета с помощью классического метода дискретных вихрей.

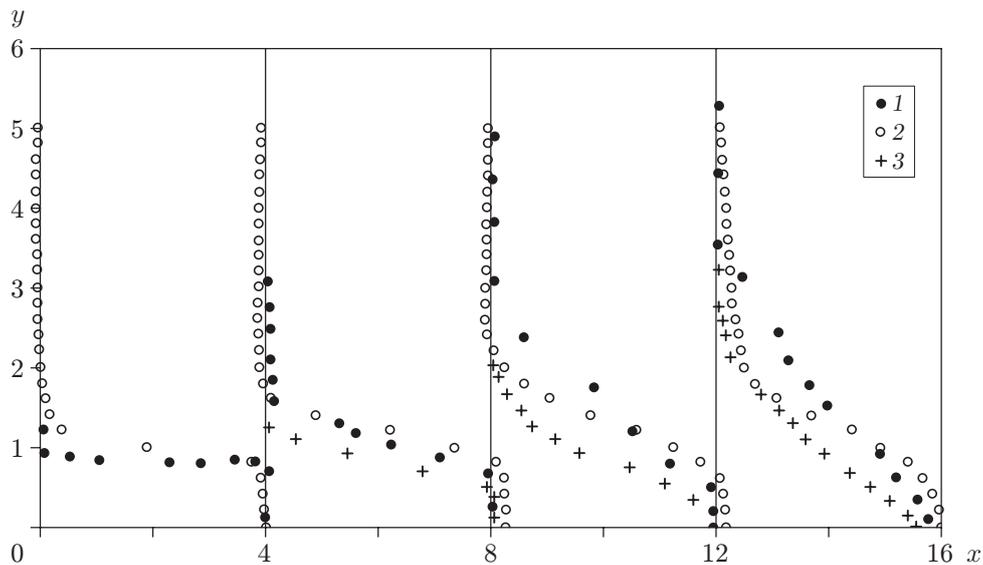


Рис. 5. Профиль продольной составляющей средней скорости на различных расстояниях от оси и среза сопла ($\nu = 3,74 \cdot 10^{-5}$):

1 — экспериментальные данные работы [15]; 2 — расчет по данному методу; 3 — расчет по классическому методу [14]

Заключение. С использованием метода дискретных вихрей разработаны основы нового численного метода моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости. Преимуществами этого метода являются исключение влияния численной диссипации из физических процессов и замкнутость модели, для которой не нужны эмпирические соотношения, кроме законов сохранения. При этом метод прост и эффективен: процесс интегрирования уравнений движения лишь дополняется процедурой локальной коррекции координат и циркуляций точечных вихрей, для того чтобы привести изменения энергии и дисперсии вихревого движения в соответствие с заданной вязкостью. Несмотря на приближенность метода, заключающуюся в использовании двумерной модели и условия непротекания на границах, численные расчеты показывают, что в нем учитывается влияние вязкости при моделировании ламинарных течений и при моделировании начальной стадии развития турбулентности струи. Для моделирования развитой турбулентности необходим переход к трехмерности. Концепция метода позволяет развить аналогичный подход для трехмерных течений. Известно, что трехмерные идеальные течения имеют следующие инварианты [16]: полную завихренность, импульс, момент импульса, кинетическую энергию, спиральность. Для вязких течений первые три величины сохраняются, а энергия и спиральность изменяются по известным законам [6]. Возможна аппроксимация непрерывного поля завихренности с помощью набора коротких сегментов вихревых нитей, каждый из которых можно представить в виде предела системы замкнутых вихревых нитей. Вследствие этого появляется возможность разработать численный алгоритм для моделирования вязкости, подобный алгоритму для моделирования двумерных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scobelev B. Yu., Shmagunov O. A. Principal difficulties of turbulence description by Navier — Stokes equations and vortex methods // Proc. of the 1st Intern. conf. on vortex methods, Kobe, 4–5 Nov. 1999. Kobe: S. n., 1999. P. 23–30.

2. **Winckelmans G. S., Leonard A.** Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows // J. Comput. Phys. 1993. V. 109. P. 247–273.
3. **Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я.** Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 3–14.
4. **Belotserkovsky S. M., Scobelev B. Yu., Shmagunov O. A.** Viscosity simulation in the method of discrete vortices // Proc. of the 3rd Comput. fluid dynamics conf. of Europ. community on comput. methods in applied sciences (ECCOMAS), Paris (France), 9–13 Sept. 1996. Chichester; N. Y.: Wiley, 1996. P. 791–796.
5. **Scobelev B. Yu., Shmagunov O. A.** New method of viscosity simulation in a system of discrete vortices // Proc. of the Saint-Venant symp., Paris, 28–29 Aug. 1997. Paris: Presses de l'ecole nationale des ponts et chausses, 1997. С. 133–140.
6. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
7. **Рациональные** пути построения замкнутых моделей свободной турбулентности на основе метода дискретных вихрей: Науч.-техн. отчет / Центр. аэрогидродинам. ин-т. № 004119. М., 1989.
8. **Белоцерковский С. М.** Турбулентность и вихревая аэродинамика // Природа. 1997. № 10. С. 5–12.
9. **Скобелев Б. Ю., Шмагунов О. А.** Новый подход к моделированию вязкости в методе дискретных вихрей // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 5. С. 116–125.
10. **Новиков Е. А., Седов Ю. Б.** Стохастические свойства системы четырех вихрей // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1978. Т. 75, № 3. С. 868–876.
11. **Chorin A. J.** Numerical study of slightly viscous flow // J. Fluid Mech. 1973. V. 57, N 4. P. 785–796.
12. **Roshko A.** On the development of turbulent wakes from vortex streets. Washington, 1953. (Tech. note / NASA; N 2913).
13. **Дворак А. В., Хлапов Н. В.** Турбулентные характеристики плоской струи // Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов: Тр. Воен.-возд. инж. акад. им. Н. Е. Жуковского. М.: Воен.-возд. инж. акад., 1986. Вып. 1313. С. 76–84.
14. **Shimizu S.** Discrete-vortex simulation of a two-dimensional turbulent jet // Bull. JSME. 1986. V. 29, N 254. P. 2440–2446.
15. **Hussain A. K. M. F., Thompson C. A.** Controlled symmetric perturbation of the plain jet: an experimental study in the initial region // J. Fluid Mech. 1980. V. 100, N 2. P. 397–431.
16. **Яненко Н. Н., Веретенцев А. Н., Григорьев Ю. Н.** Гамильтонов формализм для пространственной системы малых вихрей в идеальной жидкости // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики, 1979. Т. 10, № 5. С. 144–149.

*Поступила в редакцию 21/VI 2007 г.,
в окончательном варианте — 28/IX 2011 г.*
